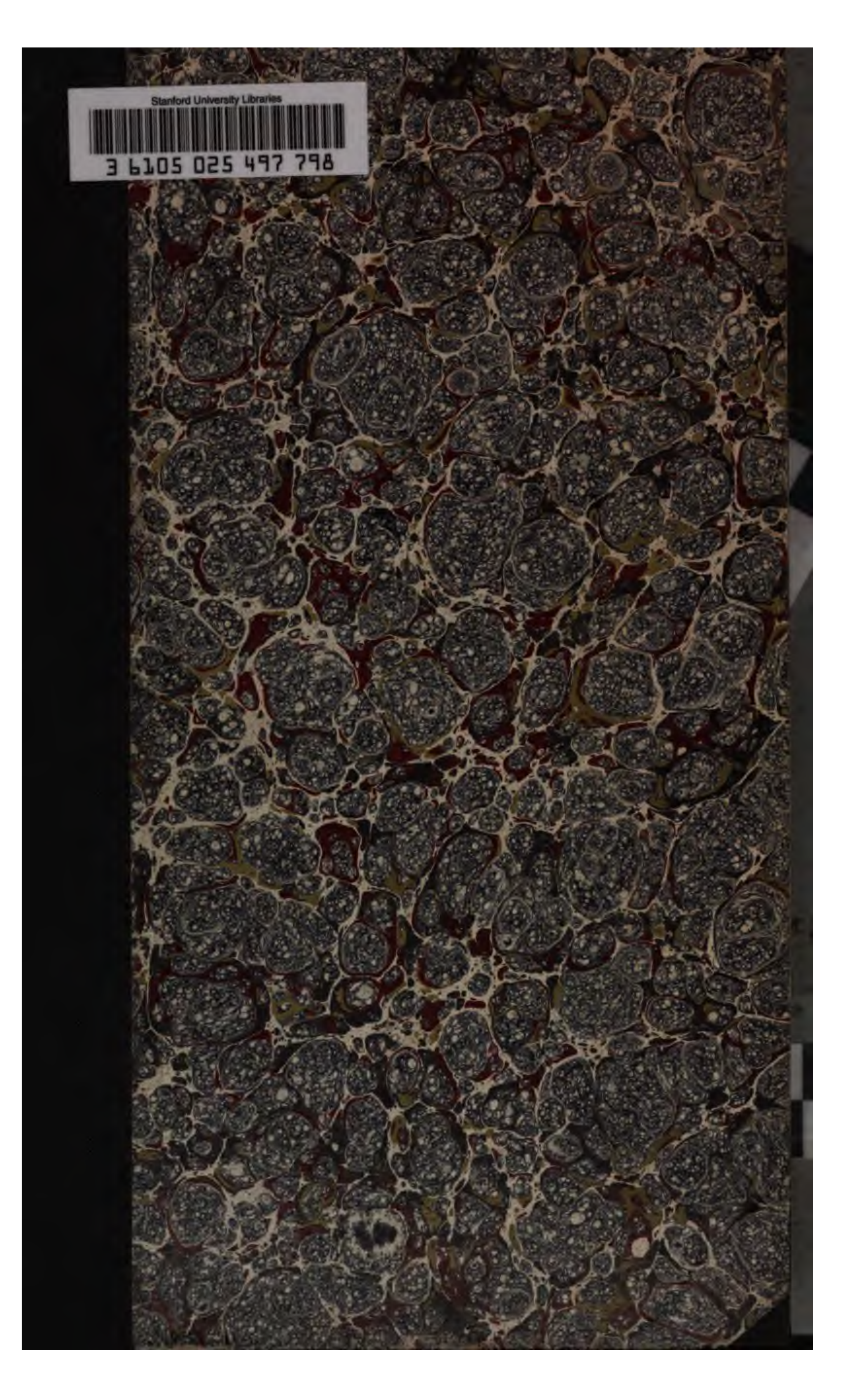

Stanford University Libraries
3 6105 025 497 798











ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Achtundfunfzigster Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1876.



Inhalts-Verzeichniss
des achtundfunfzigsten Teils.

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.

Integralrechnung.

Geometrie der Ebene.

Geometrie des Raumes.

Trigonometrie.

Litterarische Berichte.

Druckfehler in Teil LVII.

S.	Z.	v.		statt		muss stehen
S. 76.	Z. 4	v. oben	statt	P'''	muss stehen	P''
- 76.	- 6	-	-	$Y'Y$	-	$\parallel Y'Y$
- 77.	- 1	-	-	wo die	-	wo x die
- 77.	- 2	- unten	vertausche in d. Formel $x_1 = \ldots$ x u. x_1 mit einander.			
- 78.	-16	- oben	statt	$\mathfrak{P}_0$ sind	muss es heissen	$\mathfrak{P}_0 \parallel$ sind
- 80.	- 6	-	-	φ	-	$\mathfrak{x}$
- 80.	- 9	-	-	von $\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$	-	$\mathfrak{L}'\mathfrak{L}$
- 80.	- 1	- unten	-	$t-$	-	$t-w$
- 80.	- 1	-	-	da	-	das
- 83.	- 2	- oben	-	$\mathfrak{F}(x)-$	-	$\mathfrak{F}(x_1)-$
- 84.	-18	-	-	P_2	-	P_1
- 85.	- 5	- unten	-	$\pm$	-	$\mp$
- 86.	-11	-	-	x_2	-	x_1
- 87.	- 4	-	-	$=(w^{r-2}+$	-	$w(w^{r-2}+$
- 87.	- 3	- unten	-	>0	-	<0
- 385.	- 6	-	-	nur	-	nun

Nachträgliche Berichtigung:

S. 388. Z. 6 v. oben statt dieselben Determinanten muss es heissen die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}, & \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial x}{\partial q} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial q^2}, & \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial q} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial q^2}, & \frac{\partial z}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p}, & \frac{\partial x}{\partial q}, & \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} \\ \frac{\partial y}{\partial p}, & \frac{\partial y}{\partial q}, & \frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q} \\ \frac{\partial z}{\partial p}, & \frac{\partial z}{\partial q}, & \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial q} \end{vmatrix}$$

Druckfehler in Teil LVIII.

S. 41.	Z. 10	v. unten	statt	u	setze	v
- 47.	- 9	-	-	$\frac{\partial x}{\partial u}$	-	$\frac{\partial x}{\partial v}$
- 147.	- 1	- oben	-	bequemen	-	bequemeren
- 148.	- 15	-	-	$\log\sin 10x$	-	$\log\sin x$
- 148.	- 15	-	-	$\log\sin^n x$	-	$\log\sin 10^n x$
- 148.	- 6	- unten)				

I.

Relations entre les sinus des quatre trièdres formés par quatre droites issues d'un même point, avec application au tétraèdre.

Par

Georges Dostor.

---

1. Nous avons déjà donné ces relations au mois de Septembre 1874, à la page 257 du LVI[e] tome de ces Archives; nous y avons supposé que l'une des quatre droites fût dirigée dans le trièdre formé par les trois autres.

Dans cet article nous admettrons que chacune des quatre droites soit extérieure au trièdre formé par les trois autres droites.

Soient donc OS, OA, OB, OC les quatre droites données, qui sont issues du même point O et satisfont aux conditions énoncées.

Nous ferons les angles plans

$$SOA = \alpha, \quad SOB = \beta, \quad SOC = \gamma,$$
$$BOC = \alpha', \quad COA = \beta', \quad AOB = \gamma';$$

et nous représenterons, en général, par Δ_n le sinus du trièdre qui dans le système est opposé à la droite ON. Ainsi nous poserons

le sinus en O du trièdre $OABC$, ou $\sin(\alpha'\beta'\gamma') = \Delta_s$;
le sinus en O du trièdre $OSBC$, ou $\sin(\beta\gamma\alpha') = \Delta_a$;
le sinus en O du trièdre $OSCA$, ou $\sin(\gamma\alpha\beta') = \Delta_b$;
le sinus en O du trièdre $OSAB$, ou $\sin(\alpha\beta\gamma') = \Delta_c$.

2. Cela convenu, il est facile de voir qu'on aura les relations demandées en remplaçant, dans les formules de la page 249 du LVIe volume de ce Journal, d'abord

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma \quad\text{et}\quad \lambda,\quad \mu,\quad \nu$$

respectivement par

$$\pi-\alpha,\quad \pi-\beta,\quad \pi-\gamma \quad\text{et}\quad \alpha',\quad \beta',\quad \gamma';$$

puis en substituant

$$\Delta_s,\quad \Delta_a,\quad \Delta_b,\quad \Delta_c$$

à

$$\Delta,\quad \Delta_{yz},\quad \Delta_{zx},\quad \Delta_{xy}.$$

Ces formules deviennent ainsi

$$\text{(I)}\quad \left\{\begin{aligned}
&\Delta_s + \cos\alpha\,\Delta_a + \cos\beta\,\Delta_b + \cos\gamma\,\Delta_c = 0,\\
&\cos\alpha\,\Delta_s + \Delta_a + \cos\gamma'\,\Delta_b + \cos\beta'\,\Delta_c = 0,\\
&\cos\beta\,\Delta_s + \cos\gamma'\,\Delta_a + \Delta_b + \cos\alpha'\,\Delta_c = 0,\\
&\cos\gamma\,\Delta_s + \cos\beta'\,\Delta_a + \cos\alpha'\,\Delta_b + \Delta_c = 0;
\end{aligned}\right.$$

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta_s^2 &= \Delta_a^2 + \Delta_b^2 + \Delta_c^2 + 2\cos\alpha'\,\Delta_b\Delta_c + 2\cos\beta'\,\Delta_c\Delta_a + 2\cos\gamma'\,\Delta_a\Delta_b,\\
\Delta_a^2 &= \Delta_b^2 + \Delta_c^2 + \Delta_s^2 + 2\cos\alpha'\,\Delta_b\Delta_c + 2\cos\beta\,\Delta_b\Delta_s + 2\cos\gamma\,\Delta_c\Delta_s,\\
\Delta_b^2 &= \Delta_c^2 + \Delta_a^2 + \Delta_s^2 + 2\cos\beta'\,\Delta_c\Delta_a + 2\cos\gamma\,\Delta_c\Delta_s + 2\cos\alpha\,\Delta_a\Delta_s,\\
\Delta_c^2 &= \Delta_a^2 + \Delta_b^2 + \Delta_s^2 + 2\cos\gamma'\,\Delta_a\Delta_b + 2\cos\alpha\,\Delta_a\Delta_s + 2\cos\beta\,\Delta_b\Delta_s;
\end{aligned}\right.$$

$$\text{(III)}\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta_a^2 + \Delta_s^2 + 2\Delta_a\Delta_s\cos\alpha &= \Delta_b^2 + \Delta_c^2 + 2\Delta_b\Delta_c\cos\alpha',\\
\Delta_b^2 + \Delta_s^2 + 2\Delta_b\Delta_s\cos\beta &= \Delta_c^2 + \Delta_a^2 + 2\Delta_c\Delta_a\cos\beta',\\
\Delta_c^2 + \Delta_s^2 + 2\Delta_c\Delta_s\cos\gamma &= \Delta_a^2 + \Delta_b^2 + 2\Delta_a\Delta_b\cos\gamma'.
\end{aligned}\right.$$

3. Supposons actuellement que le point ou sommet O soit le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $SABC$; les droites OS, OA, OB et OC seront égales au rayon R de cette sphère.

Représentons par

$$a,\quad b,\quad c \quad\text{et}\quad a',\quad b'\quad c'$$

les arêtes

$$SA,\quad SB,\quad SC \quad\text{et}\quad BC,\quad CA,\quad AB\ ,$$

qui sont respectivement opposées aux angles au centre

$$SOA,\quad SOB,\quad SOC \quad\text{et}\quad BOC,\quad COA,\quad AOB,$$

que nous avons désigné par

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma \quad\text{et}\quad \alpha',\quad \beta',\quad \gamma'.$$

Si V_s, V_a, V_b et V_c représentent les volumes des trièdres $OABC$,

$OSBC$, $OSCA$, $OSAB$ dont nous avons désigné par Δ_s, Δ_a, Δ_b, Δ_c les sinus des trièdres au sommet O, nous aurons

(1) $V_s = \frac{1}{6} R^3 \Delta_s, \quad V_a = \frac{1}{6} R^3 \Delta_a, \quad V_b = \frac{1}{6} R^3 \Delta_b, \quad V_c = \frac{1}{6} R^3 \Delta_c,$

attendu que, dans chacun de ces quatre trièdres, les trois arêtes au sommet sont égales à R.

La première de nos formules (I), étant multipliée par $\frac{1}{6} R^3$, devient ainsi, après substitution des valeurs (1),

$$(2) \qquad V_s + \cos\alpha\, V_a + \cos\beta\, V_b + \cos\gamma\, V_c = 0.$$

Mais il est aisé de voir que le triangle OSA donne

$$SA^2 = SO^2 + AO^2 - 2SO.AO\cos SOA \quad \text{ou} \quad a^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha,$$

de sorte qu'on a

$$\cos\alpha = 1 - \frac{a^2}{2R^2}, \quad \cos\beta = 1 - \frac{b^2}{2R^2}, \quad \cos\gamma = 1 - \frac{c^2}{2R^2}$$

Substituant donc dans (2), il vient

$$V_s + V_a + V_b + V_c = \frac{1}{2R^2}(a^2 V_a + b^2 V_b + c^2 V_c),$$

ou, en désignant par V le volume total du tétraèdre $SABC$,

$$2R^2 V = a^2 V_a + b^2 V_b + c^2 V_c.$$

En traitant de la même manière les trois dernières des équations (I), on forme le système des quatre équations du premier degré

$$\begin{aligned}
o\,.\,V_s + a^2 V_a + b^2 V_b + c^2 V_c &= 2R^2 V,\\
a^2 V_s + o\,.\,V_a + c'^2 V_b + b'^2 V_c &= 2R^2 V,\\
b^2 V_s + c'^2 V_a + o\,.\,V_b + a'^2 V_c &= 2R^2 V,\\
c^2 V_s + b'^2 V_a + a'^2 V_b + o\,.\,V_c &= 2R^2 V,
\end{aligned}$$

entre les quatre inconnues V_s, V_a, V_b et V_c.

Ce système donne, par exemple pour V_s,

$$V_s \times \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 2R^2V & 0 & c'^2 & b'^2 \\ 2R^2V & c'^2 & 0 & a'^2 \\ 2R^2V & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix} = 2R^2V \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ 1 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ 1 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Or on sait que le multiplicateur de V_s est égal à $-576 R^2 V^2$ tandisque le coefficient de $2R^2V$ dans le second membre revient à

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ 0 & c'^2 & b'^2 \\ c'^2 & -c'^2 & a'^2-b'^2 \\ b'^2 & a'^2-c'^2 & -b'^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ c'^2 & -c'^2 & a'^2-b'^2 \\ b'^2 & a'^2-c'^2 & -b'^2 \end{vmatrix}$$

$$= - \left\{ \begin{array}{l} a^2a'^2(b'^2+c'^2-a'^2) \\ +b^2b'^2(c'^2+a'^2-b'^2) \\ +c^2c'^2(a'^2+b'^2-c'^2) \end{array} \right.$$

Nous avons donc

(IV)

$$88\,VV_s = a^2a'^2(b'^2+c'^2-a'^2)+b^2b'^2(c'^2+a'^2-b'^2)+c^2c'^2(a'^2+b'^2-c'^2).$$

On trouverait semblablement que

$$\text{V)} \left\{ \begin{array}{l} 288\,VV_a = a^2a'^2(b^2+c^2-a'^2)+b^2b'^2(c^2+a^2-b)+c^2c'^2(a'^2+b^2-c^2), \\ 288\,VV_b = a^2a'^2(b'^2+c^2-a^2)+b^2b'^2(c^2+a^2-b'^2)+c^2c'^2(a^2+b'^2-c^2), \\ 288\,VV_c = a^2a'^2(b^2+c'^2-a^2)+b^2b'^2(c'^2+a^2-b^2)+c^2c'^2(a^2+b^2-c'^2). \end{array} \right.$$

Nous laissons au lecteur le soin de chercher les autres relations
ntre les volumes V, V_s, V_a, V_b, V_c et les six arêtes du tétraèdre,
u'on peut déduire des formules (II) et (III).

II.

Application des Discriminants aux Courbes et Surfaces du second degré.

Par

Georges Dostor.

---

1. Condition pour que l'équation générale du second degré, à deux variables,

(1) $$f(x, y) = Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy + 2Cx + 2C'y + D = 0$$

représente deux droites qui se coupent. Dans ce cas le centre qui est le point d'intersection des deux droites, est nécessairement situé sur la courbe (1).

Soient donc a, b, c les coordonnées homogènes de ce centre, et

(2) $$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + 2Bxy + 2Cxz + 2C'yz + Dz^2 = 0$$

l'équation homogène de la courbe. Le point (a, b, c) appartenant à cette ligne (2), on devra avoir

$$2f(a, b, c) = af_a' + bf_b' + cf_c' = 0.$$

Mais on sait que les coordonnées du centre annulent les dérivées f_x' et f_y'; par suite d'après l'égalité précédente elles annuleront aussi la dérivée f_z'. Les coordonnées a, b, c satisfont donc simultanément aux trois équations

$$\tfrac{1}{2}f_x' = Ax + B\,y + C\,z = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}f_y' = Bx + A'y + C'z = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}f_z' = Cx + C'y + D\,z = 0,$$

qui, pour être compatibles, exigent que leur déterminant soit nul. On trouve ainsi la relation de condition

$$\text{(I)} \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix} = 0,$$

qui revient à

$$\text{(II)} \qquad D(B^2 - AA') + AC'^2 + A'C^2 - 2BCC' = 0.$$

Donc Pour que l'équation du second degré à deux variables représente deux droites concourantes, il faut et il suffit que le discriminant du premier membre, rendu homogène, soit égal à zéro.

2. Condition pour que la droite

$$\text{(3)} \qquad ax + by + cz = 0$$

soit tangente à la conique (2). Soient x', y', z' les coordonnées homogènes du point de contact. L'équation homogène de la tangente sera

$$xf_{x'}' + yf_{y'}' + zf_{z'}' = 0;$$

elle sera identique avec l'équation de la droite (2), si l'on a

$$\frac{f_{x'}'}{a} = \frac{f_{y'}'}{b} = \frac{f_{z'}'}{c} = 2\lambda,$$

ou

$$f_{x'}' = 2a\lambda, \quad f_{y'}' = 2b\lambda, \quad f_{z'}' = 2c\lambda.$$

Nous avons ainsi, pour déterminer x', y', z' et λ, les quatre équations

$$\begin{aligned} -o.\lambda + a\,x' + b\,y' + c\,z' &= 0, \\ -a\lambda + Ax' + By' + C\,z' &= 0, \\ -b\lambda + Bx' + A'y' + C'z' &= 0, \\ -c\lambda + Cx' + C'y' + D\,z' &= 0, \end{aligned}$$

dont la première exprime que le point de contact (x', y', z') est situé sur la tangente (3).

Ces équations du premier degré sont homogènes par rapport aux quatre inconnues x', y', z' et λ; elles ne seront compatibles que si leur déterminant est nul, c'est-à-dire, si l'on a

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & A & B & C \\ b & B & A' & C' \\ c & C & C' & D \end{vmatrix} = 0;$$

c'est l'équation de condition demandée.

3. **Equation des tangentes menées, d'un point extérieur, à la courbe du second degré (2).** Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées homogènes du point donné P, et x, y, z celles d'un point quelconque M de l'une des deux tangentes menées de ce point P à la conique (2). L'équation de cette tangente PM sera

$$\text{(4)} \qquad \frac{X - x_1}{x - x_1} = \frac{Y - y_1}{y - y_1} = \frac{Z - z_1}{z - z_1},$$

X, Y, Z étant les coordonnées courantes de cette droite.

Désignons par x', y', z' les coordonnées du point de contact C de la tangente (4); on a évidemment

$$\text{(5)} \qquad x' = \frac{x + \lambda x_1}{1+\lambda}, \quad y' = \frac{y + \lambda y_1}{1+\lambda}, \quad z' = \frac{z + \lambda z_1}{1+\lambda},$$

où λ est une indéterminée dont la valeur dépend de la position du point M sur la tangente (4).

Puisque le point C appartient à la courbe (2), nous avons

$$f(x', y', z') = 0,$$

ou, en ayant égard aux valeurs (5),

$$f\left(\frac{x+\lambda x_1}{1+\lambda}, \frac{y+\lambda y_1}{1+\lambda}, \frac{z+\lambda z_1}{1+\lambda}\right) = \frac{1}{1+\lambda} f(x+\lambda x_1, y+\lambda y_1, z+\lambda z_1) = 0.$$

Or on sait que

$$f(x+\lambda x_1, y+\lambda y_1, z+\lambda z_1)$$
$$= f(x, y, z) + x\lambda f_{x_1}' + y\lambda f_{y_1}' + z\lambda f_{z_1}' + \lambda^2 f(x_1, y_1, z_1);$$

par suite nous avons, pour déterminer la valeur de λ, l'équation du second degré

$$\lambda^2 f(x_1, y_1, z_1) + \lambda(x f_{x_1}' + y f_{y_1}' + z f_{z_1}') + f(x, y, z) = 0.$$

Mais la droite (4) étant tangente, λ ne saurait avoir qu'une seule et même valeur; il s'ensuit que les deux racines de l'équation précédente sont égales, ce qui nous fournit la relation

$$\text{(IV)} \qquad (x f_{x_1}' + y f_{y_1}' + z f_{z_1}')^2 - 4 f(x, y, z) f(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

ou

$$\text{(V)} \qquad \begin{vmatrix} 2f(x,y,z) & xf_{x_1}'+yf_{y_1}'+zf_{z_1}' \\ x_1f_x'+y_1f_y'+z_1f_z' & 2f(x_1,y_1,z_1) \end{vmatrix} = 0,$$

attendu que

$$xf_{x_1}'+yf_{y_1}'+zf_{z_1}' = x_1f_x'+y_1f_y'+z_1f_z'.$$

La relation (V), existant entre les coordonnées d'un point quelconque M de l'une ou l'autre des deux tangentes issues du point, est précésément l'équation de ces deux tangentes.

4. Equation des tangentes menées à une courbe du second degré (2) par les intersections de cette courbe avec une droite

$$\text{(6)} \qquad px+qy+rz=0.$$

Si nous appelons x_1, y_1, z_1 les coordonnées inconnues du point de concours P de ces tangentes, le point P sera le pôle de la droite (6), qui elle-même est dite la corde de contact des deux tangentes. Or l'équation de la corde de contact des deux tangentes issues du point (x_1, y_1, z_1), c'est-à-dire l'équation

$$xf_{x_1}'+yf_{y_1}'+zf_{z_1}'=0$$

devant être identique avec (6), on a nécessairement

$$\text{(7)} \qquad f_{x_1}'=2\lambda p, \quad f_{y_1}'=2\lambda q, \quad f_{z_1}'=2\lambda r,$$

où λ est une indéterminée.

Multiplions ces trois équations (7) par les coordonnées respectives x_1, y_1, z_1 et ajoutons; nous obtenons l'égalité

$$x_1f_{x_1}'+y_1f_{y_1}'+z_1f_{z_1}' \quad \text{ou} \quad 2f(x_1,y_1,z_1)=2\lambda(px_1+qy_1+rz_1),$$

qui, jointe aux équations (7), fournit le système des quatre équations

$$\begin{aligned} -f(x_1,y_1,z_1)+\lambda px_1+\lambda qy_1+\lambda rz_1 &= 0, \\ -\lambda p + Ax_1 + By_1 + Cz_1 &= 0, \\ -\lambda q + Bx_1 + A'y_1 + C'z_1 &= 0, \\ -\lambda r + Cx_1 + C'y_1 + Dz_1 &= 0, \end{aligned}$$

entre les trois inconnues x_1, y_1, z_1. Ces équations sont nécessairement compatibles; par suite leur déterminant est nul, ce qui fournit l'égalité de condition

$$\begin{vmatrix} f(x_1,y_1,z_1) & \lambda p & \lambda q & \lambda r \\ \lambda p & A & B & C \\ \lambda q & B & A' & C' \\ \lambda r & C & C' & D \end{vmatrix} = 0.$$

On en tire

$$(8)\qquad f(x_1, y_1, z_1) = -\frac{\lambda^2}{\Delta}\begin{vmatrix} o & p & q & r \\ p & A & B & C \\ q & B & A' & C' \\ r & C & C' & D \end{vmatrix}$$

où Δ est égal au discriminant (I) de l'équation de la conique.

Les relations (7) donnent aussi

$$(9)\qquad xf_{x_1}' + yf_{y_1}' + zf_{z_1}' = 2\lambda(px + qy + rz).$$

Il nous reste à substituer les valeurs (8) et (9) dans l'équation (IV) pour avoir l'équation demandée des deux tangentes. Celle-ci est donc

$$(\text{VI})\quad f(x, y, z)\begin{vmatrix} o & p & q & r \\ p & A & B & C \\ q & B & A' & C' \\ r & C & C' & D \end{vmatrix} + (px + qy + rz)^2 \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & A' & C' \\ C & C' & D \end{vmatrix} = 0.$$

5. **Condition pour que l'équation générale du second degré à trois variables représente un cône.** Si nous remplaçons les variables x, y, z par leurs rapports $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, $\frac{z}{u}$ à une quatrième variable u, que, à la fin, nous remplacerons par l'unité, nous pourrons représenter la surface par l'équation homogène

$$(10)\qquad \begin{aligned} f(x, y, z, u) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ + 2Cxu + 2C'yu + 2C''zu + Du^2 = 0. \end{aligned}$$

On sait que l'équation du plan tangent au point (x', y', z', u') de la surface (10) est

$$xf_{x'}' + yf_{y'}' + zf_{z'}' + uf_{u'}' = 0,$$

ou

$$(11)\qquad x'f_x' + y'f_y' + z'f_z' + u'f_u' = 0.$$

Supposons que l'équation (10) représente un cône; le plan tangent passera par le sommet, et, si x, y, z, u sont les coordonnées de ce sommet, l'équation (12) devra être satisfaite quelque soit le point de contact (x', y', z', u') du plan tangent, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de ces variables qui vérifient l'équation (11). On obtient ainsi les quatre équations de condition

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}f_x' &= Ax + B''y + B'z + Cu = 0, \\ \tfrac{1}{2}f_y' &= B''x + A'y + Bz + C'u = 0, \\ \tfrac{1}{2}f_z' &= B'x + By + A''z + C''u = 0, \\ \tfrac{1}{2}f_u' &= Cx + C'y + C''z + Du = 0. \end{aligned}$$

Ces quatre équations, étant homogènes, ne sauraient être vérifiés par les mêmes valeurs des variables, que si leur déterminant est nul. La relation de condition est donc

$$\text{(VII)} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0.$$

Donc Pour que l'équation du second degré à trois variables représente un cône, il faut et il suffit que le discriminant de son premier membre, rendu homogène, soit égal à zéro.

6. **Condition pour que le plan**

$$\text{(12)} \qquad ax + by + cz + du = 0$$

soit tangent à la surface du second degré (10). Soient x', y', z', u' les coordonnées homogènes du point de contact. L'équation homogène du plan tangent sera

$$xf_{x'}' + yf_{y'}' + zf_{z'}' + uf_{u'}' = 0;$$

elle sera identique avec l'équation (12) du plan donné, si l'on a

$$\text{(13)} \qquad f_{x'}' = 2a\lambda, \quad f_{y'}' = 2b\lambda, \quad f_{z'}' = 2c\lambda, \quad f_{u'}' = 2d\lambda.$$

Nous avons ainsi, entre les cinq inconnues x', y', z', u' et λ les cinq équations homogènes

$$\begin{aligned} -o.\lambda + ax' + by' + cz' + du' &= 0, \\ -a\lambda + Ax' + B''y' + B'z' + Cu' &= 0, \\ -b\lambda + B''x' + A'y' + Bz' + C'u' &= 0, \\ -c\lambda + B'x' + By' + A''z' + C''u' &= 0, \\ -d\lambda + Cx' + C'y' + C''z' + Du' &= 0, \end{aligned}$$

dont la première exprime que le point de contact (x', y', z', u') appartient au plan tangent (12). Pour que ces équations soient compatibles, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{vmatrix} o & a & b & c & d \\ a & A & B'' & B' & C \\ b & B'' & A' & B & C' \\ c & B' & B & A'' & C'' \\ d & C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0.$$

Les coordonnées du point de contact s'obtiennent en résolvant le système des quatre équations (13), ou

$$\begin{aligned}
Ax' &+ B''y' + B'z' + Cu' = 2a\lambda,\\
B''x' &+ A'y' + B'z' + C'u' = 2b\lambda,\\
B'x' &+ By' + A''z' + C''u' = 2c\lambda,\\
Cx' &+ C'y' + C''z' + Du' = 2d\lambda.
\end{aligned}$$

Pour avoir la valeur de x', multiplions ces équations respectivement par $2\frac{d\Delta}{dA}$, $\frac{d\Delta}{dB''}$, $\frac{d\Delta}{dB'}$, $\frac{d\Delta}{dC}$, où Δ représente le discriminant du premier membre de l'équation (10) de la surface, puis ajoutons, les coefficients de y', z', u' s'évanouissent d'eux mêmes et l'équation résultante nous donnera la valeur de x' en fonction de λ.

On trouvera semblablement les valeurs de y', z', u' en fonction de λ.

Ces valeurs sont ainsi

$$\text{(IX)}\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{2\Delta}{\lambda}x' &= \frac{d\Delta}{dA}2a + \frac{d\Delta}{dB''}b + \frac{d\Delta}{dB'}c + \frac{d\Delta}{dC}d,\\
\frac{2\Delta}{\lambda}y' &= \frac{d\Delta}{dB''}a + \frac{d\Delta}{dA'}2b + \frac{d\Delta}{dB}c + \frac{d\Delta}{dC'}d,\\
\frac{2\Delta}{\lambda}z' &= \frac{d\Delta}{dB'}a + \frac{d\Delta}{dB}b + \frac{d\Delta}{dA''}2c + \frac{d\Delta}{dC''}d,\\
\frac{2\Delta}{\lambda}u' &= \frac{d\Delta}{dC}a + \frac{d\Delta}{dC'}b + \frac{d\Delta}{dC''}c + \frac{d\Delta}{dD}2d.
\end{aligned}\right.$$

Il suffira de diviser les trois premières égalités par la dernière et de poser $u' = 1$, pour avoir d'une manière absolue les valeurs des coordonnées x', y', z' du point de contact.

Si nous mettons les valeurs précédentes dans l'équation (12) du plan tangent, nous verrons que l'équation de condition (VIII) pourra aussi se mettre sous la forme

$$\text{(X)}\quad \frac{d\Delta}{dA}a^2 + \frac{d\Delta}{dA'}b^2 + \frac{d\Delta}{dA''}c^2 + \frac{d\Delta}{dB}bc + \frac{d\Delta}{dB'}ca + \frac{d\Delta}{dB''}ab + \frac{d\Delta}{dC}ad + \frac{d\Delta}{dC'}bd + \frac{d\Delta}{dC''}cd + \frac{d\Delta}{dD}d^2 = 0.$$

7. Condition pour que la surface du second degré (10) soit tangente à l'un des plans de coordonnées, au plan yz, par exemple. L'équation du plan tangent (12) se réduisant à $ax = 0$, il faudra faire $b = c = d = 0$ dans (VIII). La condition demandée sera donc

$$\text{(XI)} \qquad \begin{vmatrix} A' & B & C' \\ B & A'' & C'' \\ C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d\Delta}{dA} =$$

La surface (10) sera tangente aux deux pl
yz, zx, si

$$\text{(XII)} \qquad \frac{d\Delta}{dA} = \frac{d\Delta}{dA'} = 0;$$

elle le sera à la fois aux trois plans de coord

$$\text{(XIII)} \qquad \frac{d\Delta}{dA} = \frac{d\Delta}{dA'} = \frac{d\Delta}{dA''} = 0.$$

8. **Condition pour que la droite**

$$\text{(14)} \qquad ax + by + cz + du = 0, \quad a'x + b'y +$$

soit tangente à la surface du second degr
duits par l'intersection des deux plans (5)
l'équation générale

$$\text{(15)} \qquad (a + a'\lambda)x + (b + b'\lambda)y + (c + c'\lambda)z +$$

Or l'un de ces plans est tangent à la
contact (x, y, z, u) de la droite (14). Si l'éq
plan tangent, on devra avoir les égalités de

$$\frac{f_x'}{a + a'\lambda} = \frac{f_y'}{b + b'\lambda} = \frac{f_z'}{c + c'\lambda} =$$

Les coordonnées du point de contact
déterminées λ et k devront donc satisfaire a

$$\begin{aligned}
&0.k + 0.\lambda k + ax + by + cz + \\
&0.k + 0.\lambda k + a'x + b'y + c'z + \\
&ak + a'\lambda k + Ax + B''y + B'z + \\
&bk + b'\lambda k + B''x + A'y + Bz + \\
&ck + c'\lambda k + B'x + By + A''z + \\
&dk + d'\lambda k + Cx + C'y + C''z +
\end{aligned}$$

dont les deux premières expriment que le poin
aux deux plans (14) et par suite à leur droit
que ces six équations, linéaires et homogèn
connues k, λk, x, y, z, u, soient vérifiés par
ces inconnues, il faut et il suffit que leur dét
condition cherchée est donc

III.

...inants aux surfaces de révolution. ...r, à celles du second degré.

Par

...orges Dostor.

...'une surface

$$f(x, y, z) = 0$$

...nt x', y', z' les coordonnées d'un point quel-
...onnée (1); la normale en ce point a pour

$$\ldots = \frac{y-y'}{f_{y'}'} = \frac{z-z'}{f_{z'}'} = u.$$

...ment de révolution autour de la droite

$$\frac{\ldots - p}{\ldots} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-r}{c} = v,$$

...trée par la normale (2), quel que soit le
...face. Pour cela, il faut et il suffit que les
...ttent un même système de valeurs pour les

...ombre de **six**, contiennent les **cinq** incon-
...emier degré. Si donc on élimine ces cinq
...uations (2) et (3), on obtiendra une relation
... l'équations (1), (2) et (3); cette relation
...mandée.

Si l'on désigne par a, b, c les distances à l'origine des trois points de contact, cette équation prendra la forme

$$\text{(XVI)}\qquad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)^2=\frac{yz}{p^2}+\frac{zx}{q^2}+\frac{xy}{r^2},$$

où p^2, q^2, r^2 sont les quotients de D^2 par P, Q, R.

Considérons le tétraèdre ayant pour sommet l'origine et pour arêtes latérales les longueurs $2a$, $2b$, $2c$, dirigées suivant les axes. La surface (XVI) touchera ces arêtes en leurs milieux et coupera les arêtes opposées aux points

$$x=0,\quad \frac{y}{b}=1\pm\sqrt{1-\frac{p^2}{bc}},\quad \frac{z}{c}=1\pm\sqrt{1-\frac{p^2}{bc}};$$

$$y=0,\quad \frac{z}{c}=1\pm\sqrt{1-\frac{q^2}{ca}},\quad \frac{x}{a}=1\pm\sqrt{1-\frac{q^2}{ca}};$$

$$z=0,\quad \frac{x}{a}=1\pm\sqrt{1-\frac{r^2}{ab}},\quad \frac{y}{b}=1\pm\sqrt{1-\frac{r^2}{ab}}.$$

Elle touchera ces arêtes, et forcément aussi en leurs milieux, si l'on a

$$p^2=bc,\quad q^2=ca,\quad r^2=ab.$$

Donc la surface du second degré

$$\text{(XVII)}\qquad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1\right)^2=\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}+\frac{xy}{ab}$$

touche en leurs milieux les six arêtes du tétraèdre $OABC$, dont les arêtes latérales OA, OB, OC, issues de l'origine, et dirigées suivant les axes des coordonnées sont respectivement $2a$, $2b$, $2c$; de plus la surface a son centre situé au centre de gravité du tétraèdre.

10. **Equation du cône issue du point $P(x_1, y_1, z_1, u_1)$, qui est circonscrit à la surface du second degré (10).** Designons par x, y, z, u les coordonnées homogènes d'un point quelconque M d'une génératrice du cône et par x', y', z', u' celles du point de contact C de cette génératrice avec la surface (10). Nous avons évidemment

$$\text{(17)}\qquad x'=\frac{x+\lambda x_1}{1+\lambda},\quad y'=\frac{y+\lambda y_1}{1+\lambda},\quad z'=\frac{z+\lambda z_1}{1+\lambda},\quad u'=\frac{u+\lambda u_1}{1+\lambda},$$

où l'indéterminée λ dépend de la position du point M sur la génératrice PC.

Le point de contact C appartenant à la surface (10), nous avons

$$0 = f(x', y', z', u') = f\left(\frac{x+\lambda x_1}{1+\lambda}, \frac{y+\lambda y_1}{1+\lambda}, \frac{z+\lambda z_1}{1+\lambda}, \frac{u+\lambda u_1}{1+\lambda}\right)$$
$$= \frac{1}{(1+\lambda)^2} f(x+\lambda x_1, y+\lambda y_1, z+\lambda z_1, u+\lambda u_1).$$

Développant le second membre, on obtient, pour déterminer λ, l'équation

$$\lambda^2 f(x_1, y_1, z_1, u_1) + \lambda(x f_{x_1}' + y f_{y_1}' + z f_{z_1}' + u f_{u_1}') + f(x, y, z, u) = 0.$$

Les deux racines de cette équation devant être égales, on trouve

$$\text{(XVIII)} \quad (x f_{x_1}' + y f_{y_1}' + z f_{z_1}' + u f_{u_1}')^2 - 4 f(x, y, z, u) f(x_1, y_1, z_1, u_1) = 0$$

pour l'équation du cône demandé.

11. Equation du cône circonscrit à la surface du second degré (10) et qui touche cette surface suivant son intersection avec le plan

$$\text{(18)} \qquad px + qy + rz + su = 0.$$

Soient x_1, y_1, z_1, u_1 les coordonnées du sommet P du cône; le plan polaire du point P sera

$$x f_{x_1} + y f_{y_1} + z f_{z_1} + u f_{u_1} = 0.$$

Ce plan sera identique avec (10), si l'on a

$$\text{(19)} \qquad f_{x_1} = 2p\lambda, \quad f_{y_1} = 2q\lambda, \quad f_{z_1} = 2r\lambda, \quad f_{u_1} = 2s\lambda.$$

Multiplions ces quatre équations par les coordonnées respectives x_1, y_1, z_1, u_1 et ajoutons; nous obtenons l'égalité

$$x_1 f_{x_1} + y_1 f_{y_1} + z_1 f_{z_1} + u_1 f_{u_1} \text{ ou } 2f(x, y_1, z_1, u_1) = 2\lambda(px_1 + qy_1 + rz_1 + su_1),$$

qui, jointe aux équations (19), fournit le système des cinq équations

$$\begin{aligned}
-f(x_1, y_1, z_1, u_1) + \lambda p x_1 + \lambda q y_1 + \lambda r z_1 + \lambda s u_1 &= 0,\\
-\lambda p + A x_1 + B'' y + B' z + C u_1 &= 0,\\
-\lambda q + B'' x_1 + A' y_1 + B z_1 + C' u_1 &= 0,\\
-\lambda r + B' x_1 + B y_1 + A'' z_1 + C'' u_1 &= 0,\\
-\lambda s + C x_1 + C' y_1 + C'' z_1 + D u_1 &= 0
\end{aligned}$$

entre les quatre inconnues x_1, y_1, z_1, u_1 au premier degré. Eliminant ces inconnues, on trouve la relation

$$\begin{vmatrix} f(x_1,y_1,z_1,u_1) & \lambda p & \lambda q & \lambda r & \lambda s \\ \lambda p & A & B'' & B' & C \\ \lambda q & B'' & A' & B & C' \\ \lambda r & B' & B & A'' & C'' \\ \lambda s & C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0,$$

qui donne

$$(20) \qquad f(x_1,y_1,z_1,u_1) = -\frac{\lambda^2}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & p & q & r & s \\ p & A & B'' & B' & C \\ q & B'' & A' & B & C' \\ r & B' & B & A'' & C'' \\ s & C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

Des relations (19) on tire aussi

$$(21) \qquad x f_{x_1}' + y f_{y_1}' + z f_{z_1}' + u f_{u_1}' = 2\lambda(px + qy + rz + su).$$

Il suffira maintenant de substituer les valeurs (20) et (21) dans l'équation (XVIII), pour avoir l'équation demandé du cône, dont le sommet est le pôle du plan (18). Cette équation est

(XIX)

III.

Application des Déterminants aux surfaces de révolution, et, en particulier, à celles du second degré.

Par

Georges Dostor.

---

1. **Condition pour qu'une surface**

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

soit de révolution. Soient x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la surface donnée (1); la normale en ce point a pour équations

$$\frac{x - x'}{f_{x'}} = \frac{y - y'}{f_{y'}} = \frac{z - z'}{f_{z'}} = u. \tag{2}$$

La surface (1) sera évidemment de révolution autour de la droite

$$\frac{x - p}{a} = \frac{y - q}{b} = \frac{z - r}{c} = v, \tag{3}$$

si cette droite est rencontrée par la normale (2), quel que soit le point (x', y', z') de la surface. Pour cela, il faut et il suffit que les équations (2) et (3) admettent un même système de valeurs pour les inconnues x, y, z.

Ces équations, au nombre de **six**, contiennent les **cinq** inconnues x, y, z, u et v au premier degré. Si donc on élimine ces cinq inconnues entre les six équations (2) et (3), on obtiendra une relation entre les paramètres des l'équations (1), (2) et (3); cette relation exprimera la condition demandée.

Les équations (2) et (3) pouvant s'écrire

$$x - uf_{x'}' - x' = 0, \quad y - uf_{y'}' - y' = 0, \quad z - uf_{z'}' - z' = 0,$$
$$av - x + p = 0, \quad bv - y + q = 0, \quad cv - z + r = 0,$$

on éliminera x, y et z, en ajoutant verticalement, ce qui fournit les trois équations

$$av - uf_{x'}' - x' + p = 0,$$
$$bv - uf_{y'}' - y' + q = 0,$$
$$cv - uf_{z'}' - z' + r = 0$$

entre les deux inconnues u et v.

Pour que ces trois équations du premier degré soient compatibles, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul. On obtient ainsi la relation

$$\begin{vmatrix} a & -f_{x'}' & -x'+p \\ b & -f_{y'}' & -y'+q \\ c & -f_{z'}' & -z'+r \end{vmatrix} = 0,$$

dans laquelle nous pouvons changer les signes [illegible] dans les deux dernières colonnes, ce qui [illegible] cherchée



ı α, α', α'' sont trois constantes indéterminées, et v une inconnue.

Substituons dans ces équations, à la place de x, y, z, leurs valeurs

$$x = x' + uf_{x'}', \quad y = y' + uf_{y'}', \quad z = z' + uf_{z'}'$$

rées des équations de la normale (2); la première devient

$$\begin{aligned} av &= A(x' + uf_{x'}') + B''(y' + uf_{y'}') + B'(z' + uf_{z'}') + C \\ &= Ax' + B''y' + B'z' + C + u(Af_{x'}' + B''f_{y'}' + B'f_{z'}'). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi les trois équations

$$\begin{aligned} \alpha v - f_{x'}' - u(Af_{x'}' + B''f_{y'}' + B'f_{z'}') &= 0, \\ \alpha' v - f_{y'}' - u(B''f_{x'}' + A'f_{y'}' + Bf_{z'}') &= 0, \\ \alpha'' v - f_{z'}' - u(B'f_{x'}' + Bf_{y'}' + A''f_{z'}') &= 0 \end{aligned}$$

ntre les deux inconnues $-v$ et $-u$. Eliminant ces inconnues, on ouve la relation de condition

$$\text{I)} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & f_{x'}' & Af_{x'}' + B''f_{y'}' + B'f_{z'}' \\ \alpha' & f_{y'}' & B''f_{y'}' + A'f_{y'}' + Bf_{z'}' \\ \alpha'' & f_{z'}' & B'f_{x'}' + Bf_{y'}' + A''f_{z'}' \end{vmatrix} = 0,$$

ui devient, après multiplication des trois lignes par les coefficients spectifs B, B' et B'' que nous supposons tous différents e zéro,

$$\text{5)} \qquad \begin{vmatrix} B\alpha & Bf_{x'}' & ABf_{x'}' + B''Bf_{y'}' + BB'f_{z'}' \\ B'\alpha' & B'f_{y'}' & B'B''f_{x'}' + A'B'f_{y'}' + BB'f_{z'}' \\ B''\alpha'' & B''f_{z'}' & B'B''f_{x'}' + B''Bf_{y'}' + A''B''f_{z'}' \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre ici doit être identiquement nul, quelles que soient les valeurs des coordonnées x', y', z' satisfaisant à l'équation (4) de la surface; or les éléments de la première colonne sont constants et différents de zéro, tandisque ceux des deux dernières colonnes varient avec la position du point (x', y', z') sur la surface; il faudra donc que les éléments de la seconde colonne, multipliés par un certain facteur constant s, soient égaux à ceux de la troisième colonne, quelles que soient x', y' et z', soumises d'ailleurs à la condition (4).

La première égalité qui en résulte

$$sBf_{x'}' = ABf_{x'}' + BB''f_{y'}' + BB'f_{z'}' = ABf_{x'}' - B'B''f_{x'}' + B'B''f_{x'}' + BB''f_{y'}' + BB'_{z'}$$

onne

$$\left(s-A+\frac{B'B''}{B}\right)Bf_{x'}'=B'B''f_{x'}'+B''Bf_{y'}'+BB'f_{z'}'$$

On trouverait de même que

$$\left(s-A'+\frac{B''B}{B'}\right)Bf_{y'}'=B'B''f_{x'}'+B''Bf_{y'}'+BB'f_{z'}',$$

$$\left(s-A''+\frac{BB'}{B''}\right)B''f_{z'}'=B'B''f_{x'}'+B''Bf_{y'}'+BB'f_{z'}'.$$

On en déduit

$$\left(s-A+\frac{B'B''}{B}\right)Bf_{x'}'=\left(s-A'+\frac{B''B}{B'}\right)B'f_{y'}'=\left(s-A''+\frac{BB'}{B''}\right)B''f_{z'}'.$$

Or, dans ces trois produits, les facteurs $Bf_{x'}'$, $B'f_{y'}'$ et $B''f_{z'}'$ sont variables; car leurs valeurs changent avec la positions du point (x', y', z') sur la surface (4); par suite, pour que ces égalités puissent subsister, il faut et il suffit que l'on ait

$$s-A+\frac{B'B''}{B}=s-A'+\frac{B''B}{B'}=s-A''+\frac{BB'}{B''}=0.$$

On en déduit les relations de condition connues

$$\text{(III)}\qquad s=A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{B''B}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}.$$

3. **Equations de l'axe de révolution.** Nous les obtiendrons au moyen des égalités (5), en y substituant les valeurs propres de α, α' et α'', que nous allons calculer.

Dans le déterminant (6) retranchons de la dernière colonne la produit de la seconde colonne par les valeurs respectives (III) de s; ce déterminant deviendra

$$\begin{vmatrix} B\alpha & Bf_{x'}' & B'B''f_{x'}'+B''Bf_{y'}'+BB'f_{z'}' \\ B'\alpha' & B'f_{y'}' & B'B''f_{x'}'+B''Bf_{y'}'+BB'f_{z'}' \\ B''\alpha'' & B''f_{z'}' & B'B''f_{x'}'+B''Bf_{y'}'+BB'f_{z'}' \end{vmatrix}=0,$$

ou, en divisant la dernière colonne par $B'Bf_{x'}'+B''Bf_{y'}'+BB'f_{z'}'$,

$$\begin{vmatrix} B\alpha & Bf_{x'}' & 1 \\ B'\alpha' & B'f_{y'}' & 1 \\ B''\alpha'' & B''f_{z'}' & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Pour que cette égalité puisse avoir lieu, il faut et il suffit que les colonnes à éléments constants ne diffèrent que par un facteur constant k; on a donc

$$B\alpha = B'\alpha' = B''\alpha'' = k,$$

d'où on tire

$$\alpha = \frac{k}{B}, \quad \alpha' = \frac{k}{B'}, \quad \alpha'' = \frac{k}{B''}.$$

La substitution de ces valeurs dans les équations (5) donne immédiatement

$$\text{(7)} \quad B(Ax + B''y + B'z + C) = B'(B''x + A'y + Bz + C') \\ = B''(B'x + By + A''z + C''),$$

ou

$$\text{(IV)} \qquad Bf_x' = B'f_y' = B''f_z'$$

pour les équations de l'axe de révolution.

4. Forme développée des équations de l'axe de révolution. Dans les égalités (7) remplaçons A, A' et A'' par leurs valeurs tirées de (III); le premier produit devient

$$Bsx + B'B''x + B''By + BB'z + C = B(sx + C) + B'B''x + B''By + BB'z.$$

Les deux autres produits deviendront de même

$$B'(sy + C') + B'B''x + B''By + BB'z,$$
$$B''(sz + C'') + B'B''x + B''By + BB'z;$$

de sorte que les équations de l'axe peuvent aussi s'écrire

$$\text{(V)} \qquad B(sx + C) = B'(sy + C') = B''(sz + C'').$$

5. Equation du plan équatorial. Les cosinus des angles d'inclinaison, de l'axe de révolution sur les axes de coordonnées étant proportionnels à $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{B'}$ et $\frac{1}{B''}$, le plan de l'équateur aura pour équation

$$\text{(VI)} \qquad \frac{f_x'}{B} + \frac{f_y'}{B'} + \frac{f_z'}{B''} = 0,$$

ou, en développant et ordonnant par rapport à x, y, z,

$$\text{(8)} \quad \frac{x}{B}\left(A + \frac{BB'}{B''} + \frac{BB''}{B'}\right) + \frac{y}{B'}\left(A' + \frac{B'B}{B''} + \frac{B'B''}{B}\right) \\ + \frac{z}{B''}\left(A'' + \frac{B''B'}{B} + \frac{B''B}{B'}\right) + \frac{C}{B} + \frac{C'}{B'} + \frac{C''}{B''} = 0.$$

Or, si nous posons

$$S + 2s = A + A' + A''$$

et que nous observions que

$$2s = A' + A'' - \frac{BB'}{B''} - \frac{BB''}{B'},$$

nous aurons les relations

$$\text{(VII)} \quad S = A + \frac{BB'}{B''} + \frac{BB''}{B'} = A' + \frac{B'B''}{B} + \frac{B'B}{B''}$$
$$= A'' + \frac{B''B}{B'} + \frac{B''B'}{B},$$

qui expriment sous une autre forme les conditions de révolution de la surface (4).

Ces valeurs changent l'équation (8) en la suivante

$$\text{(IX)} \qquad S\left(\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''}\right) + \left(\frac{C}{B} + \frac{C'}{B'} + \frac{C''}{B''}\right) = 0,$$

qu'on peut encore mettre sous la forme

$$\frac{Sx + C}{B} + \frac{Sy + C'}{B'} + \frac{Sz + C''}{B''} = 0;$$

celle-ci présente une certaine analogie avec les équations (V) de l'axe de révolution.

IV.

Rationale ebene Curven dritter Ordnung.

Fortsetzung von N. XII. im 56. Teile.

Von

K. Zahradnik.

Bevor wir uns zur Theorie der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte wenden, wollen wir zeigen, wie sich die zum II. Abschnitte reciproken Sätze über C_3^3 direct ableiten können.

Einer rationalen Curve dritter Ordnung mit einem Rückkehrpunkte als Coordinatenanfang in Punktcoordinaten entspricht eine rationale Curve dritter Classe in Liniencoordinaten mit einer unendlich fernen Wendetangente. Bezeichnen wir mit ξ, η die Liniencoordinaten einer Tangente der C_3^3, so ist ihre Gleichung

$$a\xi^3+b\xi^2\eta+c\xi\eta^2+d\eta^3 = e\eta^2 \tag{1}$$

Aus einem jeden Punkte der Wendetangente lässt sich bloss eine Tangente zur C_3^3 legen (ausser die Rückkehrtangente) und die Coordinaten derselben ergeben sich folgendermassen: Bezeichnet u, so ist

$$\xi = u\eta \tag{2}$$

die eines Punktes in der Rückkehrtangente. Führen wir den Wert für ξ in die Gl. (1) ein, so erhalten wir nach Unterdrückung des von der Wendetangente herrührenden Factors η^2, für die Coordinaten der Tangente mit Rücksicht auf Gl. (2)

$$\eta = \frac{e}{au^3+bu^2+cu+d} \tag{3}$$

$$\xi = \frac{eu}{au^3+bu^2+cu+d} \tag{4}$$

Die Grösse u ist der Parameter der entsprechenden Tangente der C_3^3, und wir sehen so, dass sich die Punktreihe (2), deren Träger die Wendetangente ist und die Tangenten der Curve dritter Classe eindeutig entsprechen.

2. Die Parameter der vom Punkte

$$m\xi + n\eta + 1 = 0$$

zur C_3^3 gelegten Tangenten erhalten wir, wenn wir die Werte für ξ und η aus den Gl. (3), (4) in die Gleichung des Punktes einführen als Wurzeln nachstehender cubischen Gleichung

$$au^3 + bu^2 + (c + me)u + (d + ne) = 0. \tag{5}$$

Bezeichnet $(u)_1$ die Summe der Wurzeln u_1, u_2, u_3, so folgt aus der Gl. (5)

$$(u)_1 = -\frac{b}{a} \tag{6}$$

Da in dieser Gleichung sich weder m noch n vorfindet, so ist dieselbe unabhängig von der Lage des Punktes und drückt uns demnach die Bedingung aus, unter welcher drei Tangenten der C_3^3 durch einen Punkt hindurchgehen. Mittelst entsprechender Transformation*) können wir die Gleichung der C_3^3 zurückführen auf die Form

$$a\xi^3 + b\xi\eta^2 + c\eta^3 = d\eta^2 \tag{7}$$

und die Gl. (3), (4), (6) gehen dann über in nachstehende:

$$\eta = \frac{d}{au^3 + bu + c} \tag{9}$$

$$\xi = \frac{du}{au^3 + bu + c} \tag{10}$$

$$(u)_1 = 0 \tag{11}$$

Ist die Summe der Parameter dreier Tangenten einer C_3^3 gleich Null, so schneiden sich dieselben in einem Punkte.

Die Parameter der unendlich fernen Tangenten ergeben sich nach (9), (10) aus der Gleichung

$$au^3 + bu + c = 0$$

d. i. Die unendlich fernen Tangenten einer C_3^3 schneiden sich in einem Punkte.

---

*) Vergleiche pag. 136 des 56. Teiles.

Wenn $u_2 = u_3 = u$ ist, so liegt der Punkt auf der Curve und die Gl. (11) geht über in

$$2u + u' = 0, \tag{12}$$

wo u der Parameter der Tangente eines Curvenpunktes und u' der Parameter der diesem Punkte zugeordneten weiteren Tangente ist.

3. Gegeben seien zwei Punkte p und p'.

Durch den ersten gehen zur $C_3{}^3$ die Tangenten U_1, U_2, U_3, durch den zweiten U_1', U_2', U_3', und nach Gl. (11) ist

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= 0 \\ u_1' + u_2' + u_3' &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Ziehen wir aus dem Schnittpunkte der Tangente U_i mit der Tangente U_i' $(i = 1, 2, 3)$ die weitere Tangente U_i'' zur $C_3{}^3$, so schneiden sich dieselben in einem Punkte p''.

Denn die Parameter der U_i'' sind u_i'', und so bestehen demnach nachstehende Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1 + u_1' + u_1'' &= 0 \\ u_2 + u_2' + u_2'' &= 0 \\ u_3 + u_3' + u_3'' &= 0. \end{aligned}$$

Addiren wir diese Gleichungen, so erhalten wir mit Rücksicht auf Gl. (13)

$$u_1'' + u_2'' + u_3'' = 0,$$

als den verlangten Beweis.

Rücken die Punkte p und p' unendlich nahe, so sind dann $\overline{U_i U_i'}$ Berührungspunkte, und U_i'' die dem Punkte $\overline{U_i U_i'}$ zugeordnete Tangente und so ergibt sich der Satz:

Zieht man aus den Berührungspunkten der aus einem Punkt p zur $C_3{}^3$ gelegten Tangenten die denselben zugeordneten Tangenten, so schneiden sich dieselben in einem Punkte.

So ergibt sich, analog der Untersuchung in Punktcoordinaten (I, 6), als Bedingungsgleichung, dass sechs Tangenten der $C_3{}^3$ einem und demselben Kegelschnitt angehören:

$$(u)_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 0.$$

Aus dieser Relation folgt:

Schneiden wir C_3^3 mit C_2, so bilden die gemeinschaftlichen Tangenten ein Sechsseit. Die sechs Tangenten aus den Ecken desselben zu C_3^3 gehören wieder einem Kegelschnitte an.

Die Tangenten aus den Durchschnittspunkten der Gegenseiten zu C_3^3 gehen durch einen Punkt.

Durchschnittspunkt zweier Tangenten, Berührungspunkt.

4. Die Gleichung des Durchschnittspunktes zweier Tangenten $U_1(\xi_1 \eta_1)$, $U_2(\xi_2 \eta_2)$ ist

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi & \eta \\ 1 & \xi_1 & \eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Führen wir in diese Gleichung für ξ_i, η_i die Worte aus (9), (10) ein, so erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi & \eta \\ 1 & \dfrac{du_1}{c+bu_1+au_1^3} & \dfrac{d}{c+bu_1+au_1^3} \\ 1 & \dfrac{du_2}{c+bu_2+au_2^3} & \dfrac{d}{c+bu_2+au_2^3} \end{vmatrix} = 0$$

oder nach bekannter Umformung

$$\begin{vmatrix} d & \xi & \eta \\ c+bu_1+au_1^3 & u_1 & 1 \\ b+a(u_1^2+u_1u_2+u_2^2) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$\eta[c-au_1u_2(u_1+u_2)]+\xi[b+a(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)] = d \qquad (14)$$

Für $u = u_1 = u_2$ erhalten wir die Gleichung des Durchschnittes zweier unendlich nahen Tangenten, nämlich den Berührungspunkt der Tangente U und zwar

$$\eta(c-2au^3)+\xi(b+3au^2) = d \qquad (15)$$

Diese Gleichung gibt uns die Relation an zwischen der Tangente und irgend einer durch den Berührungspunkt gehenden Geraden. Sind ξ, η Coordinaten einer bestimmten Geraden, so erhalten wir die Parameter der Tangenten in den Durchschnittspunkten der Geraden

mit C_3^3 wenn wir die Gleichung (15) nach u auflösen; und da dieselbe in Bezug auf u vom dritten Grade ist, so sehen wir, dass eine Curve dritter Classe mit einer Wendetangente dritter Ordnung ist.

Strahleninvolution auf C_3^3.

5. Die Durchführung ist identisch mit der, die wir bei der Punktinvolution gegeben haben *), weshalb wir auf den I. Abschnitt verweisen. Die Gleichung der Strahleninvolution der Punktreihe ξ, η ist

$$\eta(c+au_1u_2u_3)+\xi[b-(u_1u_2+u_2u_3+u_3u_1)]=d$$

oder in Normalform

$$a\eta u^3+b\xi+c\eta-d+a\lambda(u\eta-\xi)=0.$$

Die Doppelstrahlen der Involution bestimmt die Gleichung

$$-2a\eta u^3+3au^2\xi+b\xi+c\eta-d=0$$

und vergleichen wir dieselbe mit Gl. (15), so erkennen wir dieselben als Tangenten in den Durchschnittspunkten der Geraden ξ, η mit C_3^3.

6. Ebenso können wir in Bezug auf §. 9 des I. Abschnittes **) nachstehenden Satz bloss erwähnen. Jede Tangente können wir doppelt auffassen als eine dem Parameter u entsprechende oder als eine dieser zugeordnete. Im ersten Falle entspricht ihr U_1, im zweiten Falle U_2. Diese Tangenten schneiden sich im Punkte $m=\overline{U_1U_2}$, und der Ort dieser Schnittpunkte $\overline{U_1U_2}$, wenn die Tangente U die C_3^3 beschreibt, ist wieder eine Curve dritter Ordnung und dritter Classe, welche mit der gegebenen C_3^3 eine gemeinschaftliche Wendetangente hat. Ihre Gleichung ist

$$34 \cdot 3a\xi^3+b\xi\eta^2+c\eta^3=d\eta^2.$$

IV.

Die Gleichung einer rationalen Curve dritter Ordnung, wenn man ihren Doppelpunkt zum Coordinatenanfang und die Doppelpunktstangenten zu Coordinatenaxen wählt, ist von der Form

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=hxy \tag{1}$$

---

*) pag. 142 T. 56.

**) pag. 143 T. 56.

Die Gleichung eines durch den Doppelpunkt gehenden Strahles Q ist

$$Q \equiv y - ux = 0. \tag{2}$$

Derselbe schneidet die Curve in einem Punkte, dessen Coordinaten sich als gebrochene rationale Functionen*) des Parameters u eindeutig bestimmen lassen und zwar

$$\begin{aligned} x &= \frac{hu}{a + bu + cu^2 + du^3} \\ y &= \frac{hu^2}{a + bu + cu^2 + du^3} \end{aligned} \tag{3}$$

2. Die Parameter der Durchschnittspunkte einer Geraden mit der Curve erhalten wir, indem wir die Werte für x und y aus den Gleichungen (3) in die Gleichung der Geraden

$$mx + ny + 1 = 0$$

einführen, als Wurzeln nachstehender cubischen Gleichung

$$du^3 + (c + nh)u^2 + (b + mh)u + a = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt die bekannte Relation zwischen den Parametern**) der Durchschnittspunkte

$$u_1 u_2 u_3 = -\frac{a}{d} \tag{4}$$

Das Product der Parameter irgend dreier auf einer Geraden liegenden Punkte einer C_4^3 ist eine constante Grösse.

Nehmen wir statt der Geraden eine C^n, so erhalten wir den früher schon erwähnten Weyr'schen Satz:

„Das Product der $3n$ Schnittpunkte einer beliebigen C^n mit einer rationalen Curve dritter Ordnung ist eine constante Grösse, nämlich $\left(-\frac{a}{d}\right)^n$."

Aus diesem Satze ergibt sich mit Leichtigkeit eine grosse An-

---

*) Sind T_1, T_2 die Doppelpunktstangenten, so ist der Wert von

$$u = \frac{\sin(T_1 Q)}{\sin(T_2 Q)}.$$

**) Dr. Em. Weyr: Sitzungsbericht d. k. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. vom 27. April 1870. Prag.

zahl von Sätzen über rationale Curven dritter Ordnung, welche H. Dr. Em. Weyr in seinen Abhandlungen vom Jahre 1870—1873 in den Sitzungsberichten der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag und der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien, so wie in Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik und Physik entwickelt hat.

In nachstehenden Zeilen entwickele ich einige weitere Eigenschaften der C_4^3 vermittelst des rationalen Parameters, und als specielle Fälle wähle die bekannten rationalen Curven dritter Ordnung wie das Descartes'sche Blatt, Strophoide etc.

Secante, Tangente.

3. Die Gleichung der Secante als einer Verbindungslinie zweier Punkte u_1, u_2 der Curve ist

$$\begin{vmatrix} h & x & y \\ a+bu_1+cu_1^2+du_1^3 & u_1 & u_1^2 \\ a+bu_2+cu_2^2+du_2^3 & u_2 & u_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe geht nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Factors (u_1-u_2) über in:

$$\begin{vmatrix} h & x & y \\ a+bu_1+cu_1^2+du_1^3 & u_1 & u_1^2 \\ b+c(u_1+u_2)+d(u_1^2+u_1u_2+u_2^2) & 1 & u_1+u_2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt

$$x[du_1^2u_2^2-bu_1u_2-a(u_1+u_2)]+y[a-cu_1u_2-d(u_1+u_2)u_1u_2]+hu_1u_2=0. \tag{5}$$

Für $u_1=u_2=u$ geht die Gleichung der Secante in die der Tangente über und wir erhalten in diesem Falle

$$x(du^4-bu^2-2au)+y(a-cu^2-2du^3)+hu^2=0. \tag{6}$$

Diese Gleichung löst uns auch das Problem von einem Punkte in der Ebene der rationalen Curve dritter Ordnung an dieselben Tangenten zu legen. In diesem Falle sind x, y Coordinaten eines festen Punktes und die Parameter der Berührungspunkte ergeben sich als Wurzeln der Gl. (6). Diese ist in Bezug auf u vom vierten Grade; es lassen sich demnach von einem Punkte in der Ebene der Curve an dieselbe vier Tangenten legen, somit ist sie vierter Classe.

Jede durch den Punkt (x, y) gehende Gerade schneidet die Curve

in drei Punkten u_1, u_2, u_3 und es wird im folgenden von Nutzen sein in die Gleichung der Secante die Parameter aller dreier Punkte einzuführen. Es ist klar, dass

$$\overline{u_1 u_2} \equiv \overline{u_2 u_3} \equiv \overline{u_3 u_1} \equiv S.$$

Wir erhalten demnach durch cyklische Vertauschung der Indices aus der Gleichung (5) zwei neue Gleichungen für dieselbe Secante. Es bestehen für S demnach gleichzeitig nachstehende drei Gleichungen:

$$S \equiv x[du_1^2 u_2^2 - bu_1 u_2 - a(u_1 + u_2)] + y[a - cu_1 u_2 - d(u_1 + u_2) u_1 u_2] + hu_1 u_2 = 0$$

$$S \equiv x[du_2^2 u_3^2 - bu_2 u_3 - a(u_2 + u_3)] + y[a - cu_2 u_3 - d(u_2 + u_3) u_2 u_3] + hu_2 u_3 = 0$$

$$S \equiv x[du_3^2 u_1^2 - bu_3 u_1 - a(u_3 + u_1)] + y[a - cu_3 u_1 - d(u_3 + u_1) u_3 u_1] + hu_3 u_1 = 0$$

Addiren wir diese drei Gleichungen und bezeichnen mit $(u)_1$ die Summe der drei Parameter, mit $(u)_2$ die Summe der Amben, so erhalten wir nach kurzer Umformung mit Rücksicht auf die Gl. (4):

$$S \equiv x[b - d(u)_2] + y[c + d(u)_1] - h = 0 \qquad (7)$$

als die verlangte Form der Gleichung der Secante.

Conjugirte Punkte, quadratische Involutionen auf C_4^3.

4. Setzen wir in der Gl. (4) $u_2 = u_3 = u'$ und $u_1 = u$, so erhalten wir eine Relation zwischen dem Berührungspunkte und dem entsprechenden Tangentialpunkte. Dieselbe lautet

$$uu'^2 = -\frac{a}{d} \qquad (8)$$

Jedem Punkte u als Tangentialpunkt aufgefasst, entsprechen zwei Berührungspunkte, deren Parameter sich aus (8) ergeben und zwar

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= +\sqrt{-\frac{a}{du}} \\ u_2' &= -\sqrt{-\frac{a}{du}} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Solche zwei Punkte nennen wir **conjugirte Punkte***). Zwei

---

*) Dr. Em. Weyr: Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde. Teubner, Leipzig 1869, pag. 91. Hesse nennt solche zwei Punkte conjugirte Pole. Crelle, 36. Band.

conjugirte Punkte haben demnach einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt und zwischen ihren Parametern besteht nach (9) die Relation

$$u_1' + u_2' = 0 \tag{10}$$

Bezeichnen wir eine Gerade, welche den Punkt u_i mit dem Doppelpunkte verbindet, mit U_i, so können wir die Gleichung (10) mit Rücksicht auf die geometrische Bedeutung des Parameters schreiben

$$(T_1 T_2 U_1' U_2') = -1 \tag{11}$$

und wir erhalten so den Satz *):

„Die Paare conjugirter Punkte bilden auf C_4^3 eine quadratische Punktinvolution, deren Doppelpunkte die Berührungspunkte der Doppelpunkttangenten mit der Curve sind."

„Die Paare conjugirter Punkte auf C_4^3 projiciren sich aus dem Doppelpunkte in einer quadratischen Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen die Doppelpunktstangenten sind."

Die Gerade $\overline{u_1' u_2'}$ schneidet die C_4^3 noch in einem Punkte u_3'. Nach Gl. (4) haben wir

$$u_1' u_2' u_3' = -\frac{a}{d} \tag{12}$$

und aus Gl. (9) folgt

$$u_1' u_2' = \frac{a}{du}.$$

Führen wir den Wert für $u_1' u_2'$ in die Gleichung (12) ein, so erhalten wir

$$u_3' + u = 0 \tag{13}$$

oder in anderer Form

$$(T_1 T_2 U_3' U) = -1.$$

„Verbindet man zwei conjugirte Punkte, die dem Tangentialpunkte u entsprechen, so schneidet ihre Verbindungslinie die C_4^3 noch in einem Punkte u_3', der dem Punkte u harmonisch zugeordnet ist."

Die Punktepaare $u u_3'$ projiciren sich aus dem Doppelpunkte in einer quadratischen Strahleninvolution, deren Doppelpunktsstrahlen die Doppelpunktstangenten sind.

---

*) Dr. Em. Weyr, nebst l. c. noch Schlömilch's „Zeitschrift für Math. und Physik 1870. pag. 346.

Diese quadratischen Punkt- und Strahleninvolutionen sind mit der früher erwähnten identisch, da sie dieselben Doppelpunktselemente besitzen.

5. Betrachten wir einen Punkt u der C_4^3 als Scheitel eines Strahlenbüschels, so bestimmt derselbe auf C_4^3 eine centrale Punktinvolution; denn ein beliebiger Strahl U_1 schneidet die C_4^3 ausser in u noch in zwei Punkten u_1', u_1'' und nach (4) besteht zwischen ihren Parametern nachstehende Relation:

$$uu_1'u_1'' = -\frac{a}{d} \tag{14}$$

wo u der Voraussetzung gemäss constant ist. Die Projectivität der Punktsysteme u_1' und u_1'' auf C_4^3 erhellt aus dem eindeutigen Entsprechen der Punkte u_1' und u_1'', und aus deren Vertauschfähigkeit folgt ihre involutorische Beziehung.

Die Doppelpunkte der centralen Punktinvolution ergeben sich aus der Gleichung (13), wenn wir in derselben $u_1' = u_1'' = u_1$ setzen; wir erhalten so

$$uu_1^2 = -\frac{a}{d}.$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit der Gleichung (8), so folgt:

„Die Doppelpunkte einer centralen Punktinvolution erhalten wir als Berührungspunkte der vom Centrum u an C_4^3 gelegten Tangenten; sie sind die dem Centrum u conjugirten Punkte.“

Umgekehrt haben wir den Satz:

„Zwei conjugirte Punkte bestimmen auf C_4^3 eine centrale Punktinvolution, deren Centrum der ihnen gemeinschaftliche Tangentialpunkt ist.“

Involutionskegelschnitt.

6. Die Verbindungslinien conjugirter Punktepaare hüllen einen Kegelschnitt ein, den wir nach Herrn Dr. Em. Weyr*) den Involutionskegelschnitt benennen wollen.

Die Gleichung der Verbindungslinie eines conjugirten Punktepaares erhalten wir, wenn wir für u_1' und u_2' die Werte aus Gl. (9)

*) Theorie der mehrdeutigen Elementargebilde, pag. 103.

in die Gleichung der Secante (5) einführen. Wir erhalten so dieselbe als eine Function der Parameter u, nämlich:

$$y(du^2-cu)+x(a-bu)+hu=0 \tag{15}$$

Aus der Derivirten dieser Gleichung nach u ergiebt sich

$$u=\frac{bx+cy-h}{2dy}$$

oder

$$u=\frac{A}{2dy} \tag{16}$$

wenn wir

$$A\equiv bx+cy-h$$

setzen. Führen wir diesen Wert für u in die Gl. (15) ein, so erhalten wir als die gesuchte Gleichung der Enveloppe

$$A^2-4adxy=0 \tag{17}$$

Wir sehen demnach, dass die Enveloppe ein Kegelschnitt ist, der die Doppelpunktstangenten berührt und dessen Berührungssehne $A=0$ ist. Es ist also $A=0$ die Polare des Anfangspunktes in Bezug auf den Kegelschnitt. Derselbe ist eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem

$$4ad(bc+ad)\gtreqless 0.$$

Aus der Gleichung (13) erkannten wir, dass u_3' mit u ebenfalls ein conjugirtes Punktepaar bildet und dass es zu derselben Involution gehört. Es wird demnach die Verbindungslinie der Punktepaare u_3', u denselben Involutionskegelschnitt einhüllen müssen.

Da $u_3'=-u$ ist, so ist die Gleichung ihrer Verbindungslinie $\overline{u_3'u}$

$$x(du^4+bu^2)+y(a+cu^2)-hu^2=0$$

oder

$$dxu^4+u^2A+ay=0.$$

Die Derivirte nach u ist

$$2dxu^2+A=0.$$

Eliminiren wir aus diesen zwei Gleichungen u, so erhalten wir

$$A^2-4adxy=0$$

also wie früher (17), w. z. b. w.

Cubische Involution auf C_4^3.

7. Die Gleichung der Secante ist

$$x[b-d(u)_2]+y[c+d(u)_1]=h \tag{7}$$

Nehmen wir in dieser Gleichung x, y als Coordinaten eines festen Punktes an, so stellt uns (7) die Gleichung der durch das Strahlenbüschel (xy) auf C_4^3 bestimmten Punktinvolution dar. Jeder Strahl bestimmt auf C_4^3 ein Punkttripel $(u_1u_2u_3)$ einer cubischen Involution und die Parameter dieser Punkte erfüllen die Gleichung (7). Die Involution (Vertauschfähigkeit) folgt aus der Symmetrie der Gleichung (7).

Im Folgenden wollen wir die Gleichung dieser Punktinvolution in der Normalform aufstellen. Jeder Strahl des Strahlenbüschels (x, y) bestimmt auf C_4^3 drei Punkte, deren Parameter sich als Wurzeln einer cubischen Gleichung

$$u^3+\lambda u^2+\mu u+\nu=0 \tag{18}$$

darstellen lassen. Zwischen den Coefficienten dieser Gleichung bestehen zwei lineare Relationen, vermöge welcher wir zwei derselben eliminiren können. Die erste ist

$$\nu=\frac{a}{d}=-(u)_3 \tag{19}$$

und die zweite erhalten wir, wenn wir in die Gleichung (7) statt

$$(u)_1=-\lambda, \qquad (u)_2=\mu$$

setzen. Wir bekommen so die Gleichung

$$(b-d\mu)x+(c-d\lambda)y=h \tag{20}$$

Eliminiren wir nun aus diesen drei Gleichungen die Grössen μ, ν, so erhalten wir als die verlangte Gleichung der Involution in der Normalform

$$dxu^3+(bx+cy-h)u+ax+\lambda du(ux-y)=0 \tag{21}$$

Eine cubische Involution hat vier Doppelpunkte; wir finden dieselben, wenn wir die Discriminante der Gleichung (21) gleich Null setzen, somit

$$xdu^4-2ydu^3-(bx+cy-h)u^2-2axu+ay=0 \tag{22}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Parameter der Doppelpunkte der Involution. Die geometrische Bedeutung derselben erhellt aus der Vergleichung der Gl. (22) mit der Gl. (8).

Die Doppelpunkte der durch das Strahlenbüschel (xy) auf C_4^3 bestimmten Punktinvolution sind die Berührungspunkte der vom Punkte xy an C_4^3 gelegten Tangenten.

Normale und Evolute der C_4^3.

8. Die Gleichung der Tangente im Punkte u ist

$$x(du^4-bu^2-2au)+y(a-cu^2-2du^3)+hu^2=0 \qquad (6)$$

demnach ist die Gleichung der Normale*) im Punkte u, wenn $\theta=\cos(T_1T_2)$, nämlich cosinus des Winkels der Coordinatenaxen bedeutet,

$$(23)$$

$$N\equiv[y(a+bu+cu^2+du^3)-hu^2][(a-cu-2du^3)\theta+(du^4-bu^2-2au)]-$$
$$[x(a+bu+cu^2+du^3)-hu][(a-cu-2du^3)+\theta(du^4-bu^2-2au)]=0$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf u vom siebenten Grade und wir sehen somit, dass aus einem Punkte zur C_4^3 sieben Normalen gefällt werden können. Da nun die Anzahl der Normalen eines beliebigen Punktes zu einer Curve die Classe ihrer Evolute angibt, so sehen wir, dass die Evolute von C_4^3 siebenter Classe ist und die

---

*) Im vorigen Artikel gilt die dort entwickelte Gleichung der Normalen pag. 140 unter Voraussetzung rechtwinkligen Coordinatensystemes, da wir aber dort die Entwickelung der Sätze über C_2^3 allgemein für schiefwinkliges Coordinatensystem gegeben haben, so wolle der gütige Leser dies folgendermassen berichtigen.

„Sind die Richtungsconstanten der Tangente und der Normale beziehungsweise A, A' und θ cosinus des Winkels der Coordinatenaxen, so gilt bekanntlich die Relation

$$AA'+1=(A+A')\theta$$

Somit, da A aus der Gl. (22) bekannt ist, ergibt sich der Wert für A'

$$A'=\frac{c-2au^3+(b+3au^2)\theta}{(c-2au^3)\theta+(b+3au^2)}$$

und die Gleichung der Normalen

$$N\equiv-y[(b-3au^2)+\theta(c-2au^3)](au^3+bu+c)+$$
$$+x[(b-3au^2)\theta+(c-2au^3)](au^3+bu+c)+$$
$$+d[-b+cu-3au^2-2au^4+\theta(-c+bu+5au^3)]=0.$$

Entsprechend folgt der Wert für $N'=0$ pag. 143, aber wie man leicht einsieht ändert sich am Texte an beiden Stellen nichts. Für $\theta=0$ geht diese Formel in die früher angegebene über.

Gl. (23) ist somit auch die Gleichung der Tangente der Evolute von C_4^3. Die Derivirte von N gibt uns die Gleichung der benachbarten Normale N', welche die N im Centrum des dem Punkte u entsprechenden Krümmungskreises schneidet. Die Coordinaten desselben (x, y) ergeben sich aus den Gleichungen

$$N = 0$$

$$\frac{dN}{du} = N' = 0$$

als rationale gebrochene Functionen vom zwölften Grade in Bezug auf u. Demnach ist die Evolute der C_4^3 eine rationale Curve siebenter Classe und zwölfter Ordnung.

Im folgenden Artikel wollen wir uns zur Anwendung auf bekannte rationale Curven wenden, wo die Resultate durch ihre Einfachheit vielleicht genug Interesse darbieten werden.

V.

Zum Problem des dreifach orthogonalen Flächensystems.

Siebenter Artikel. Fortsetzung von N. XXV. d. vor. Bandes.

Von

R. Hoppe.

Zu den bereits aufgeführten Lösungen sind noch folgende hinzuzufügen.

Erstlich ist der Fall noch nicht in Anwendung gebracht, wo Gl. (279) homogen zwischen t und w ist, wo sie also lautet:

$$t\frac{\partial t}{\partial w} = 2t + (\varepsilon^2 - 1)w$$

unter ε eine Constante verstanden. Dies nach bekanntem Verfahren integrirt giebt:

$$\{t-(1+\varepsilon)w\}^{1+\frac{1}{\varepsilon}}\{t-(1-\varepsilon)w\}^{1-\frac{1}{\varepsilon}} = \text{const.} \qquad (280)$$

Demnach erhält man ein orthogonales Flächensystem, wenn man (271) verbindet mit

$$A = \{a-(1+\varepsilon)w\}^{1+\frac{1}{\varepsilon}}\{a-(1-\varepsilon)w\}^{1-\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$B = \{b-(1+\varepsilon)w\}^{1+\frac{1}{\varepsilon}}\{b-(1-\varepsilon)w\}^{1-\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$C = \{c-(1+\varepsilon)w\}^{1+\frac{1}{\varepsilon}}\{c-(1-\varepsilon)w\}^{1-\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$u = \{k-(1+\varepsilon)w\}^{1+\frac{1}{\varepsilon}}\{k-(1-\varepsilon)w\}^{1-\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$v = \{l-(1+\varepsilon)w\}^{1+\frac{1}{\varepsilon}}\{l-(1-\varepsilon)w\}^{1-\frac{1}{\varepsilon}}$$

Die Flächen sind algebraisch für jedes rationale ε. Transcendente Flächen erhält man für irrationale und für rein imaginäre ε. Der Wert $\varepsilon = \pm 1$ entspricht dem confocalen Flächensystem 2. Grades.

Ferner lässt sich eine unbegrenzte Anzahl von orthogonalen Flächensystemen der Form nach aufstellen, wenn gleich die von w allein abhängigen Coefficienten nur durch Differentialgleichungen bestimmt werden können. Multiplicirt man Gl. (279) mit

$$M\partial w = \sum_{k=0}^{k=n} w_k t^k \partial w$$

setzt zur Vereinfachung $Q' = -1$, und denkt die w_k als Functionen von w so bestimmt, dass

$$M(t\partial t + t\partial w - \partial R)$$

ein vollständiges Differential für die Unabhängigen t, w wird, so giebt zunächst die partielle Integration nach t für constantes w:

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{w_k t^{k+2}}{k+2} = W \text{ (Function von } w)$$

Bedingung des Multiplicators M ist dann, dass

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^{k+2}}{k+2} \frac{\partial w_k}{\partial w} - \frac{\partial W}{\partial w} = M\left(t - \frac{\partial R}{\partial w}\right)$$

für jedes t ist. Da der Grad der Linken um 1 höher ist als der der Rechten, so muss w_n constant sein und lässt sich $= 1$ setzen. Vergleicht man die Coefficienten der übrigen Potenzen von t, und bezeichnet der Accent die Differentiation nach w, so erhält man folgendes System von $n+2$ Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
W' &= w_0 R' \\
0 &= w_0 - w_1 R' \\
\tfrac{1}{2} w_0' &= w_1 - w_2 R' \\
\tfrac{1}{3} w_1' &= w_2 - w_3 R' \\
&\;\vdots \\
\frac{w_{n-3}'}{n-1} &= w_{n-2} - w_{n-1} R' \\
\frac{w_{n-2}'}{n} &= w_{n-1} - R' \\
\frac{w_{n-1}'}{n+1} &= 1
\end{aligned}\right\} \qquad (281)$$

Eliminirt man, mit Uebergehung der ersten, zwischen den $n+1$ übrigen Gleichungen die n Functionen $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$, so bleibt eine Gleichung $(n-1)$ter Ordnung durch R' zu erfüllen. Ist dann R' bekannt, so findet man nach einander $w_{n-1}, w_{n-2}, \ldots w_0$, und schliesslich

$$W = \int w_0 \partial R + \text{const.}$$

Die letzte Integrationsconstante ist in der Differentialgleichung nicht enthalten und resultirt daher aus der Integration der Gl. (279) selbst. Das Integral hat nun die Form:

$$\frac{t^{n+2}}{n+2} + w t^{n+1} + \sum_{h=2}^{h=n} \frac{1}{h} w_{h-2} t^h - \int w_0 \partial R = \text{const.} \tag{282}$$

wo das constante Increment des zweiten Coefficienten w, weil es zur Allgemeinheit nicht beiträgt, weggelassen ist. Man kann nun für die const. zur Rechten nach einander A, B, C, u, v und gleichzeitig beziehentlich für t die Werte a, b, c, k, l setzen und die so entstehenden 5 Gleichungen mit den 3 Gleichungen (271) zum Ausdruck eines orthogonalen Flächensystems verbinden.

Die willkürlichen Constanten, welche das durch Integration zu findende R enthält, tragen zur Allgemeinheit der Lösung bei, sind aber nicht wesentlich für eine Lösung, wie es bei der Constanten in W der Fall war. Vielmehr besteht der ganze Gewinn der Transformation der Aufgabe darin, dass, obgleich das System (281) nicht leichter zu integriren ist als die Urgleichung, jede Speciallösung des Systems eine ebenso specielle, aber vollständige Lösung der Aufgabe liefert, während eine Speciallösung der Urgleichung ganz nutzlos ist.

Das System der Gl. (281) hat eine für beliebiges n gültige Speciallösung

$$w_h = \alpha_h w^{n-h}; \qquad R = \beta w^2$$

indem es sich nach Einführung dieser Werte auf Relationen zwischen den Constanten α_h, β reducirt. Doch wird ihr gemäss die Gl. (279) homogen. Sie kann daher nur unter die Lösung (280) fallen.

Geht man die niedrigsten Werte von n durch, so wird für $n=1$ die Urgleichung ebenfalls homogen. Für $n=2$ lautet das System (281):

$$w_0 = w_1 R'; \quad w_0' = 2w_1 - 2R'; \quad w_1 = 3w$$

und giebt nach Elimination von w_0, w_1:

$$3wR' + 2R = 3w^2$$

und nach Integration:

$$R=\frac{3}{8}w^2+gw^{-\frac{2}{3}};\qquad w_0=\frac{9}{4}w^2-2gw^{-\frac{2}{3}}$$

$$\int w_0\partial R=\frac{27}{64}w^4-\frac{9}{4}gw^{\frac{4}{3}}-g^2w^{-\frac{4}{3}}$$

Dies in (282) eingeführt giebt:

$$\frac{1}{4}t^4+wt^3+\left(\frac{9}{4}w^2-2gw^{-\frac{2}{3}}\right)t^2-\frac{27}{64}w^4+\frac{9}{4}gw^{\frac{4}{3}}+g^2w^{-\frac{4}{3}}=\text{const.}$$

Setzt man für t die Werte a, b, c, k, l, für die const. die Werte A, B, C, u, v, so geben die 5 Gleichungen zusammen mit (271) ein algebraisches orthogonales Flächensystem.

Für $n=3$ lautet das System (281):

$$w_0=w_1R';\quad w_0'=2w_1-2w_2R';\quad w_1'=3w_2-3R';\quad w_2=4w$$

und giebt nach Elimination von w_0, w_1, w_2:

$$(2w^2-R)(R''-2)-R'^2+\frac{20}{3}wR'=0$$

Zur Transformation setzen wir

$$R=(v+2)e^{2\int\frac{v\,dv}{r}};\qquad w=e^{\int\frac{v\,dv}{r}}$$

woraus durch Differentiation hervorgeht:

$$R'=\left(\frac{r}{v}+2v+4\right)e^{\int\frac{v\,dv}{r}};\quad R''=\frac{r}{v^2}\frac{\partial r}{\partial v}-\frac{r^2}{v^3}+\frac{3r}{v}+2v+4$$

Nach Einführung dieser Werte geht die Gleichung über in

$$3r\frac{\partial r}{\partial v}+(21v+4)r+2v(v-1)(9v+16)=0$$

und hat demnach wieder die Form der Urgleichung.

Höhere Werte von n bieten keine Aussicht auf Integrabilität.

Wir haben bis jetzt unveränderliche Axenlage der Fläche 2. Grades angenommen. Es soll nun noch bewiesen werden, dass einer variabeln Axenlage kein orthogonales Flächensystem entsprechen kann, vorausgesetzt dass a, b, c ungleich sind.

Für die in (271) mit x, y, z bezeichneten Grössen schreiben wir jetzt x_1, y_1, z_1, und betrachten sie als Coordinaten in Bezug auf ein

mit dem Parameter w variirendes Axensystem, zu welchen die auf ein festes Axensystem bezüglichen Coordinaten x, y, z in der Relation stehen:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1 \\ y &= y_0 + \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1 \\ z &= z_0 + \alpha_3 x_1 + \beta_3 y_1 + \gamma_3 z_1 \end{aligned}\right\} \qquad (283)$$

Führt man diese Werte in Gl. (272) ein und setzt zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha_1 x_0' + \alpha_2 y_0' + \alpha_3 z_0' \\ \beta_0 &= \beta_1 x_0' + \beta_2 y_0' + \beta_3 z_0' \\ \gamma_0 &= \gamma_1 x_0' + \gamma_2 y_0' + \gamma_3 z_0' \end{aligned} \;\middle|\; \begin{aligned} \alpha &= \beta_1'\gamma_1 + \beta_2'\gamma_2 + \beta_3'\gamma_3 \\ \beta &= \gamma_1'\alpha_1 + \gamma_2'\alpha_2 + \gamma_3'\alpha_3 \\ \gamma &= \alpha_1'\beta_1 + \alpha_2'\beta_2 + \alpha_3'\beta_3 \end{aligned}\right\} \qquad (284)$$

so geht sie über in

$$\frac{\partial x_1}{\partial k}\frac{\partial x_1}{\partial w} + \frac{\partial y_1}{\partial k}\frac{\partial y_1}{\partial w} + \frac{\partial z_1}{\partial k}\frac{\partial z_1}{\partial w} + \alpha_0 \frac{\partial x_1}{\partial k} + \beta_0 \frac{\partial y_1}{\partial k} + \gamma_0 \frac{\partial z_1}{\partial k} \qquad (285)$$

$$+ \alpha\left(y_1 \frac{\partial z_1}{\partial k} - z_1 \frac{\partial y_1}{\partial k}\right) + \beta\left(z_1 \frac{\partial x_1}{\partial k} - x_1 \frac{\partial z_1}{\partial k}\right) + \gamma\left(x_1 \frac{\partial y_1}{\partial k} - y_1 \frac{\partial x_1}{\partial k}\right) = 0$$

Die Summe der 3 ersten Terme ist bereits berechnet und in Gl. (273) $= 0$ gesetzt; sie ist die rechte Seite weniger der linken dividirt durch $4\Delta(k-a)(k-b)(k-c)$. Ferner ist

$$\frac{\partial x_1}{\partial k} = \frac{1}{2}\frac{x_1}{k-a}; \quad \frac{\partial y_1}{\partial k} = \frac{1}{2}\frac{y_1}{k-b}; \quad \frac{\partial z_1}{\partial k} = \frac{1}{2}\frac{z_1}{k-c}$$

daher wird die Gleichung:

$$P(k-a)(k-b)(k-c) - (k-l)\left(\Delta k \frac{\partial k}{\partial w} + Pk^2 - P_1 k + P_2\right)$$

$$+ 2\Delta\,\{\alpha_0 x_1 (k-b)(k-c) + \beta_0 y_1 (k-c)(k-a) + \gamma_0 z_1 (k-a)(k-b)$$

$$+ \alpha y_1 z_1 (c-b)(k-a) + \beta z_1 x_1 (a-c)(k-b) + \gamma x_1 y_1 (b-a)(k-c)\} = 0$$

Diese Gleichung ist algebraisch in l, und zwar haben x_1, y_1, z_1, bzhw. die Factoren $\sqrt{l-a}$, $\sqrt{l-b}$, $\sqrt{l-c}$, hangen aber sonst nicht von u ab. Daher ist die Grösse in der Klammer $\{\}$ in Bezug auf die Unabhängige l stets irrational, so lange irgend einer der Coefficienten α_0, β_0, γ_0, α, β, γ nicht null ist, und kann den, in l linearen, übrigen Teil der Linken nicht aufheben. Folglich ist der Fall, wo die 6 Grössen null sind, der einzige, welcher eine Lösung zulässt. In diesem Falle werden x_0, y_0, z_0, und die 9 Coefficienten der Substitution (283) constant, also die Axenlage unveränderlich, w. z. b. w.

Dieser Beweis hat noch keine Anwendung auf Rotationsflächen. Er lässt sich hier ebenso, und zwar ohne Beschränkung auf Flächen 2. Grades führen. In Parametern der Krümmungslinien, d. i. der

Meridiane und Parallelkreise, dargestellt, sind die Gleichungen einer beliebigen Rotationsfläche, deren Axe die der z_1 sei (mit Ausnahme der Kugelfläche):

$$x_1 = k\cos l; \quad y_1 = k\sin l; \quad z_1 = \varphi(k, w)$$

womit die Gl. (283) zu verbinden sind, und wo k Function von (u, w), und l von (v, w) ist. Führt man diese Werte in die Gl. (285) und in ihre analoge, l für k gesetzt, ein, so lauten beide:

$$\left[1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial k}\right)^2\right]\frac{\partial k}{\partial w}+\frac{\partial\varphi}{\partial k}\frac{\partial\varphi}{\partial w}+\left[\alpha_0+\beta\left(\varphi-k\frac{\partial\varphi}{\partial k}\right)\right]\cos l$$

$$+\left[\beta_0+\alpha\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial k}-\varphi\right)\right]\sin l+\gamma_0\frac{\partial\varphi}{\partial k}=0 \tag{286}$$

$$k\frac{\partial l}{\partial w}+(\beta_0-\alpha\varphi)\cos l-(\alpha_0+\beta\varphi)\sin l+\gamma k=0 \tag{287}$$

Differentiirt man die letzte Gleichung nach u, und dividirt durch $\frac{\partial k}{\partial u}$, so kommt:

$$\frac{\partial l}{\partial w}-\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial k}\cos l-\beta\frac{\partial\varphi}{\partial k}\sin l+\gamma=0$$

Hiernach ist, wofern nicht α und β null sind, $\frac{\partial\varphi}{\partial k}$ Function von w allein. Sei also

$$\frac{\partial\varphi}{\partial k}=w_0; \qquad \varphi=w_0k+w_1 \tag{288}$$

Der letzte Wert zeigt, dass die Fläche ein gerader Kegel, für $w_0=0$ ein gerader Cylinder ist. In jedem andern Falle ist $\alpha=\beta=0$. In der ersten Gleichung müssen die Coefficienten von $\cos l$ und $\sin l$ verschwinden; daher ist auch $\alpha_0=\beta_0=0$. Aus $\alpha=\beta=0$ folgt, dass $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ constant sind, dass also die Rotationsaxe eine feste Richtung hat, aus $\alpha_0=\beta_0=0$, dass sie sich nur längs ihrer selbst verschieben kann.

Es hat sich also ergeben, dass mit Ausnahme von Kegel, Cylinder und Kugel eine Schar von Rotationsflächen nur bei fester Axe einem orthogonalen Flächensystem angehören kann. Da ein solches System immer durch Rotation eines orthogonalen ebenen Liniensystems um eine Axe in derselben Ebene entsteht, so bedarf es keiner besondern Untersuchung.

Für den Fall einer Schar von Rotationskegeln (einschl. Cylindern) bestimmt durch (288), lauten die Bedingungsgleichungen (286) (287):

$$(1+w_0^2)\frac{\partial k}{\partial w}+w_0(w_0'k+w_1'+\gamma_0)=0 \tag{289}$$

$$\frac{\partial l}{\partial w}-w_0(\alpha\cos l+\beta\sin l)+\gamma=0 \tag{290}$$

Zur Integration setze man (mit Ausschluss des Cylinders)

$$w_0=\frac{\lambda'+\gamma}{\alpha\cos\lambda+\beta\sin\lambda} \tag{291}$$

wo λ eine willkürliche Function von w bezeichnet. Dann kann man die zweite Gleichung befriedigen durch

$$\operatorname{tg}\frac{l}{2}=\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}+\frac{w_3}{v+w_2} \tag{292}$$

und es bleibt zur Bestimmung von w_3, w_2:

$$\partial\log w_3=-\left\{w_0\left(\alpha\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}-\beta\right)+\gamma\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}\right\}\partial w \tag{293}$$

$$\partial w_2=\tfrac{1}{2}w_3(w_0\alpha+\gamma)\partial w \tag{294}$$

Gl. (289) ist linear in k und giebt sofort:

$$k=\frac{1}{\sqrt{1+w_0^2}}\left(u-\int w_0\frac{\partial w_1+\gamma_0\partial w}{\sqrt{1+w_0^2}}\right) \tag{295}$$

Hierzu kommt noch die Bestimmung von α_0 und β_0 durch Gl. (286), der zufolge ihre Werte sein müssen:

$$\alpha_0=-\beta w_1;\qquad \beta_0=\alpha w_1 \tag{296}$$

woraus:

$$\alpha\alpha_0+\beta\beta_0=0 \tag{297}$$

Dies ist dann die einzige Beschränkung, der die Bewegung der Rotationsaxe unterworfen ist. Führt man die Werte (284) ein, so geht Gl. (297) über in

$$\begin{vmatrix}\gamma_1 & \partial\gamma_1 & \partial x_0\\ \gamma_2 & \partial\gamma_2 & \partial y_0\\ \gamma_3 & \partial\gamma_3 & \partial z_0\end{vmatrix}=0 \tag{298}$$

und drückt aus, dass die Rotationsaxe einen Coincidenzpunkt hat, also eine abwickelbare Fläche erzeugt. Demnach wird jede Schar von Rotationskegeln, deren Axen eine abwickelbare Fläche bilden, von 2, sich rechtwinklig schneidenden Flächenscharen rechtwinklig geschnitten. Eine dieser beiden ist selbst abwickelbar, weil die Kegelseite ihre Krümmungslinie ist, die andere wird von bewegten Kreisen erzeugt.

Die 3 Gl. (296) (298) werden erfüllt durch

$$x_0' = \gamma_0\gamma_1 - w_1\gamma_1'; \quad y_0' = \gamma_0\gamma_2' - w_1\gamma_2'; \quad z_0' = \gamma_0\gamma_3' - w_1\gamma_3' \qquad (299)$$

Um jetzt das orthogonale Flächensystem darzustellen, kann man das orthogonale Coefficientensystem

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{matrix}$$

ferner γ_0, λ und w_1 willkürlich in w bestimmt annehmen, daraus nach (284) α, β, γ, dann nach (291) w_0, nach (299) x_0, y_0, z_0, nach (293) w_3, nach (294) w_2, nach (295) k und nach (292) l berechnen; dann hat man:

$$x_1 = k\cos l; \quad y_1 = k\sin\lambda; \quad z_1 = w_0 k + w_1$$

und die Gl. (283) sind der gesuchte Ausdruck des Flächensystems.

Im Fall des Cylinders $w_0 = 0$ ändern sich nur die Integrale der Gl. (289) (290), welche hier lauten:

$$k = u; \quad l = v - \int \gamma \partial w$$

Auf die Kugel lässt sich unsere Methode, die von gegebenen Krümmungslinien ausgeht, nicht anwenden. Dagegen wollen wir im folgenden Paragraphen von einem orthogonalen System von lauter Kugelflächen, welches sich wol als bekannt betrachten lässt, eine Anwendung auf andre orthogonale Flächensysteme machen. Ferner läst sich bemerken, dass Rotationsflächen nicht diejenige Verallgemeinerung gestatten, welche durch Integration der Gl. (8) gewonnen ward, weil sich diese hier auf $0 = 0$ reducirt.

Es bleibt noch übrig die vorstehenden Untersuchungen auf Paraboloide zu übertragen. Die Darstellung eines Paraboloids in Parametern der Krümmungslinien ist:

$$\left.\begin{aligned} x^2 = \frac{a(u-a)(v-a)}{b-a}; \quad y^2 = \frac{b(u-b)(v-b)}{a-b} \\ 2z = u + v - a - b \end{aligned}\right\} \qquad (300)$$

Sie geht aus der einer centralen Fläche 2. Grades durch Substitution von $\frac{x}{\sqrt{c}}, \frac{y}{\sqrt{c}}, \frac{z}{\sqrt{c}} + \sqrt{c}$ für x, y, z hervor, wenn man nachher $c = \infty$ setzt.

Die Resultate von §. 14. bleiben im wesentlichen dieselben. Die ifferentialgleichungen (248) für die Hauptkrümmungsradien m, n sind anz unabhängig von a, b, c und gelten auch hier, sowie ihre Lösungen. Die daraus abgeleitete Fläche (264) lässt sich unmittelbar uf den vorliegenden Fall übertragen, indem man bloss $c = \infty$ setzt, o dass

$$z = r \int_0^\pi \frac{\varphi(\Theta) + C}{\Theta} \partial \vartheta$$

wird. Die Coordinaten haben einen gemeinsamen willkürlichen constanten Factor und bedürfen deshalb keiner Substi'ution.

Dagegen ist die Uebertragung der Resultate von §. 15. durch Substitution nicht so einfach, und eine neue Rechnung hier eher am Orte. Wir schreiben wieder k, l, x_1, y_1, z_1 für u, v, x, y, z und nehmen die Gl. (283) (284) (285) auf mit gleicher Bedeutung der Buchstaben, so dass die Gl. (300) übergehen in

$$x_1^2 = \frac{a(k-a)(l-a)}{b-a}; \quad y_1^2 = \frac{b(k-b)(l-b)}{a-b}; \quad 2z_1 = k + l - a - b \tag{301}$$

Nach Einführung dieser Werte wird Gl. (285):

$$(k-l)k\frac{\partial k}{\partial w} + \frac{aa'(k-b)(l-a) - bb'(k-a)(l-b)}{a-b}$$
$$+ \{2\alpha_0 - \beta(k-l-a+b)\}(k-b)x_1 + \{2\beta_0 + \alpha(k-l+a-b)\}(k-a)y_1$$
$$+ 2\gamma_0(k-a)(k-b) + \gamma(b-a)x_1 y_1 = 0$$

Da x_1 den Factor $\sqrt{l-a}$, y_1 den Factor $\sqrt{l-b}$ hat, im übrigen die Gleichung rational in l ist, so müssen die Coefficientee der irrationalen Terme einzeln, und zwar unabhängig von l verschwinden; daher ist

$$\alpha_0 = 0; \quad \beta_0 = 0; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 0; \quad \gamma = 0 \tag{302}$$

Jetzt ist die Gleichung linear in l und zerfällt in die beiden:

$$k^2\frac{\partial k}{\partial w} - \frac{a^2a'(k-b) - b^2b'(k-a)}{a-b} + 2\gamma_0(k-a)(k-b) = 0$$

$$k\frac{\partial k}{\partial w} - \frac{aa'(k-b) - bb'(k-a)}{a-b} = 0 \tag{303}$$

woraus nach Elimination von $\frac{\partial k}{\partial w}$:

$$aa' - bb' + 2\gamma_0(a-b) = 0 \tag{304}$$

Infolge dessen wird Gl. (303):

$$k\frac{\partial k}{\partial w}+2\gamma_0 k+ab\frac{a'-b'}{a-b}=0$$

Zerlegt man Gl. (304) in

$$aa'+2\gamma_0 a+\varepsilon=0;\quad bb'+2\gamma_0 b+\varepsilon=0$$

und eliminirt γ_0, so kommt:

$$\varepsilon=ab\frac{a'-b'}{a-b}$$

folglich sind a, b, k Lösungen derselben Differentialgleichung

$$t\frac{\partial t}{\partial w}+2\gamma_0 t+\varepsilon=0$$

und ebenso muss es l sein, wie es die zweite Bedingungsgleichung fordert. Diese stimmt mit Gl. (279) ganz überein, sofern man γ_0 und ε als willkürliche Functionen von w, gleichwie dort Q' und R' ansehen darf. Es ist dann nur der Unterschied, dass bei der centralen Fläche c eine Lösung, wie a und b, ist, beim Paraboloid hingegen sich der Ort des Scheitels direct aus dem Werte von γ_0 ergiebt. Da nämlich die Richtungen der Axen der x_1, y_1, z_1 zufolge (302) unveränderlich sind, der Anfangspunkt sich nur längs der z_1 Axe verschieben lässt, so kann man setzen

$$x=x_1;\quad y=y_1;\quad z=z_1+\int\gamma_0\partial w$$

und der letzte Term bestimmt die Variation des Scheitels. Die für die centralen Flächen aufgestellten besonderen Lösungen werden demnach auf die Paraboloide übertragen, indem man bloss die Gl. (301) statt der Gl. (271) mit den gefundenen Integralen verbindet.

16. Substitution einer orthogonalen Transformation in eine andere.

Sind x, y, z Coordinaten eines Punktes im Raume im allgemeinsten Sinne, so lässt sich dieser Punkt als Durchschnitt dreier Flächen auffassen, welche er beschreibt, wenn einzeln x, y, z constant gesetzt werden, während die beiden andern variiren. Macht man x, y, z zu bestimmten Functionen von u, v, w, so sind u, v, w als neue Coordinaten desselben Punkts in gleichem Falle, die Flächen $u=$ const., $v=$ const., $w=$ const. sind andere. Die Veränderung, welche die analytischen Ausdrücke des Punktes, der von ihm erzeugten Raumgebilde und ihre Relationen bei Einführung von u, v, w für x, y, z erfahren, ist es, was wir hier unter Transformation verstehen, indem wir die Gleichungen

$$x=x(u,v,w);\quad y=y(u,v,w);\quad z=z(u,v,w)\tag{305}$$

die Transformationsgleichungen, oder kürzer die Transformationen nennen. Sie heisst eine orthogonale Transformation, wenn sowol die Flächen x, y, z als auch die Flächen u, v, w einander rechtwinklig schneiden.

Wir nehmen nun ausser der orthogonalen Transformation (305) eine zweite

$$x_1 = x_1(u_1, v_1, w_1); \quad y_1 = y_1(u_1, v_1, w_1); \quad z_1 = z_1(u_1, v_1, w_1)$$

als bekannt an. Ferner seien x, y, z und x_1, y_1, z_1 cartesische Coordinaten, vorläufig ohne Beziehung der beiderseitigen Axensysteme. Setzt man nun

$$u_1 = x; \quad v_1 = y; \quad w_1 = z \tag{306}$$

so erhält man nach Substitution der Werte (306) eine dritte Transformation

$$x_1 = \varphi(u, v, w); \quad y_1 = \chi(u, v, w); \quad z_1 = \psi(u, v, w)$$

Es sollen die Bedingungen aufgestellt werden, unter denen dieselbe gleichfalls orthogonal ist.

Sind u_1, v_1, w_1 cartesische Coordinaten, so wird durch die Relationen (306) das Flächensystem u, v, w ohne innere Veränderung transponirt, daher ist die Bedingung immer erfüllt. Es fragt sich, welche andere Coordinatensysteme, ungeachtet der Alteration des Flächensystems, doch die Orthogonalität bewahren. Unmittelbar lauten die 3 Bedingungsgleichungen des rechtwinkligen Durchschnitts:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x_1}{\partial v_1}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial x_1}{\partial v_1}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\\
+&\left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y_1}{\partial v_1}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y_1}{\partial w_1}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y_1}{\partial v_1}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial y_1}{\partial w_1}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\\
+&\left(\frac{\partial z_1}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z_1}{\partial v_1}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z_1}{\partial w_1}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z_1}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z_1}{\partial v_1}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z_1}{\partial w_1}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0
\end{aligned}$$

nebst zwei analogen, die man durch Vertauschung von u, v, w erhält. Erfüllt man die erste unabhängig von den partiellen Differentialquotienten der x, y, z, mit Beachtung, dass letztere die Bedingung der Orthogonalität befriedigen, so werden auch die beiden analogen erfüllt, und man hat nur folgende 2 Gleichungen:

$$E_1 = E_2 = E_3$$

$$E_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial u_1}\right)^2$$
$$E_2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial v_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial v_1}\right)^2$$
$$E_3 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial w_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial w_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial w_1}\right)^2$$

gesetzt ist. Genügt eine bekannte Orthogonaltransformation dieser Bedingung, so kann man mittelst Substitution in dieselbe aus jeder bekannten Orthogonaltransformation mindestens eine zweite ableiten. Die Bedingung lässt sich leicht noch erweitern. Ist

$$E_1 = U^2 M; \quad E_2 = V^2 M; \quad E_3 = W^2 M$$

wo U Function von u_1, V von v_1, W von w_1, M von (u_1, v_1, w_1) ist, so braucht man nur statt (306) zu setzen

$$\int U \partial u_1 = x; \quad \int V \partial v_1 = y; \quad \int W \partial w_1 = z$$

Der genannten Bedingung entspricht in der Tat eine bekannte Orthogonaltransformation. Ein orthogonales System dreier Kugelscharen hat die Gleichungen:

$$x_1 = \frac{u_1}{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}; \quad y_1 = \frac{v_1}{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}; \quad z_1 = \frac{w_1}{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2} \quad (307)$$

denn hier wird

$$E_1 = E_2 = E_3 = \frac{1}{(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)^2}$$

Man kann daher aus jedem orthogonalen Flächensystem x, y, z, dargestellt in u, v, w, ein neues ableiten, indem man in (307) $u_1 = x$; $v_1 = y$; $w_1 = z$ setzt. Zu bemerken ist hierbei, dass die Wiederholung der Operation kein neues Flächensystem ergiebt. Denn löst man die Gl. (307) nach u_1, v_1, w_1 auf, so findet man:

$$u_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}; \quad v_1 = \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}; \quad w_1 = \frac{z_1}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Die Wiederholung der in Rede stehenden Transformation führt also auf das ursprüngliche System zurück.

VI.

Ein Beitrag zur mechanischen Quadratur.

Von

Ligowski.

---

§. 1.

1. Im 32sten Bande des Archivs habe ich gezeigt, dass, wenn

$$f(x) = \sum_{r=0}^{r=n} a_r x^r,$$

das Integral von 0 bis x:

$$\int_0^x f(x)\,dx = \sum_{r=0}^{r=n} a_r \frac{x^{r+1}}{r+1} \quad \text{auch} \quad = x \Sigma K_r f(\mu_r x)$$

gesetzt werden kann. Zur Bestimmung der K und μ ergeben sich sofort die folgenden Gleichungen:

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=r} K_\varrho = 1$$

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=r} K_\varrho \mu_\varrho = \tfrac{1}{2}$$

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=r} K_\varrho \mu_\varrho^2 = \tfrac{1}{3}$$

. . . .

$$\Sigma K_\varrho \mu_\varrho^n = \frac{1}{n+1}.$$

Setzt man in diese Gleichungen für μ die Werte $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}$ bis $\frac{n}{n}$, so ergeben sich die Cetesischen Näherungsformeln; lässt man aber alle K und μ unbekannt sein, so erhält man die Gauss-schen Näherungsformeln.

2. Eine Reihe anderer Näherungsformeln ergeben sich, wenn man für μ die Werte:

$$\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \frac{5}{2n} \dots \frac{2n-1}{2n} \text{ setzt.}$$

Bezeichnet man die Functionswerte $f\left(\frac{x}{2n}\right)$ $f\left(\frac{3x}{2n}\right) \dots$ der Reihe nach durch $f_1, f_2, f_3 \dots$, so ergiebt sich:

Für $n=1$; I. $\int_0^x f(x)dx = xf_1$

Für $n=2$; II. $\int_0^x f(x)dx = \frac{x}{2}(f_1+f_2)$

Für $n=3$; III. $\int_0^x f(x)dx = \frac{x}{8}[3(f_1+f_3)+2f_2]$

Für $n=4$; IV. $\int_0^x f(x)dx = \frac{x}{48}[13(f_1+f_4)+11(f_2+f_3)]$

Für $n=5$; V. $\int_0^x f(x)dx = \frac{x}{1152}[275(f_1+f_5)+100(f_2+f_4)+402f_3]$

3. Von diesen Formeln ist besonders Nr. III. bemerkenswert, da dieselbe, eben so wie die Simpson'sche Regel: $\frac{x}{6}(f_0+4f_1+f_2)$ genaue Werte für das Integral liefert, wenn:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Wie sich aus der Vergleichung am Schlusse der Abhandlung ergiebt, ist der Fehler bei Anwendung der Formeln auf Functionen, welche den 3ten übersteigen, bei der Simpson'schen Regel nahe $\frac{18}{7}$ mal grösser als bei der Formel Nr. III.

4. Durch wiederholte Anwendung der Formel III. ergiebt sich, wenn die Functionswerte wie in Nr. 2 bezeichnet werden:

$$\int_0^{nh} f(x)dx = \frac{h}{8}[3(f_1+f_2+f_3+f_4 \dots f_{3n})-(f_2+f_5+f_8 \dots f_{3n-1})]$$

5. Um den Fehler der Formel Nr. 4. zu bestimmen, setze ich $h = 6\lambda$ und $f(x) = e^x$, alsdann ist nach Nr. 4., wenn für den Fehler die Form

$$\Sigma\left(\left(\frac{d^r f(x)}{dx^r}\right)_{x=nh} - \left(\frac{d^r f(x)}{dx^r}\right)_{x=0}\right) A_r \lambda^{r+1}$$

angenommen wird:

$$6. \quad e^{6n\lambda}-1 = \tfrac{3}{4}\lambda[3(e^{\lambda}+e^{3\lambda}+e^{5\lambda}\dots e^{(6n-1)\lambda})-(e^{3\lambda}+e^{9\lambda}+e^{15\lambda}\dots e^{(6n-3)\lambda})] + (e^{6n\lambda}-1)\Sigma A_r\lambda^{r+1}$$

oder:

$$e^{6n\lambda}-1 = \tfrac{3}{4}\lambda[3e^{\lambda}(1+e^{2\lambda}+e^{4\lambda}+\dots e^{(3n-1)2\lambda}) - e^{3\lambda}(1+e^{6\lambda}+e^{12\lambda} + \dots e^{6(n-1)\lambda})] + (e^{6n\lambda}-1)\Sigma A_r\lambda^{r+1}$$

$$= \tfrac{3}{4}\lambda\left[3e^{\lambda}\frac{(e^{6n\lambda}-1)}{e^{2\lambda}-1} - \frac{e^{3\lambda}(e^{6n\lambda}-1)}{e^{6\lambda}-1}\right] + (e^{6n\lambda}-1)\Sigma A_r\lambda^{r+1}$$

also:

$$1 = \tfrac{3}{4}\lambda\left[\frac{3e^{\lambda}}{e^{2\lambda}-1} \quad \frac{e^{3\lambda}}{e^{6\lambda}-1}\right] + \Sigma A_r\lambda^{r+1}.$$

Aus der Endformel in Nr. 6. ergiebt sich, wenn man die Zähler und Nenner der beiden Quotienten durch e^{λ} resp. $e^{3\lambda}$ dividirt, und beachtet, dass:

$$e^{\lambda}-e^{-\lambda} = 2\mathfrak{Sin}\lambda, \text{ sowie } e^{3\lambda}-e^{-3\lambda} = 2\mathfrak{Sin}3\lambda \text{ ist:}$$

$$7. \quad 1 = \frac{3\lambda}{8}\left[\frac{3}{\mathfrak{Sin}\lambda} - \frac{1}{\mathfrak{Sin}3\lambda}\right] + \Sigma A_r\lambda^{r+1}; \quad r > 0.$$

Da nun

$$\frac{\lambda}{\mathfrak{Sin}\lambda} = 1 + \Sigma(-1)^{\varrho}(4^{\varrho}-2)\frac{B_{2\varrho-1}}{(2\varrho)!}\lambda^{2\varrho}; \quad \varrho > 0 \text{ und}$$

$$\frac{3\lambda}{\mathfrak{Sin}3\lambda} = 1 + \Sigma(-1)^{\varrho}(4^{\varrho}-2)\frac{B_{2\varrho-1}}{(2\varrho)!}3^{2\varrho}\lambda^{2\varrho}$$

ist, so ergiebt sich:

$$\frac{3}{8}\lambda\left(\frac{3}{\mathfrak{Sin}\lambda} - \frac{1}{\mathfrak{Sin}3\lambda}\right) = 1 - \frac{3}{8}\Sigma(-1)^{\varrho}(3^{2\varrho-1}-3)(4^{\varrho}-2)\frac{B_{2\varrho-1}}{(2\varrho)!}\lambda^{2\varrho}$$

und daher:

das Integral zwischen den Grenzen $-x$ und $+x$ bestimmt. Es ist:

$$\int_{-x}^{x} f(x)\,dx = 2x \sum_{r=0} a_{2r} \frac{x^{2r}}{2r+1}$$

Man kann auch

$$\int_{-x}^{x} f(x)\,dx = 2x \sum_{r=0} K_r f(\mu_r x)$$

setzen, dabei soll $K_0 = K_1 = K_2 = \ldots K_r = \frac{1}{r+1}$ sein.

16. Für $n = 2p$ ist $r = 2p-1$ und

$$\Sigma \mu_r = 0$$

$$\Sigma \mu_r^2 = \frac{2p}{3}$$

$$\Sigma \mu_r^3 = 0$$

$$\Sigma \mu_r^4 = \frac{2p}{5}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\Sigma \mu_r^{2p} = \frac{2p}{2p+1}$$

Für $n = 2p+1$ ist $r = 2p$

$$\Sigma \mu_r = 0$$

$$\Sigma \mu_r^2 = \frac{2p+1}{3}$$

$$\Sigma \mu_r^3 = 0$$

$$\Sigma \mu_r^4 = \frac{2p+1}{5}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\Sigma \mu_r^{2p+1} = 0$$

17. Die folgenden vier Formeln geben genaue Resultate, wenn $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ ist.

I. $F_1 = \frac{x}{6}\left[f(0) + 4f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x)\right]$

II. $F_2 = \frac{x}{8}\left[3\left(f\left(\frac{x}{6}\right) + f\left(\frac{5x}{6}\right)\right) + 2f\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

III. $F_3 = \frac{x}{2}[f(\mu_0 x) + f(\mu_1 x)]; \quad \mu = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{12}}$

13. Ist die in Nr. 11 genannte Gleichung:

$$\mu^n + A_1\mu^{n-1} + A_2\mu^{n-2} + \ldots A_n = 0,$$

so ist nach den Sätzen über die Summe der Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades:

$$\frac{n}{2} + A_1 = 0$$

$$\frac{n}{3} + \frac{n}{2}A_1 + 2A_2 = 0$$

$$\frac{n}{4} + \frac{n}{3}A_1 + \frac{n}{2}A_2 + 3A_3 = 0$$

$$\frac{n}{5} + \frac{n}{4}A_1 + \frac{n}{3}A_2 + \frac{n}{2}A_3 + 4A_4 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n}A_1 + \frac{n}{n-1}A_2 + \frac{n}{n-2}A_3 + \ldots nA_n = 0$$

14. Für n gleich 2, 3, 4 und 5 erhält man hieraus:

1) $\mu^2 - \mu + \frac{1}{6} = 0;\quad \mu = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$ (giebt die erste Gauss'sche Formel)

2) $\mu^3 - \frac{3}{2}\mu^2 + \frac{5}{8}\mu - \frac{1}{16} = 0;\quad \mu_1 = \frac{1}{2};\quad \mu_0$ oder $\mu_2 = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$

3) $\mu^4 - 2\mu^3 + \frac{4}{3}\mu^2 - \frac{1}{3}\mu + \frac{1}{45} = 0$ oder auch

$$(\mu - \tfrac{1}{2})^4 - \frac{1}{6}(\mu - \tfrac{1}{2})^2 + \frac{1}{720} = 0;\quad \mu = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{30}\sqrt{75 \pm 30\sqrt{5}}$$

4) $\mu^5 - \frac{5}{2}\mu^4 + \frac{55}{24}\mu^3 - \frac{15}{16}\mu^2 + \frac{187}{1152}\mu - \frac{19}{2304} = 0;\quad \mu_2 = \frac{1}{2}$

durch $\mu - \frac{1}{2}$ dividirt giebt

$$\mu^4 - 2\mu^3 + \frac{31}{24}\mu^2 - \frac{7}{24}\mu + \frac{19}{1152} = 0, \text{ oder auch}$$

$$(\mu - \tfrac{1}{2})^4 - \frac{5}{24}(\mu - \tfrac{1}{2})^2 + \frac{7}{1152} = 0;\quad \mu = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{11}}{48}}$$

15. Der in Nr. 12 besprochene Fall lässt sich leichter behandeln, wenn man von

$$f(x) = \sum_0^n a_r x^r$$

20. Eine Formel, ebenfalls genau für

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

ergiebt sich, wenn man für μ_0, μ_1, μ_2 die Werte

$$\frac{1}{8}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{7}{8} \text{ wählt.}$$

Für $\int_0^x f(x)\,dx = F_5$ erhält man:

$$\text{V.} \quad F_5 = \frac{x}{27}\left[8\left(f\left(\frac{x}{8}\right) + f\left(\frac{7x}{8}\right)\right) + 11 f\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

Wendet man diese Formel auf eine Function vierten Grades an, so findet man:

$$\Delta_5 = F - F_5 = \frac{1}{1280} a_4 x^5$$

Diese Formel ist also genauer als jede der Formeln von I. bis IV. Vergleicht man Δ_5 mit Δ_1, so ergiebt sich:

$$\frac{F - F_5}{3} = \frac{F - F_1}{-32} = \frac{F_1 - F_5}{35} \text{ und daher}$$

$$F = F_5 + \frac{3}{35}(F_1 - F_5)$$

21. So wie man durch Verbindung der Fehlerverhältnisse der Formeln I. bis IV. genauere Formeln erhielt, so kann man auch die Formeln von I. bis IV. aus den Fehlerverhältnissen solcher Formeln herleiten, welche nur genau sind für Functionen ersten Grades.

Es ist genau für den ersten Grad:

$$1) \quad J_1 = x f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$2) \quad J_2 = \frac{x}{2}(f(0) + f(x))$$

Wendet man diese Formeln auf Functionen zweiten Grades an, so ergeben sich, wenn J der genaue Wert des Integrals ist:

$$\frac{J - J_1}{1} = \frac{J - J_2}{-2} = \frac{J_2 - J_1}{3}, \text{ also}$$

$$J = J_1 + \frac{J_2 - J_1}{3} = \frac{2J_1 + J_2}{3}$$

$$= \frac{x}{6}\left[f(0) + 4 f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x)\right], \text{ die Simpson'sche Regel.}$$

Formel II. ergiebt sich aus:

$$J_1 = x f\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{und}$$

$$J_2 = \frac{x}{2}\left[f\left(\frac{x}{6}\right) + f\left(\frac{5x}{6}\right)\right]$$

und Formel V. entsteht aus:

$$J_1 = x f(x) \quad \text{und}$$

$$J_2 = \frac{x}{2}\left[f\left(\frac{x}{8}\right) + f\left(\frac{7x}{8}\right)\right]$$

22. Ist das Fehlerverhältniss negativ, so liegt das Integral zwischen J_1 und J_2.

Für den Fall, dass

$$\frac{J - J_1}{J - J_2} = -1, \quad \text{hat man}$$

$$J = \frac{J_1 + J_2}{2}$$

23. Ist

$$J_1 = x f\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$J_2 = \frac{x}{2}\left(f(\mu_0 x) + f(\mu_1 x)\right)$$

dann ist das Fehlerverhältniss gleich -1, wenn $\mu = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{6}}$ ist.

24. Für $f(x) = \frac{1}{1+x}$ und $J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ ist:

$$J_1 = \frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots$$

$$J_2 = \frac{18}{25} = 0{,}72 \quad \text{und}$$

$$J = 0{,}6933$$

statt des wahren Wertes 0,6931.

25. In dem Folgenden soll zu jeder der Formeln

$$1)\ F_1 = \frac{x}{6}\left[f(0) + 4f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x)\right]$$

$$2)\ F_2 = \frac{x}{8}\left[3\left(f\left(\frac{x}{6}\right) + f\left(\frac{5x}{6}\right)\right) + 2f\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$3)\ F_3 = \frac{x}{27}\left[8\left(f\left(\frac{x}{8}\right) + f\left(\frac{7x}{8}\right)\right) + 11f\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

eine zweite gesucht werden (J_1, J_2, J_3), so dass, wenn F den wahren Wert des Integrals bezeichnet, angenähert:

$$\frac{F-F_1}{F-J_1} = \frac{F-F_2}{F-J_2} = \frac{F-F_3}{F-J_3} = -1$$

ist. Man hat alsdann näherungsweise:

$$F = \frac{F_1+J_1}{2}$$
$$= \frac{F_2+J_2}{2}$$
$$= \frac{F_3+J_3}{2}$$

26. Bei Nr. 1. in 25. ist der Fehler $\varDelta = -\frac{1}{120}a_4x^5$. Damit der Fehler bei J_1 gleich $+\frac{1}{120}a_4x^5$ werde, muss, wenn

der Reihe nach mit 1, A_1 und A_2 und addirt je drei solcher Producte, so erhält man zur Bestimmung von A_1, A_2 und K_1 die Gleichungen:

$$A_2(1-K_1)+A_1\left(\tfrac{1}{2}-\frac{K_1}{2}\right)+\tfrac{1}{3}-\frac{K_1}{4}=0$$

$$A_2\left(\tfrac{1}{2}-\frac{K_1}{2}\right)+A_1\left(\tfrac{1}{3}-\frac{K_1}{4}\right)+\tfrac{1}{4}-\frac{K_1}{8}=0$$

$$A_2\left(\tfrac{1}{3}-\frac{K_1}{4}\right)+A_1\left(\tfrac{1}{4}-\frac{K_1}{8}\right)+\frac{23}{120}-\frac{K_1}{16}=0$$

Es muss also:

$$\begin{vmatrix} 1-K_1, & \tfrac{1}{2}-\frac{K_1}{2}, & \tfrac{1}{3}-\frac{K_1}{4} \\ \tfrac{1}{2}-\frac{K_1}{2}, & \tfrac{1}{3}-\frac{K_1}{4}, & \tfrac{1}{4}-\frac{K_1}{8} \\ \tfrac{1}{3}-\frac{K_1}{4}, & \tfrac{1}{4}-\frac{K_1}{8}, & \frac{23}{120}-\frac{K_1}{16} \end{vmatrix}=0$$

sein. Hieraus:

$$\begin{vmatrix} 3-3K_1, & 3-3K_1, & 20-15K_1 \\ 3-3K_1, & 4-3K_1, & 30-15K_1 \\ 4-3K_1, & 6-3K_1, & 46-15K_1 \end{vmatrix}=0, \quad \text{und}$$

$$3K_1\left\{\begin{vmatrix} 1, & 3, & 20 \\ 1, & 4, & 30 \\ 1, & 6, & 46 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3, & 1, & 20 \\ 3, & 1, & 30 \\ 4, & 1, & 46 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 3, & 3, & 1 \\ 3, & 4, & 1 \\ 4, & 6, & 1 \end{vmatrix}\right\}=\begin{vmatrix} 3, & 3, & 20 \\ 3, & 4, & 30 \\ 4, & 6, & 46 \end{vmatrix}$$

aus welcher Gleichung, sich

$$K_1=-\tfrac{4}{3}$$

ergiebt. Mit Hülfe dieses Wertes von K_1 findet man:

$$\mu^2-\mu+\tfrac{1}{5}=0 \quad \text{und}$$

$$\mu_0=\tfrac{1}{2}-\frac{1}{10}\sqrt{5}; \quad \mu_2=\tfrac{1}{2}+\frac{1}{10}\sqrt{5}, \quad \text{so wie}$$

$$K_0=K_2=\tfrac{5}{6}, \quad \text{und daher:}$$

$$J_1=\frac{x}{6}\left[5\left(f(\mu_0 x)+f(\mu_2 x)\right)-4f\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

27. Bei F_2 ist der Fehler $\Delta=+\frac{7}{2160}a_4x^5$. Soll der Fehler bei J_2 gleich $-\frac{7}{2160}a_4x^5$ werden, wenn

$$J_2 = x\left[K_0 f(\mu_0 x) + K_1 f\left(\frac{x}{2}\right) + K_2 f(\mu_2 x)\right].$$

so hat man zwischen den Unbekannten die Gleichungen 1 bis 4 in Nr. 26 und

$$K_0 \mu_0^4 + K_2 \mu_2^4 = \frac{439}{2160} - \frac{K_1}{16}$$

In derselben Weise wie in Nr. 26 ergiebt sich:

$K_1 = \frac{19}{34}$ und

$\mu^2 - \mu + \frac{11}{180} = 0.$ Hieraus

$\mu_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{30}\sqrt{170}$ und $\mu_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{30}\sqrt{170}$, so wie

$K_0 = K_2 = \frac{15}{68}.$ Also:

$$J_2 = \frac{x}{68}\left[15(f(\mu_0 x) + f(\mu_2 x)) + 38 f\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

28. Da $\sqrt{170}$ sehr nahe gleich 13, so ist angenähert $\mu_0 = \frac{1}{15}$

$$\mu_0 = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{40}\sqrt{255}$$

$$\mu_2 = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{40}\sqrt{255} \quad \text{und}$$

$$K_0 = K_2 = \frac{40}{153} \quad \text{und somit}$$

$$= \frac{x}{153}\left[40(f(\mu_0 x) + f(\mu_2 x)) + 73 f\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

30. Da $\sqrt{255}$ sehr nahe gleich 16 ist, so ist angenähert $\mu_0 = \frac{1}{10}$ und $\mu_2 = \frac{9}{10}$, daher ist auch angenähert:

$$F = \frac{x}{153}\left[40\left(f\left(\frac{x}{10}\right) + f\left(\frac{9x}{10}\right)\right) + 73 f\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

31. Die Formeln in Nr. 28. und Nr. 30. gelten, da für μ_0 und μ_2 Näherungswerte eingesetzt sind, nicht mehr genau für Functionen dritten Grades. Für dieselben Functionswerte geben die beiden folgenden Formeln genaue Werte für Functionen dritten Grades.

$$1)\quad F = \frac{x}{96}\left[25\left(f\left(\frac{x}{10}\right) + f\left(\frac{9x}{10}\right)\right) + 46 f\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$2)\quad F = \frac{x}{338}\left[75\left(f\left(\frac{x}{15}\right) + f\left(\frac{14x}{15}\right)\right) + 188 f\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

§. 2.

Zusätze.

Wenn wie in den frühern Abhandlungen

$$y_0 = f\left(\frac{x}{2} - \lambda x\right);\quad y_1 = f\left(\frac{x}{2}\right),\quad y_2 = f\left(\frac{x}{2} + \lambda x\right)$$

$$z_0 = f\left(\frac{x}{2} - \mu x\right),\quad z_2 = f\left(\frac{x}{2} + \mu x\right)$$

bedeutet, so ist nach dem Vorigen

$$1.\quad F = \frac{x}{24(\lambda^2 - \mu^2)}\left[(1 - 12\mu^2)(y_0 + y_2) - (1 - 12\lambda^2)(z_0 + z_2)\right]$$

das genaue Integral einer Function dritten Grades. Bei Anwendung dieser Formel auf die Berechnung des Integrals einer Function vierten Grades hatte sich als Fehler am Integral ergeben:

2. $$\Delta = \frac{3-20(\lambda^2+\mu^2)+240\lambda^2\mu^2}{240} a_4 x^5.$$

Für $\Delta = 0$ ist:

3. $$240\lambda^2\mu^2 - 20(\lambda^2+\mu^2)+3 = 0$$ und

$$\mu^2 = \frac{20\lambda^2-3}{20(12\lambda^2-1)}.$$

Wenn die Gleichnng Nr. 3. erfüllt wird, so giebt die Formel Nr. 1. oder auch, wenn die Werte von μ^2 in dieselbe eingeführt wird, die dadurch sich ergebende Formel:.

4. $$F = \frac{x}{6(240\lambda^4-40\lambda^2+3)}(4(y_0+y_2)+5(12\lambda^2-1)^2(z_0+z_2))$$

das genaue Integral einer Function vierten Grades. Wendet man die Formel Nr. 4. zur Berechnung des Integrals einer Function fünften Grades an und bezeichnet wiederum durch Δ den Fehler am Integral, so ist:

$$\Delta = \frac{1}{6}\left[1-\frac{1}{240\lambda^4-40\lambda^2+3}\right.$$
$$\left.(4(\tfrac{1}{2}-\lambda)^5+(\tfrac{1}{2}+\lambda)^5)+5(12\lambda^2-1)^2((\tfrac{1}{2}-\mu)^5+(\tfrac{1}{2}+\mu)^5)\right]a_5x^6$$

$$\Delta = \frac{1}{6}\left[1-\frac{1}{240^4-40\lambda^2+3}\right.$$
$$\left.\cdot\frac{4(1+40\lambda^2+80\lambda^4)+5(12\lambda^2-1)^2(1+40\mu^2+80\mu^4)}{16}\right]a_5x^6$$

und wenn man für μ^2 seinen Wert aus Nr. 3. einführt

$$\Delta = \frac{1}{6}\left[1-\frac{1}{16(240\lambda^4-40\lambda^2+3}\right.$$
$$\left.\cdot(4(1+40\lambda^2+80\lambda^4)+3520\lambda^4-800\lambda^2+44)\right]a_5x^6$$

$$\Delta = \frac{1}{6}\left[1-\frac{1}{16(240\lambda^4-40\lambda^2+3)}\cdot 16(240\lambda^4-40\lambda^2+3)\right]a_5x^6 = 0.$$

Die Formel Nr. 1. ist daher auch, wenn zwischen μ und λ die Gleichung Nr. 3. besteht, das genaue Integral einer Function fünften Grades.

Berechnet man nach Formel Nr. 1 unter der Voraussetzung, dass die Gleichung Nr. 3. erfüllt wird das Integral einer Function sechsten Grades, so ist der Fehler am Integral:

$$\Delta = \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{24(\lambda^2-\mu^2)}\right.$$
$$\left.((1-12\mu^2)((\tfrac{1}{2}-\lambda)^6+(\tfrac{1}{2}+\lambda)^6)-(1-12\lambda^2)((\tfrac{1}{2}-\mu)^6+(\tfrac{1}{2}+\mu)^6)\right]a_6x^7$$

Aus

$$(\tfrac{1}{2}-\lambda)^6+(\tfrac{1}{2}+\lambda)^6 = \frac{1+60\lambda^2+240\lambda^4+64\lambda^6}{32} \quad \text{und}$$

$$(\tfrac{1}{2}-\mu)^6+(\tfrac{1}{2}+\mu)^6 = \frac{1+60\mu^2+240\mu^4+64\mu^6}{32}$$

ergiebt sich nach einigen Umformungen mit Berücksichtigung von Nr. 3.

$$\Delta = \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{360}(51+2(\lambda^2+\mu^2))\right]a_6x^7.$$

Setzt man $\Delta = 0$, so ergiebt sich:

$$\lambda^2+\mu^2 = \frac{3}{14} \quad \text{und}$$

$$\lambda^2\mu^2 = \frac{3}{560} \quad \text{und hieraus}$$

$$\lambda^2-\mu^2 = \frac{1}{35}\sqrt{30} \quad \text{ferner:}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{15+\sqrt{120}}{140}} = 0{,}4305682 \quad \text{und}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{15-\sqrt{120}}{140}} = 0{,}1699905$$

Für F ergiebt sich:

$$5. \quad F = x\left(\left(\tfrac{1}{4}-\frac{\sqrt{30}}{72}\right)(y_0+y_3)+\left(\tfrac{1}{4}+\frac{\sqrt{30}}{72}\right)(z_0+z_1)\right)$$

$$\tfrac{1}{4}-\frac{\sqrt{30}}{72} = 0{,}17392742$$

$$\tfrac{1}{4}+\frac{\sqrt{30}}{72} = 0{,}32607258$$

Die Formel Nr. 5. ist die dritte der Gauss'schen Formeln.

Geht man zur Berechnung des Integrals F einer Function vierten Grades von den beiden Formeln:

$$6. \quad F_1 = \frac{x}{24\lambda^2}(y_0+2(12\lambda^2-1)y_1+y_2) \quad \text{und}$$

7. $F_2 = \frac{x}{24\mu^2}(z_0 + 2(12\mu^2 - 1)z_1 + z_2)$ aus, so sind nach §. 1.

8. $\Delta_1 = \frac{3 - 20\lambda^2}{240} a_4 x^5$ und

9. $\Delta_2 = \frac{3 - 20\mu^2}{240} a_4 x^5$ daher ist genau:

10. $\frac{F - F_1}{3 - 20\lambda^2} = \frac{F - F_2}{3 - 20\mu^2} = \frac{F_1 - F_2}{20(\lambda^2 - \mu^2)}$ und mithin

$F = \frac{(3 - 20\mu^2)F_1 - (3 - 20\lambda^2)F_2}{20(\lambda^2 - \mu^2)}$ und wenn man für F_1 und F_2 die Werte aus Nr. 6. und 7. einsetzt:

11. $$F = \frac{x}{480(\lambda^2 - \mu^2)\lambda^2\mu^2}((3\mu^2 - 20\mu^4)(y_0 + y_2) - (3\lambda^2 - 20\lambda^4)(z_0 + z_2) + 2(\lambda^2 - \mu^2)(240\lambda^2\mu^2 - 20(\lambda^2 + \mu^2) + 3)y_1)$$

Diese Formel ist nach der Entwickelung genau für eine Function vierten Grades für jedes λ und μ.

Wendet man die Formel Nr. 11. zur Berechnung des Integrals einer Function fünften Grades an, so ergiebt sich als Fehler am Integral:

$$\Delta = \left[\frac{1}{6} - \frac{2}{480(\lambda^2 - \mu^2)\lambda^2\mu^2}\left(\frac{(3\mu^2 - 20\mu^4)(1 + 40\lambda^2 + 80\lambda^4)}{16} + \frac{-(3\lambda^2 - 20\lambda^4)(1 + 40\mu^2 + 80\mu^4) + (\lambda^2 - \mu^2)(240\lambda^2\mu^2 - 2(\lambda^2 + \mu^2) + 3)}{16}\right)\right] a_5 x^6.$$

$$\Delta = \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{480\lambda^2\mu^2} \cdot \frac{1040\lambda^2\mu^2 + 20(\lambda^2 + \mu^2) - 3 + 240\lambda^2\mu^2 - 20(\lambda^2 + \mu^2) + 3}{16}\right] a_5 x^6 \text{ oder}$$

$$\Delta = \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{480} \cdot 80\right] a_5 x^6 = 0.$$

Die Formel Nr. 11. giebt also auch das Integral einer Function fünften Grades genau.

Wenn man die Formel Nr. 11. zur Berechnung des Integrals einer Function sechsten Grades anwendet, so ergiebt sich der Fehler Δ am Integral

$$\Delta = \left(\frac{1}{7} - \frac{135 + 12(\lambda^2 + \mu^2) - 80\lambda^2\mu^2}{960}\right) a_6 x^7.$$

Soll dieser Fehler gleich Null sein, so muss

12. $560\lambda^2\mu^2 - 84(\lambda^2+\mu^2) + 15 = 0$

sein. Wendet man nun die Formel Nr. 11. zur Berechnung des Integrals einer Function siebenten Grades an und zwar unter der Voraussetzung, dass zwischen λ und μ die Gleichung Nr. 12. besteht, so ergiebt sich der Fehler am Integral gleich Null. Setzt man $\lambda = \frac{1}{2}$, so ergiebt sich aus Nr. 12.: $\mu^2 = \frac{3}{28}$ und mit diesen Werten von λ und μ erhält man aus Nr. 11.

13. $F = \frac{x}{180}(9(y_0+y_4) + 64y_2 + 49(y_1+y_3))$,

welche Formel in §. 3. obwol auf längerem Wege gleichfalls resultirt.

Da die Formel Nr. 11., sobald zwischen λ und μ die Gleichung Nr. 12. besteht, genau für Functionen siebenten Grades ist, so wird es auch einen Wert für diese geben, für welchen die Formel Nr. 11. das genaue Integral einer Function achten Grades ist. Bei Anwendung der genannten Formel auf eine Function achten Grades ergiebt sich der Fehler am Integral:

$$\Delta = \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{35.480}(1865 + 6(\lambda^2+\mu^2))\right] a_8 x^9$$

wenn dabei die Gleichung Nr. 12. berücksichtigt wird.

Setzt man diesen Fehler gleich Null, so ergiebt sich:

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{5}{18}$$

und wegen Gleichung Nr. 12.

$$\lambda^2\mu^2 = \frac{5}{336} \quad \text{woraus}$$

$$\lambda^2 - \mu^2 = \frac{1}{63}\sqrt{70} \quad \text{und}$$

$$\lambda = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{35+\sqrt{280}}{7}} = 0{,}45308992$$

$$\mu = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{35-\sqrt{280}}{7}} = 0{,}26923466$$

Bringt man die Formel Nr. 11. für diese Werte von λ und μ auf die Form:

14. $F = x(K_0(y_0 + y_2) + K_1 y_1 + K_2(z_0 + z_2))$

so ergiebt sich aus Nr. 11.:

$$K_0 = \frac{322 - 13\sqrt{70}}{1800} = 0{,}11846344$$

$$K_1 = \frac{64}{225} = 0{,}28444444$$

$$K_2 = \frac{322 + 13\sqrt{70}}{1800} = 0{,}23931434$$

Die Formel Nr. 14. ist die vierte der Gauss'schen Formeln.

Sollen in Formel Nr. 4. die Factoren der Functionswerte gleich sein, so muss

$5(12\lambda^2 - 1)^2 = 4$ sein, woraus sich

$$\lambda = \frac{1}{30}\sqrt{75 + 30\sqrt{5}}$$

ergiebt. Man vergleiche diesen Fall in §. 1.

Wenn in Formel Nr. 11. die Factoren der Functionswerte gleich und alle positiv sein sollen, so muss:

a) $3 - 20\mu^2 = 96(\lambda^2 - \mu^2)\lambda^2$

b) $20\lambda^2 - 3 = 96(\lambda^2 - \mu^2)\mu^2$

c) $240\lambda^2\mu^2 - 20(\lambda^2 + \mu^2) + 3 = 48\lambda^2\mu^2$

sein. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{5}{24}$$

$$\lambda^2\mu^2 = \frac{7}{1152}$$

und hieraus die in der oben citirten Abhandlung für diesen Fall gegebenen Argumente der Ordinaten.

Wie man Formeln aus sieben und mehr Ordinaten in derselben Allgemeinheit wie die gegebenen herleiten kann, übersieht man aus dem Vorstehenden.

§. 3.

Soll angenähert

$$\int_0^x f(x)dx = x\left(K_0 f(0) + K_1 f(\mu_1 x) + K_2 f\left(\frac{x}{2}\right) + K_3 f(\mu_3 x) + K_4 f(x)\right)$$

ein, so hat man zur Bestimmung der Unbekannten die Gleichungen:

1. $K_1 + K_3 = 1 - K_0 - K_2 - K_4$

2. $K_1\mu_1 + K_3\mu_3 = \frac{1}{2} - \frac{K_2}{2} - K_4$

3. $K_1\mu_1^2 + K_3\mu_3^2 = \frac{1}{3} - \frac{K_2}{4} - K_4$

4. $K_1\mu_1^3 + K_3\mu_3^3 = \frac{1}{4} - \frac{K_2}{8} - K_4$

5. $K_1\mu_1^4 + K_3\mu_3^4 = \frac{1}{5} - \frac{K_2}{16} - K_4$

6. $K_1\mu_1^5 + K_3\mu_3^5 = \frac{1}{6} - \frac{K_2}{32} - K_4$

7. $K_1\mu_1^6 + K_3\mu_3^6 = \frac{1}{7} - \frac{K_2}{64} - K_4.$

Die Unbekannten μ_1 und μ_3 sind die Wurzeln einer Gleichung 2ten Grades:

$$\mu^2 + A_1\mu + A_2 = 0$$

Multiplicirt man die Gleichungen:

1, 2, 3
2, 3, 4
3, 4, 5
4, 5, 6
5, 6, 7

der Reihe nach mit A_2, A_1 und 1, und addirt je drei solcher Producte, so erhält man:

8. $A_2(1 - K_0 - K_2 - K_4) + A_1\left(\frac{1}{2} - \frac{K_2}{2} - K_4\right) + \frac{1}{3} - \frac{K_2}{4} - K_4 = 0$

9. $A_2\left(\frac{1}{2} - \frac{K_2}{2} - K_4\right) + A_1\left(\frac{1}{3} - \frac{K_2}{4} - K_4\right) + \frac{1}{4} - \frac{K_2}{8} - K_4 = 0$

10. $A_2\left(\frac{1}{3} - \frac{K_2}{4} - K_4\right) + A_1\left(\frac{1}{4} - \frac{K_2}{8} - K_4\right) + \frac{1}{5} - \frac{K_2}{16} - K_4 = 0$

11. $A_2\left(\frac{1}{4} - \frac{K_2}{8} - K_4\right) + A_1\left(\frac{1}{5} - \frac{K_2}{16} - K_4\right) + \frac{1}{6} - \frac{K_2}{32} - K_4 = 0$

12. $A_2\left(\frac{1}{5} - \frac{K_2}{16} - K_4\right) + A_1\left(\frac{1}{6} - \frac{K_2}{32} - K_4\right) + \frac{1}{7} - \frac{K_2}{64} - K_4 = 0.$

Aus 9, 10, 11 und aus 10, 11 und 12 ergiebt sich:

$$13.\quad K_4 \left[\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{3}-\frac{1}{4}K_2, & \frac{1}{4}-\frac{1}{8}K_2 \\ 1, & \frac{1}{4}-\frac{1}{8}K_2, & \frac{1}{5}-\frac{1}{16}K_2 \\ 1, & \frac{1}{5}-\frac{1}{16}K_2, & \frac{1}{6}-\frac{1}{32}K_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}K_2, & 1, & \frac{1}{4}-\frac{1}{8}K_2 \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4}K_2, & 1, & \frac{1}{5}-\frac{1}{16}K_2 \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{8}K_2, & 1, & \frac{1}{6}-\frac{1}{32}K_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}K_2, & \frac{1}{3}-\frac{1}{4}K_2, & 1 \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4}K_2, & \frac{1}{4}-\frac{1}{8}K_2, & 1 \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{8}K_2, & \frac{1}{5}-\frac{1}{16}K_2, & 1 \end{vmatrix} \right] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}K_2, & \frac{1}{3}-\frac{1}{4}K_2, & \frac{1}{4}-\frac{1}{8}K_2 \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4}K_2, & \frac{1}{4}-\frac{1}{8}K_2, & \frac{1}{5}-\frac{1}{16}K_2 \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{8}K_2, & \frac{1}{5}-\frac{1}{16}K_2, & \frac{1}{6}-\frac{1}{32}K_2 \end{vmatrix}$$

$$14.\quad K_4 \left[\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{4}-\frac{1}{8}K_2, & \frac{1}{5}-\frac{1}{16}K_2 \\ 1, & \frac{1}{5}-\frac{1}{16}K_2, & \frac{1}{6}-\frac{1}{32}K_2 \\ 1, & \frac{1}{6}-\frac{1}{32}K_2, & \frac{1}{7}-\frac{1}{64}K_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\frac{1}{4}K_2, & 1, & \frac{1}{5}-\frac{1}{16}K_2 \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{8}K_2, & 1, & \frac{1}{6}-\frac{1}{32}K_2 \\ \frac{1}{5}-\frac{1}{16}K_2, & 1, & \frac{1}{7}-\frac{1}{64}K_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\frac{1}{4}K_2, & \frac{1}{4}-\frac{1}{8}K_2, & 1 \end{vmatrix} \right] =$$

16. $K_4\left(\frac{1}{60^2}-\frac{K_2}{16.60}+\frac{K_2}{32.60}-\frac{1}{12.60}+\frac{K_2}{8.60}+0+\frac{1}{12.60}-\frac{K_2}{8.60}+0\right)=$

$$\frac{1}{12.60^2}+\frac{K_2}{8.60^2}-\frac{K_2}{96.60}+\frac{K_2}{192.60} \quad \text{und hieraus}$$

$$6K_4(8-15K_2)=4-9K_2.$$

17. $K_4\left(\frac{1}{60.210}-\frac{K_2}{32.70}+\frac{K_2}{64.60}-\frac{1}{15.210}+\frac{K_2}{16.70}-\frac{K_2}{64.60}+\frac{1}{60^2}-\right.$

$$\left.\frac{K_2}{16.60}+\frac{K_2}{32.60}\right)=\frac{1}{30.60.210}-\frac{K_2}{16.60.210}-\frac{K_2}{16.60.210}+\frac{K_2}{64.60.60},$$

und hieraus:

$$120K_4(8-15K_2)=64-135K_2.$$

Aus Nr. 16. und 17. erhält man:

$$K_2=\frac{16}{49},\quad K_4=\frac{1}{20}.$$

Ferner aus den andern Gleichungen:

$$K_1=K_3=\frac{49}{180};\quad K_0=\frac{1}{20}\quad \text{und}$$

$$A_1=-1,\quad A_2=\tfrac{1}{7}\ \text{und endlich:}$$

$$\mu_1=\tfrac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{28}};\quad \mu_3=\tfrac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{28}}$$

Es ist daher angenähert:

$$18.\quad \int_0^x f(x)\,dx=\frac{x}{180}\left[9(f(0)+f(x))+49(f(\mu_1 x))+64f\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Nach den aufgestellten Gleichungen sollte die Formel nur genau sein für Functionen 6ten Grades; dieselbe ist aber noch genau für Functionen 7ten Grades. Für eine Function 8ten Grades ist der Fehler $\Delta=-\frac{1}{3920.9}a_0x^9$, daher, bei irgend einer Function $f(x)$ das erste Glied des Fehlers gleich: $-\frac{x^9}{3920.9!}\cdot\frac{d^8f(x)}{dx^8}$.

Berechnet man nach Formel 18. das Integral

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\operatorname{logn}2=0{,}693147,$$

so ergiebt sich als Näherungswert: 0,693148.



§. 4.

Nach der Interpolationsformel von Lagrange hat man für drei Functionswerte: y_0, y_1 und y_2

1. $y_x = A_0 y_0 + A_1 y_1 + A_2 y_2$, wobei bekanntlich:

$$A_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$A_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad \text{und}$$

$$A_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung mit dx und integrirt zwischen den Grenzen 0 und x, so ergiebt sich nach gehöriger Umformung:

$$2.\quad F = \int_0^x y_x dx = \frac{x}{6(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \left[2x^2 \begin{vmatrix} 1, & x_0, & y_0 \\ 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \end{vmatrix} - 3x \begin{vmatrix} 1, & x_0^2, & y_0 \\ 1, & x_1^2, & y_1 \\ 1, & x_2^2, & y_2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} x_0, & x_0^2, & y_0 \\ x_1, & x_1^2, & y_1 \\ x_2, & x_2^2, & y_2 \end{vmatrix} \right]$$

Für $y_x = x^3$ ist $F = \frac{1}{4}x^4$. Foll für diesen Fall das Integral Nr. 2. genau sein, so muss, wenn $x_0 = \mu_0 x$; $x_1 = \mu_1 x$ und $x_2 = \mu_2 x$ gesetzt werden:

$$3.\quad \tfrac{3}{2}(\mu_1-\mu_0)(\mu_2-\mu_0)(\mu_2-\mu_1) = 2 \begin{vmatrix} 1, & \mu_0, & \mu_0^3 \\ 1, & \mu_1, & \mu_1^3 \\ 1, & \mu_2, & \mu_2^3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1, & \mu_0^2, & \mu_0^3 \\ 1, & \mu_1^2, & \mu_1^3 \\ 1, & \mu_2^2, & \mu_2^3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} \mu_0, & \mu_0^2, & \mu_0^3 \\ \mu_1, & \mu_1^2, & \mu_1^3 \\ \mu_2, & \mu_2^2, & \mu_2^3 \end{vmatrix}$$

sein.

4. Setzt man in Nr. 3. für μ_0, μ_1, μ_2 der Reihe nach $\frac{1}{2}-\lambda$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}+\lambda$, so ergiebt sich für diesen Fall, als Bedingung dafür; dass das Integral $\int_0^x x^3 dx$ durch Formel Nr. 2. genau gegeben wird:

$$3\lambda^3 =$$

$$2\begin{vmatrix} 1, & \tfrac{1}{2}-\lambda, & (\tfrac{1}{2}-\lambda)^3 \\ 1, & \tfrac{1}{2}, & \tfrac{1}{8} \\ 1, & \tfrac{1}{2}+\lambda, & (\tfrac{1}{2}+\lambda)^3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1, & (\tfrac{1}{2}-\lambda)^2, & (\tfrac{1}{2}-\lambda)^3 \\ 1, & \tfrac{1}{4}, & \tfrac{1}{8} \\ 1, & (\tfrac{1}{2}+\lambda)^2, & (\tfrac{1}{2}+\lambda)^3 \end{vmatrix} + 3(\tfrac{1}{4}-\lambda^2)\begin{vmatrix} 1, & \tfrac{1}{2}-\lambda, & (\tfrac{1}{2}-\lambda)^2 \\ 1, & \tfrac{1}{2}, & \tfrac{1}{4} \\ 1, & \tfrac{1}{2}+\lambda, & (\tfrac{1}{2}+\lambda)^2 \end{vmatrix}$$

Durch Entwickelung der Determinanten ergiebt sich:

$$3\lambda^3 = 3\lambda^3,$$

so dass die oben gestellte Bedingung für jedes λ erfüllt ist.

5. Wird in Nr. 2 für x_0, x_1, x_2 der Reihe nach $(\tfrac{1}{2}-\lambda)x$, $\frac{x}{2}$, $(\tfrac{1}{2}+\lambda)x$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$F = \frac{x}{12\lambda^2}\left[2\begin{vmatrix} y_0, & 1, & \tfrac{1}{2}-\lambda \\ y_1, & 1, & \tfrac{1}{2} \\ y_2, & 1, & \tfrac{1}{2}+\lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} y_0, & 1, & (\tfrac{1}{2}-\lambda)^2 \\ y_1, & 1, & \tfrac{1}{4} \\ y_2, & 1, & (\tfrac{1}{2}+\lambda)^2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} y_0, & \tfrac{1}{2}-\lambda, & (\tfrac{1}{2}-\lambda)^2 \\ y_1, & \tfrac{1}{2}, & \tfrac{1}{4} \\ y_2, & \tfrac{1}{2}+\lambda, & (\tfrac{1}{2}+\lambda)^2 \end{vmatrix}\right]$$

und hieraus nach Entwickelung der Determinanten:

6. $$F = \frac{x}{24\lambda^2}(y_0 + 2(12\lambda^2-1)y_1 + y_2).$$

Für jeden Wert von λ ergiebt sich eine Formel, welche das genaue Integral einer Function dritten Grades ist.

Für $\lambda = \tfrac{1}{2}$ ist

7. $$F = \frac{x}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Für $\lambda = \tfrac{1}{3}$

8. $$F = \frac{x}{8}(3(y_0+y_2) + 2y_1)$$

Für $\lambda = \tfrac{1}{4}$

9. $$F = \frac{x}{3}(2(y_0+y_2) - y_1)$$

Für $\lambda = \frac{3}{8}$

10. $$F = \frac{x}{27}(8(y_0+y_2) + 11y_1)$$

Für $\lambda = \frac{3}{10}$

11. $$F = \frac{x}{54}(25(y_0+y_2) + 4y_1)$$

Für $\lambda = \frac{2}{5}$

12. $$F = \frac{x}{96}(25(y_0 + y_2) + 46y_1) \quad \text{u. s. w.}$$

Wenn man in der Formel Nr. 6 den Factor von y_1 gleich Null setzt, so ergiebt sich $\lambda = \sqrt{\frac{1}{12}}$ und man hat:

13. $$F = \frac{x}{2}(y_0 + y_2),$$

welches die erste Gauss'sche Formel ist.

Wenn in Formel Nr. 6 der Factor von y_1 gleich 1 gesetzt wird, so ist $\lambda = \sqrt{\frac{1}{8}}$ und man hat:

14. $$F = \frac{x}{3}(y_0 + y_1 + y_2).$$

Soll bei Anwendung der Formel Nr. 6 auf eine Function vierten Grades der Fehler gleich Null werden, so muss

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{24\lambda^2}\left[(\tfrac{1}{2} - \lambda)^4 + (\tfrac{1}{2} + \lambda)^4 + \frac{2(12\lambda^2 - 1)}{2^4}\right]$$

sein. Aus dieser Gleichung ergiebt sich: $\lambda^2 = \frac{3}{20}$, also $\lambda = \sqrt{\frac{3}{20}}$ und somit ist:

15. $$F = \frac{x}{18}(5(y_0 + y_2) + 8y_1),$$

welches die zweite der Gauss'schen Formeln ist.

Wenn es nur darauf ankommt, die Formel Nr. 6 herzuleiten, ohne die Bedingung ihrer Gültigkeit zu geben, so kann man in folgender Weise verfahren.

Es sei

16. $$F_1 = xf\left(\frac{x}{2}\right)$$

17. $$F_2 = \frac{x}{2}\left[f\left(\frac{x}{2} - \lambda x\right) + f\left(\frac{x}{2} + \lambda x\right)\right],$$

welche Formeln genau sind für Functionen ersten Grades. Berechnet man das Integral einer Function 2ten Grades nach diesen Formeln, so hat man, wenn F das genaue Integral ist:

$$F - F_1 = \frac{x^3}{12} \quad \text{und}$$

$$F - F_2 = \frac{x^3(1-12\lambda^2)}{12}, \quad \text{daher ist}$$

$$\frac{F-F_1}{1} = \frac{F-F_2}{1-12\lambda^2} = \frac{F_2-F_1}{12\lambda^2} \quad \text{und}$$

$$F = F_1 + \frac{F_2-F_1}{12\lambda^2}$$

$$F = \frac{(12\lambda^2-1)F_1 + F_2}{12\lambda^2}$$

Setzt man die Werte von F_1 und F_2 in die letzte Formel ein und bezeichnet die Functionswerte wieder durch y_0, y_1 und y_2, so hat man die in Nr. 6 gegebene Formel.

§. 5.

Zusätze.

In §. 4. hatte ich gezeigt, dass, wenn

$$y_0 = f\left(\frac{x}{2} - \lambda x\right) \cdot \quad y_1 = f\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{und} \quad y_2 = f\left(\frac{x}{2} + \lambda x\right)$$

alsdann für jedes λ das Integral F einer Function dritten Grades gefunden wird durch:

$$1. \quad F = \frac{x}{24\lambda^2}(y_0 + 2(12\lambda^2-1)y_1 + y_2).$$

Diese Formel ist nur ein specieller Fall einer Formel, welche vier Functionswerte enthält. Zur Herleitung dieser Formel sei $f(x)$ zuerst eine Function ersten Grades und

$$y_0 = f\left(\frac{x}{2} - \lambda x\right), \quad y_1 = f\left(\frac{x}{2}\right), \quad y_2 = f\left(\frac{x}{2} + \lambda x\right)$$

und ebenso

$$z_0 = f\left(\frac{x}{2} - \mu x\right), \quad y_1 = f\left(\frac{x}{2}\right), \quad z_2 = f\left(\frac{x}{2} + \mu x\right)$$

alsdann ist y_1 die Mittellinie eines Trapezes und y_0, y_2 und z_0, z_2 sind gleich weit von dieser Mittellinie abstehende Parallelen. Setzt man



2. $F_1 = \frac{x}{2}(y_0 + y_2)$ und

3. $F_2 = \frac{x}{2}(z_0 + z_2)$,

so ist sowohl F_1 als F_2 der Inhalt dieses Trapezes. Es sei nun:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad \text{also}$$

4. $F = \int_0^x f(x)\,dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3}$.

Wendet man jede der Formeln Nr. 2 und Nr. 3 zur näherungsweisen Berechnung von F an, so wird nicht mehr $F_1 = F_2$, sondern es ergiebt sich:

5. $F - F_1 = \frac{a_2 x^3}{12}(1 - 12\lambda^2)$ und

6. $F - F_2 = \frac{a_2 x^3}{12}(1 - 12\mu^2)$;

hieraus durch Elimination von $a_2 x^3$:

7. $\frac{F - F_1}{1 - 12\lambda^2} = \frac{F - F_2}{1 - 12\mu^2} = \frac{F_1 - F_2}{12(\lambda^2 - \mu^2)}$, und somit

8. $F = F_1 + \frac{1 - 12\lambda^2}{12(\lambda^2 - \mu^2)}(F_1 - F_2)$ oder auch

$$F = \frac{(1 - 12\mu^2)F_1 - (1 - 12\lambda^2)F_2}{12(\lambda^2 - \mu^2)},$$

und wenn man für F_1 und F_2 die Functionswerte einführt:

9. $F = \frac{x}{24(\lambda^2 - \mu^2)}((1 - 12\mu^2)(y_0 + y_2) - (1 - 12\lambda^2)(z_0 + z_2))$.

Für $\mu = 0$ ist $z_0 = z_2 = y_1$ und es ergiebt sich für diesen Fall:

10. $F = \frac{x}{24\lambda^2}(y_0 + 2(12\lambda^2 - 1)y_1 + y_2)$, die Formel Nr. 1.

Nach der Entwickelung giebt diese Formel nur genaue Werte für das Integral einer Function zweiten Grades; es lässt sich aber zeigen, dass die Formel Nr. 9 auch das Integral einer Function dritten Grades genau giebt.

Es sei jetzt:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad \text{so ist:}$$

$$11.\quad F=\int_0^x f(x)\,dx = a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+a_3\frac{x^4}{4}.$$

Wenn die Formel Nr. 9 zur näherungsweisen Berechnung dieses Integrals angewendet wird und der Fehler am Integral gleich Δ ist, so ist:

$$12.\quad \Delta = \frac{a_3x^4}{4}-\frac{a_3x^4}{24(\lambda^2-\mu^2)}\left[\left(\left(\tfrac{1}{2}-\lambda\right)^3+\left(\tfrac{1}{2}+\lambda\right)^3\right)(1-12\mu^2)-\left(\left(\tfrac{1}{2}-\mu\right)^3+\left(\tfrac{1}{2}+\mu\right)^3\right)(1-12\lambda^2)\right]$$

$$=\frac{a_3x^4}{4}-\frac{a_3x^4}{24(\lambda^2-\mu^2)}\cdot\frac{(1+12\lambda^2)(1-12\mu^2)-(1+12\mu^2)(1-12\lambda^2)}{4}$$

$$=\frac{a_3x^4}{4}-\frac{a_3x^4}{24(\lambda^2-\mu^2)}\cdot\frac{24(\lambda^2-\mu^2)}{4}=0,$$

woraus folgt, dass die Formel Nr. 9 das Integral einer Function dritten Grades genau giebt.

Bei Anwendung der Formeln Nr. 2 und Nr. 3 auf eine Function zweiten Grades sind nach Nr. 5 und Nr. 6 die Fehler Δ_1 und Δ_2 gegeben durch

$$13.\quad \Delta_1=\frac{a_2x^3}{12}(1-12\lambda^2)\ \text{und}$$

$$\Delta_2=\frac{a_2x^3}{12}(1-12\mu^2).$$

Soll nun $\Delta_1=-\Delta_2$ sein, so muss

$$1-12\lambda^2=-(1-12\mu^2),\ \text{also:}$$

$$14.\quad \lambda^2+\mu^2=\frac{1}{6}\ \text{sein.}$$

Wenn λ und μ der Gleichung Nr. 14 genügen, so ist:

$$15.\quad F=\frac{F_1+F_2}{2}$$

Ist nun

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4\ \text{und}$$

$$16.\quad F=\int_0^x f(x)\,dx=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\frac{a_3x^4}{4}+\frac{a_4x^5}{5}\ \text{und}$$

$$17.\quad F_1=\frac{x}{24\lambda^2}(y_0+2(12\lambda^2-1)y_0+y_2),\ \text{sowie}$$

$$F_2=\frac{x}{24\mu^2}(z_0+2(12\mu^2-1)y_1+z_2),$$

so ist, wenn man F nach den Formeln in Nr. 17 berechnet und Fehler an F durch Δ_1 und Δ_2 bezeichnet, nach einer einfac Rechnung

18. $\Delta_1 = \frac{(3-20\lambda^2)}{240} a_4 x^5$ und

$$\Delta_2 = \frac{(3-20\mu^2)}{240} a_4 x^5.$$

Soll hierbei $\Delta_1 = -\Delta_2$ sein, so muss

$$3-20\lambda^2 = -(3-20\mu^2), \text{ also}$$

19. $\lambda^2 + \mu^2 = \frac{3}{10}$

sein. Besteht zwischen den λ und μ in Nr. 17 die Gleichung Nr. so ist:

20. $F = \frac{F_1 + F_2}{2}$.

Geht man von den beiden Formeln

21. $F_1 = \frac{x}{24(\lambda^2-\mu^2)}((1-12\mu^2)(y_0+y_2)-(1-12\lambda^2)(z_0+z_2))$

$$F_2 = \frac{x}{24(\lambda_1^2-\mu_1^2)}((1-12\mu_1^2)(\eta_0+\eta_2)-(1-12\lambda_1^2)(\zeta_0+\zeta$$

aus, um F in Nr. 16 näherungsweise zu berechnen, und bezeich wiederum Δ_1 und Δ_2 die Fehler am Integral, so ergiebt sich:

22. $\Delta_1 = \frac{3-20(\lambda^2+\mu^2)+240\lambda^2\mu^2}{240} a_4 x^5$

23. $\Delta_2 = \frac{3-20(\lambda_1^2+\mu_1^2)+240\lambda_1^2\mu_1^2}{240} a_4 x^5$

Soll nun $\Delta_1 = -\Delta_2$ sein, so hat man:

24. $120(\lambda^2\mu^2+\lambda_1^2\mu_1^2)-10(\lambda^2+\mu^2+\lambda_1^2+\mu_1^2)+3=0.$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist:

25. $F = \frac{F_1+F_2}{2}$.

Soll $\Delta_1 = 0$, also $F_1 = F$ werden, so muss die Gleichung

26. $240\lambda^2\mu^2-20(\lambda^2+\mu^2)+3=0$

erfüllt werden. Für $\lambda = \frac{1}{2}$ giebt Nr. 26: $\mu = \sqrt{\frac{1}{20}}$ und hieraus nach Formel 21:

$$27. \quad F = \frac{x}{12}(y_0 + y_2 + 5(z_0 + z_2))$$

Ist $\lambda = \frac{2}{5}$, so wird $\mu = \sqrt{\frac{1}{92}}$ und

$$28. \quad F = \frac{x}{2058}(500(y_0 + y_2) + 529(z_0 + z_2))$$

§. 6.

Die von mir in §. 5. gegebene Formel

$$1. \quad F = \frac{x}{24(\lambda^2 - \mu^2)}[(1 - 12\mu^2)(y_0 + y_2) - (1 - 12\lambda^2)(z_0 + z_2)],$$

welche für jedes λ und μ das genaue Integral einer Function dritten Grades ist, lässt sich auch in folgender Weise herleiten.

Es ist:

$$y_0 = f\left(\frac{x}{2} - \lambda x\right); \quad y_2 = f\left(\frac{x}{2} + \lambda x\right); \quad y_1 = f\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{und}$$

$$z_0 = f\left(\frac{x}{2} - \mu x\right); \quad z_2 = f\left(\frac{x}{2} + \mu x\right).$$

Wenn

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4,$$

so hat man

$$2. \quad \int_0^x f(x)\,dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} + a_4 \frac{x^5}{5}.$$

Es soll nun untersucht werden, wie viel Glieder des Ausdrucks:

$$3. \quad U = x(A(y_0 + y_2) + B(z_0 + z_2))$$

mit dem Integral in Nr. 2 übereinstimmend gemacht werden können. Da

$$f\left(\frac{x}{2} \pm hx\right) = a_0 + a_1(\tfrac{1}{2} \pm h)x + a_2(\tfrac{1}{2} \pm h)^2 x^2 + a_3(\tfrac{1}{2} \pm h)^3 x^3 + a_4(\tfrac{1}{2} \pm h)^4 x^4,$$

so erhält man:

$$4.\quad U = 2a_0(A+B)x + a_1(A+B)x^2 + a_2\left(\frac{A+B}{2} + 2(A\lambda^2+B\mu^2)\right)x^3 + a_3\left(\frac{A+B}{4} + 3(A\lambda^2+A\mu^2)\right)x^4 + a_4\left(\frac{A+B}{8} + 3(A\lambda^2+B\mu^2) + 2(A\lambda^4+B\mu^4)\right)x^5$$

Es ergiebt sich nun sofort, dass die vier ersten Glieder von $\int\limits_0^x f(x)dx$ und U übereinstimmend gemacht werden können. Die Gleichsetzung der Coefficienten von x und x^2 giebt die von einander abhängenden Gleichungen:

$$5.\quad 2(A+B) = 1 \quad \text{und} \quad 6.\quad A+B = \tfrac{1}{2}.$$

Setzt man für $A+B$ seinen Wert $\frac{1}{2}$ in den dritten und vierten Coefficienten von U und vergleicht die erhaltenen Ausdrücke mit den entsprechenden Coefficienten von $\int\limits_0^x f(x)\,dx$, so ergiebt sich:

$$7.\quad \tfrac{1}{4} + 2(A\lambda^2+B\mu^2) = \tfrac{1}{3} \quad \text{und} \quad 8.\quad \tfrac{1}{8} + 3(A\lambda^2+B\mu^2) = \tfrac{1}{4}.$$

Aus jeder dieser Gleichungen folgt:

$$A\lambda^2 + B\mu^2 = \frac{1}{24},$$

so dass man zur Bestimmung von A und B die beiden Gleichungen:

$$9.\quad A+B = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad 10.\quad A\lambda^2 + B\mu^2 = \frac{1}{24}$$

hat. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$11.\quad A = \frac{1-12\mu^2}{24(\lambda^2-\mu^2)} \quad \text{und} \quad 12.\quad B = -\frac{1-12\lambda^2}{24(\lambda^2-\mu^2)}.$$

Hieraus folgt, dass U oder F in Nr. 1 das genaue Integral einer Function dritten Grades ist. Wendet man die Formel Nr. 1 zur Berechnung des Integrals einer Function vierten Grades an, so ergiebt sich aus Nr. 2 und Nr. 4 der Fehler φ am Integral:

$$13.\quad \varphi = \tfrac{1}{5}a_4x^5 - a_4\left[\frac{A+B}{8} + 3(A\lambda^2+B\mu^2) + 2(A\lambda^4+B\mu^4)\right]x^5$$

Setzt man für A und B die gefundenen Werte ein, so entsteht:

$$14.\quad \varphi = \frac{3-20(\lambda^2+\mu^2)+240\lambda^2\mu^2}{240}a_4x^5, \text{ oder, wenn}$$

$$\Delta = 3-20(\lambda^2+\mu^2)+240\lambda^2\mu^2 \text{ gesetzt wird:}$$

$$\varphi = \frac{\Delta}{240}a_4x^5.$$

Hat man die beiden Formeln:

$$15. \quad F_1 = \frac{x}{24(\lambda_1^2 - \mu_1^2)}[(1-12\mu_1^2)(y_0+y_2)-(1-12\lambda_1^2)(z_0+z_2)]$$

$$16. \quad F_2 = \frac{x}{24(\lambda_2^2 - \mu_2^2)}[(1-12\mu_2^2)(\eta_0+\eta_2)-(1-12\lambda_2^2)(\zeta_0+\zeta_2)]$$

zur Berechnung des Integrals einer Function vierten Grades benutzt, so sind nach Nr. 14 die Fehler am Integral F gegeben durch:

$$17. \quad F - F_1 = \frac{\Delta_1}{240} a_4 x^5 \quad \text{und}$$

$$18. \quad F - F_2 = \frac{\Delta_2}{240} a_4 x^5, \quad \text{daher ist auch:}$$

$$19. \quad \frac{F-F_1}{\Delta_1} = \frac{F-F_2}{\Delta_2} \quad \text{und hieraus}$$

$$F = \frac{\Delta_2 F_1 - \Delta_1 F_2}{\Delta_2 - \Delta_1}$$

Die Formel Nr. 19 giebt nach der Herleitung das genaue Integral einer Function vierten Grades; dieselbe giebt aber auch, wie sogleich gezeigt werden soll, das genaue Integral einer Function fünften Grades.

Setzt man in Nr. 19 für F_1 und F_2 ihre Werte aus Nr. 15 und 16. ein, so entsteht:

$$20. \quad F = \frac{x}{24(\Delta_2 - \Delta_1)}\left[\frac{((1-12\mu_1^2)(y_0+y_2)-(1-12\lambda_1^2)(z_0+z_2))\Delta_2}{\lambda_1^2-\mu_1^2} - \frac{((1-12\mu_2^2)(\eta_0+\eta_2)-(1-12\lambda_2^2)(\zeta_0+\zeta_2))\Delta_1}{\lambda_2^2-\mu_2^2}\right]$$

Wendet man diese Formel zur Berechnung des Integrals einer Function fünften Grades an, so ergiebt sich nach einigen einfachen Umformungen der Fehler φ am Integral:

$$21. \quad \varphi = \tfrac{1}{6} a_5 x^6 - \frac{a^5 x^6}{24(\Delta_2 - \Delta_1)}\left[\frac{(16-\Delta_1)\Delta_2 - (16-\Delta_2)\Delta_1}{4}\right]$$

$$= \tfrac{1}{6} a_5 x^6 \left[1 - \frac{1}{4(\Delta_2 - \Delta_1)} \cdot \frac{16(\Delta_2 - \Delta_1)}{4}\right] = 0.$$

Wendet man die Formel Nr. 19 zur Berechnung des Integrals einer Function sechsten Grades an, so wird der Fehler am Integral nicht gleich Null.

Setzt man:

$$\lambda_1^2 + \mu_1^2 = p_1 \quad \text{und} \quad \lambda_2^2 + \mu_2^2 = p_2,$$

so ergiebt sich für den Fehler φ am Integral einer Function sechs[t]
Grades der Ausdruck:

$$22. \quad \varphi = \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{7} - \frac{4(p_1\varDelta_2 - p_2\varDelta_1) + 3(p_2 - p_1)\varDelta_1\varDelta_2}{6(\varDelta_2 - \varDelta_1)}\right) a_6 x^7.$$

$$= \frac{1}{5!}\delta . a_6 x^7.$$

Hat man nach zwei verschiedenen Formeln F_1 und F_2, welche [d]
Integral einer Function fünften Grades genau geben, das Integral ei[n]
Function sechsten Grades berechnet, so ergiebt sich wie in Nr. [
bis 19. das genaue Integral einer Function sechsten Grades:

$$23. \quad F = \frac{\delta_2 F_1 - \delta_1 F_2}{\delta_2 - \delta_1}.$$

Ist $\varDelta_1 + \varDelta_2 = 0$, oder $\delta_1 + \delta_2 = 0$, so ergiebt sich:

$$24. \quad F = \frac{F_1 + F_2}{2}.$$

In den früheren Abhandlungen habe ich bei Formeln mit drei Fu[nc]
tionswerten einige solcher Formeln abgeleitet, für welche $\varDelta_1 + \varDelta_2$[=]
war, die denselben entsprechenden Werte von λ_1 waren aber [
irrational und daher für die Rechnung unbequem.

Nach vielem Rechnen habe ich bei vier Functionswerten ein P[aar]
Formeln F_1 und F_2 gefunden, bei denen $\varDelta_1 + \varDelta_2 = 0$ ist, und di[e]
und μ rationale Werte haben.

Es ist nämlich:

$$\text{Für } \lambda_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{1}{10}, \quad \varDelta_1 = -\frac{8}{5}$$

$$\text{,,} \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{3}{10}, \quad \varDelta_2 = +\frac{8}{5}.$$

Diesen Werten entsprechen nach Nr. 1.

$$25. \quad F_1 = \frac{x}{72}[11(y_0 + y_2) + 25(z_0 + z_2)] \quad \text{und}$$

$$F_2 = \frac{x}{48}[-(\eta_0 + \eta_2) + 25(\zeta_0 + \zeta_2)].$$

Teilt man x in fünf gleiche Teile und bezeichnet die Functio[ns]
werte der Reihe nach durch:

$y_0, \; y_1, \; y_2, \; y_3, \; y_4, \; y_5$ so hat man auch:

26. $F_1 = \frac{x}{72}[11(y_0+y_5)+25(y_2+y_3)]$ und

$$F_2 = \frac{x}{48}[-(y_0+y_5)+25(y_1+y_4)].$$

Da es schwierig ist bequeme Formeln F_1 und F_2 zu finden, für welche $\varDelta_1+\varDelta_2=0$ oder $\delta_1+\delta_2=0$ ist, so habe ich einige einfache Formeln gesucht, bei denen $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, δ_1, δ_2, teils positiv, teils negativ sind, welche also auch Grenzen für die gesuchten Integrale geben, und durch deren Verbindung nach Nr. 19. und Nr. 23. sich der Wert des Integrals genauer berechnen lässt.

Ich gebe in dem Folgenden die einfachsten der gefundenen Formeln:

27. Für $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = 0$, $\varDelta = -2$

$$F = \frac{x}{6}(y_0+y_2+4y_1).$$

28. Für $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{12}$, $\varDelta = -\frac{31}{18}$

$$F = \frac{x}{70}(11(y_0+y_2)+24(z_0+z_2)).$$

29. Für $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{6}$, $\varDelta = -\frac{8}{9}$

$$F = \frac{x}{8}(y_0+y_2+3(z_0+z_2)).$$

30. Für $\lambda = \frac{5}{12}$, $\mu = 0$, $\varDelta = -\frac{17}{36}$

$$F = \frac{x}{25}(6(y_0+y_2)+13y_1).$$

31. Für $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{5}$, $\varDelta = -\frac{2}{5}$

$$F = \frac{x}{126}(13(y_0+y_2)+50(z_0+z_2)).$$

32. Für $\lambda = \frac{2}{5}$, $\mu = 0$, $\varDelta = -\frac{1}{5}$

$$F = \frac{x}{96}(25(y_0+y_2)+46y_1).$$

33. Für $\lambda = \frac{3}{8}$, $\mu = 0$, $\varDelta = +\frac{3}{16}$

$$F = \frac{x}{27}(8(y_0+y_2)+11y_1).$$

$$F = \frac{x}{8}(3(y_0 + y_2) + 2y_1).$$

36. Für $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{1}{6}$, $\Delta = +\frac{26}{27}$

$$F = \frac{x}{6}(2(y_0 + y_2) + z_0 + z_2).$$

37. Für $\lambda = \frac{1}{3}$, $\mu = \frac{1}{4}$, $\Delta = +\frac{43}{36}$

$$F = \frac{x}{14}(3(y_0 + y_2) + 4(z_0 + z_2)).$$

38. Für $\lambda = \frac{1}{4}$, $\mu = 0$, $\Delta = +\frac{7}{4}$

$$F = \frac{x}{3}(2(y_0 + y_2) - y_1).$$

trachtet man Nr. 30. als F_1 und Nr. 34. als F_2, so

39. $F = \frac{F_1 + F_2}{2} + \frac{F_1 - F_2}{70}$, $\delta = -\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{56}$.

mt man Nr. 27. als F_1 und Nr. 35. als F_2, so ent

10. $F = \frac{F_1 + F_2}{2} - \frac{11}{50}(F_1 - F_2)$, $\delta = +\frac{2}{9} \frac{1}{56}$.

nun Nr. 39. als F_1 und Nr. 40. als F_2 genomm

Nach Nr. 34.: $F = 0{,}69285714$

„ „ 35.: $F = 0{,}69264069$.

Hieraus nach Nr. 39. und 40.:

Aus Nr. 39.: $F = 0{,}69314791$

„ „ 40.: $F = 0{,}69314574$.

Mit Hülfe von Nr. 41. ergiebt sich aus den beiden vorstehenden Werten:

$$F = 0{,}69314748$$

während der genaue Wert: 0,69314718 beträgt.

Kiel im Januar 1875.

VII.

Ueber den Grebe'schen Punkt.

Von

Emil Hain.

I.

Verzeichnet man über den drei Seiten eines Dreieckes ABC Quadrate, verlängert die den Dreieckseiten parallelen Seiten der letzteren bis zur Erzeugung des dem ursprünglichen ähnlichen Drei-

$$\triangle G_a G_b G_c = \frac{12F^3}{(\Sigma a^2)^2}$$

Es ist nemlich:

$$\triangle G_b G G_c = \frac{2bF}{\Sigma a^2} \cdot \frac{2cF}{\Sigma a^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{2} = \frac{4F^3}{(\Sigma a^2)^2}$$

woraus sich zugleich nach Grebe ergibt, dass G der Schwerpunkt seines Normalenfusspunktdreieckes, des Dreieckes $G_a G_b G_c$, ist.

Setzen wir

$$\Sigma p_a^2 = g^2 = \frac{4F^2}{\Sigma a^2}$$

so können wir ferner schreiben:

$$\triangle G_a G_b G_c = \frac{3g^2}{\Sigma a^2} \cdot F$$

Der Umkreisradius eines jeden Dreieckes $G_a G G_b$ ist gleich der Hälfte der zugehörigen Ecktransversale durch G. Es ist nemlich:

$$\overline{G_a G_b}^2 = \frac{4F^2}{(\Sigma a^2)^2}(a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma) = \frac{4F^2}{(\Sigma a^2)^2} \cdot 4s_c^2$$

also:

$$G_a G_b = \frac{4F}{\Sigma a^2} \cdot s_c$$

woraus sich ergibt, dass das Dreieck $G_a G_b G_c$ demjenigen Dreieck ähnlich ist, das aus den Seitenhalbirenden des Urdreieckes gebildet ist.

Es ist nun:

$$G_a G . G_b G . G_a G_b = \frac{2aF}{\Sigma a^2} \cdot \frac{2bF}{\Sigma a^2} \cdot \frac{4F^2 s_c}{\Sigma a^2} = \frac{16ab s_c F^4}{(\Sigma a^2)^3}$$

Bezeichnen wir mit r_c den Umkreisradius des Dreieckes $G_a G G_b$, so haben wir:

$$r_c = \frac{16ab s_c F^4}{(\Sigma a^2)^3} : 4\triangle G_a G G_b = \frac{16ab s_c F^4}{(\Sigma a^2)^3} : \frac{16F^3}{(\Sigma a^2)^2} = \frac{ab s_c}{\Sigma a^2} = \tfrac{1}{2} GC$$

Sind nun $S_a S_b S_c$ die Fusspunkte der vom Schwerpunkt S des Urdreieckes auf dessen Seiten gefällten Normalen, so ist auch der Umkreisradius eines jeden Dreieckes $S_a S S_b$ gleich der Hälfte der zugehörigen Ecktransversale durch S. (Archiv LVI. S. 101.).

III.

Das Dreieck aus den Schnittpunkten der Ecktransversalen des Grebe'schen Punktes mit den Gegenseiten hat zum Flächeninhalt den Ausdruck:

$$\frac{2a^2b^2c^2}{\Pi(a^2+b^2)}\cdot F$$

Es treffe AG die Seite BC in A'. Die Normalen von A' auf a, b, c seien $x_{aa}x_{ab}x_{ac}$; die von A und G auf a bzhw. h_a und g_a. Die Figur gibt dann:

$$\frac{x_{ac}}{g_c} = \frac{AA'}{AG} = \frac{h_a}{h_a - g_a} \quad \text{woraus}$$

$$x_{ac} = \frac{g_c h_a}{h_a - g_a} = \frac{2cF}{b^2+c^2}.$$

Es ist also:

$$\triangle A'B'C' = \frac{r}{2F}\begin{vmatrix} x_{aa} & x_{ab} & x_{ac} \\ x_{ba} & x_{bb} & x_{bc} \\ x_{ca} & x_{cb} & x_{cc} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{r}{2F}\cdot\frac{8abcF^3}{[\Pi(a^2+b^2)]^2}\begin{vmatrix} 0 & (a^2+b^2)(a^2+c^2) & (a^2+b^2)(a^2+c^2) \\ (a^2+b^2)(b^2+c^2) & 0 & (a^2+b^2)(b^2+c^2) \\ (b^2+c^2)(c^2+a^2) & (b^2+c^2)(c^2+a^2) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{8abcrF^2}{\Pi(a^2+b^2} = \frac{2a^2b^2c^2}{\Pi(a^2+b^2)}\cdot F$$

IV.

Es ist der Flächeninhalt des Dreieckes zu bestimmen, welches die Harmonikalen des Inkreiscentrums, Höhenpunktes und Grebe'schen Punktes bilden.

Diese drei Geraden haben beziehungsweise die Gleichungen:

$$\Sigma x_a = \Sigma \cos\alpha\, x_a = \Sigma bc x_a = 0$$

ψ sei der gesuchte Flächeninhalt, es ist dann:

$$\psi = abcF\cdot\frac{D^2}{D_1D_2D_3} \quad \text{wo}$$

$$D = \begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ 1 & 1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ a & b & c \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ bc & ca & ab \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Sind S, J, U Schwerpunkt, In- und Umkreiscentrum, so hat man:

$$\triangle SJU = \frac{r}{2F}\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\frac{F}{a} & \frac{2}{3}\frac{F}{b} & \frac{2}{3}\frac{F}{c} \\ \varrho & \varrho & \varrho \\ r\cos\alpha & r\cos\beta & r\cos\gamma \end{vmatrix} = \frac{r^2\varrho}{3abc}\cdot D$$

$$\triangle SJG = \frac{r}{2F}\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\frac{F}{a} & \frac{2}{3}\frac{F}{b} & \frac{2}{3}\frac{F}{c} \\ \varrho & \varrho & \varrho \\ \frac{2aF}{\Sigma a^2} & \frac{2bF}{\Sigma a^2} & \frac{2cF}{\Sigma a^2} \end{vmatrix} = \frac{\varrho}{6\Sigma a^2}\cdot D_1$$

$$\triangle JUG = \frac{r}{2F}\begin{vmatrix} \varrho & \varrho & \varrho \\ r\cos\alpha & r\cos\beta & r\cos\gamma \\ \frac{2aF}{\Sigma a^2} & \frac{2bF}{\Sigma a^2} & \frac{2cF}{\Sigma a^2} \end{vmatrix} = \frac{r^2\varrho}{\Sigma a^2}\cdot D_2$$

$$\triangle USG = \frac{r}{2F}\begin{vmatrix} r\cos\alpha & r\cos\beta & r\cos\gamma \\ \frac{2}{3}\frac{F}{a} & \frac{2}{3}\frac{F}{b} & \frac{2}{3}\frac{F}{c} \\ \frac{2aF}{\Sigma a^2} & \frac{2bF}{\Sigma a^2} & \frac{2cF}{\Sigma a^2} \end{vmatrix} = \frac{r}{6\Sigma a^2}\cdot D_3$$

woraus:

$$D = \frac{3abc}{r^2\varrho}\triangle SJU$$

$$D_1 = \frac{6\Sigma a^2}{\varrho}\triangle SJG$$

$$D_2 = \frac{\Sigma a^2}{r^2\varrho}\triangle JUG$$

$$D_3 = \frac{6\Sigma a^2}{r}\triangle USG$$

Nach erfolgter Substitution erhalten wir:

$$\psi = \frac{a^2b^2c^2}{(\Sigma a^2)^3}\,\frac{(\triangle ABC)^2.(\triangle SJU)^2}{\triangle SJG.\triangle JUG.\triangle USG}$$

V.

Werden vom Grebe'schen Punkt eines Dreieckes zu den Ecken Gerade gezogen und die Höhenpunkte der so

entstandenen Dreiecke mit einander verbunden, so hat dieses Dreieck der Höhenpunkte mit dem Urdreieck gleichen Flächeninhalt.

Es sei H_a der Höhenpunkt des Dreieckes BGC, Winkel $BGC = \alpha'$; wir haben dann:

$$H_a G = a \cot \alpha', \qquad \text{Winkel } H_a G H_b = 2R - \gamma$$

$$\triangle H_a G H_b = \frac{ab \sin \gamma}{2} \cot \alpha' \cot \beta' = F \cot \alpha' \cot \beta'$$

$$\triangle H_a H_b H_c = F \Sigma \cot \alpha' \cot \beta'$$

Nun ist

$$\cot \alpha' = \frac{b^4 + c^4 - a^4 - 4b^2c^2}{4F\Sigma a^2}$$

$$16F^2(\Sigma a^2)^2 \cot \alpha' \cot \beta' = c^8 - a^8 - b^8 + 4a^2b^2c^2(4c^2 - a^2 - b^2)$$
$$+ 2a^4b^4 - 4c^6(a^2 + b^2) + 4c^2(a^6 + b^6)$$

$$16F^2(\Sigma a^2)^2 \Sigma \cot \alpha' \cot \beta' = 2\Sigma a^4b^4 - \Sigma a^8 + 8a^2b^2c^2\Sigma a^2$$
$$= 8a^2b^2c^2\Sigma a^2 + 4\Sigma a^4b^4 - (\Sigma a^8 + 2\Sigma a^4b^4)$$
$$= [2\Sigma a^2b^2]^2 - [\Sigma a^4]^2$$
$$= [2\Sigma a^2b^2 + \Sigma a^4] \times [2\Sigma a^2b^2 - \Sigma a^4] = 16F^2(\Sigma a^2)^2$$

also:

$$\Sigma \cot \alpha' \cot \beta' = 1$$

VI.

Verlängern wir die Höhen auf abc über ihre Schnittpunkte mit den Seiten bzhw. um $a'b'c'$ und fällen auf jede Höhe in dem Endpunkt ihrer Verlängerung eine Senkrechte, so erhält man ein dem ursprünglichen ähnliches Dreieck $A'B'C'$. Suchen wir die Normalen des Homologiepunktes der Dreiecke ABC und $A'B'C'$. Die zu b und c parallelen Seiten des letzteren Dreieckes schneiden sich in A'. Die Coordinaten von A' seien $x_{aa}\, x_{ab}\, x_{ac}$. Es ist dann:

$$x_{ab} = b', \qquad x_{ac} = c'.$$

Die Verbindungsgerade der Punkte ξ_a und ξ_a' hat die Gleichung:

$$\Sigma x_a (\xi_b \xi_c' - \xi_c \xi_b') = 0$$

Die Coordinaten von A sind bc, 0, 0; also ist:

$$AA' \equiv c'x_b - b'x_c = 0$$

Schneiden sich zwei Gerade

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0, \quad a_2 x_a + b_2 x_b + c_2 x_c = 0$$

in dem Punkte X_a, so ist:

$$X_a = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}} \cdot 2F$$

Für

$$AA' \equiv c' x_b - b' x_c, \quad BB' \equiv a' x_c - c' x_a$$

hat man

$$b_1 c_2 - b_2 c_1 = a' c'$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & +c' & -b' \\ -c' & 0 & +a' \\ +a & +b & +c \end{vmatrix} = c'(aa' + bb' + cc')$$

also:

$$X_a = \frac{2a'F}{\Sigma aa'}$$

Setzen wir nun $a' = \pm a$, so erhalten wir den Grebe'schen Punkt, der also nach I. construirt wird, wenn man über den Seiten des Dreieckes Quadrate beschreibt. Es kann dies nun entweder nach Innen oder Aussen geschehen. Ist

$$a' = n h_a = n \frac{2F}{a}$$

so ist

$$X_a = \frac{2F}{3a}$$

d. h.

Sind die Abstände je zweier paralleler Seiten zweier in einander ähnlich liegenden Dreiecke den Höhen des einen dieser Dreiecke proportional, so ist der Schwerpunkt dieses Dreieckes der Homologiepunkt beider.

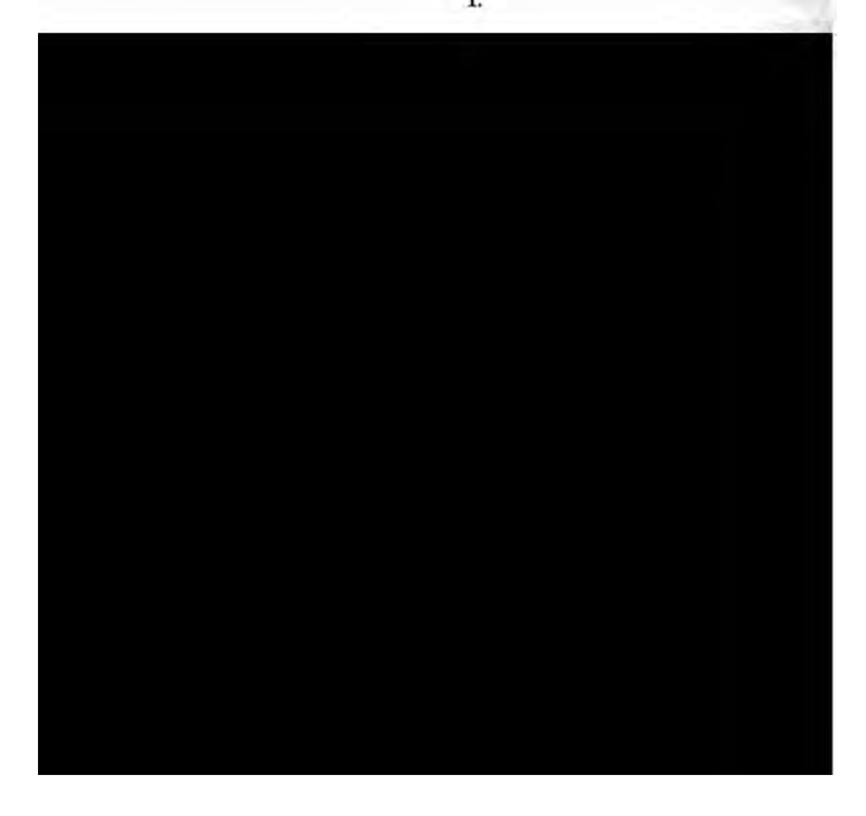
VIII.

Ueber die Winkelhalbirenden des Dreiecks.

Von

Emil Hain.

I.



$$\triangle A_1' B_1' C_1' = 0$$

weshalb die Punkte A_1' in einer Geraden liegen.

Die Gleichung der Verbindungsgeraden zweier Punkte $\mathfrak{x}_i$ und $\mathfrak{y}_i'$ ist:

$$\Sigma x_a(\mathfrak{y}_b \mathfrak{z}_c' - \mathfrak{y}_b' \mathfrak{z}_c) = 0$$

Danach findet man:

$$A_1' B_1' \equiv x_a + x_b + x_c = 0$$

Dies ist aber die Gleichung der Harmonikalen des Inkreiscentrums; folglich liegen die Schnittpunkte der äusseren Winkelhalbirenden mit den Gegenseiten in derjenigen Geraden, in welcher die Verbindungsgeraden der Fusspunkte je zweier inneren Winkelhalbirenden die zugehörigen Gegenseiten treffen.

II.

Die Fläche des von den äussern Winkelhalbirenden gebildeten Dreieckes ist gleich der Fläche des Rechteckes aus dem Umfang des Urdreieckes und dem Umkreisradius desselben.

Bezeichnen wir den Schnittpunkt von BB_1' und CC_1' mit $\mathfrak{A}$, so liegen die Punkte A, A_1, $\mathfrak{A}$ in einer Geraden. Ferner steht AA_1 senkrecht auf $\mathfrak{BC}$. Daraus ergibt sich, dass die inneren Winkelhalbirenden des Urdreieckes die Höhen des Dreieckes $\mathfrak{ABC}$ sind d. h. dass das Dreieck ABC das Höhenfusspunktdreieck des Dreieckes $\mathfrak{ABC}$ ist.

Es ist also:

$$a = \mathfrak{BC} \cos \mathfrak{A} = \mathfrak{BC} \sin \frac{\alpha}{2}$$

wo $\alpha = CAB$

und:

$$\triangle \mathfrak{ABC} = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{b}{\sin \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{2} = 2rs$$

Nach den Eigenschaften des Höhenfusspunktdreieckes ist ferner der Umkreisradius des von den äusseren Winkelhalbirenden gebildeten Dreiecks zweimal so gross als derselbe Radius des Urdreieckes.

Wenn vom Umkreiscentrum des Urdreieckes auf dessen Seiten Senkrechte gezogen und bis zur Peripherie des Umkreises verlängert

werden, so bestimmen diese Peripheriepunkte ein dem Dreieck $\mathfrak{ABC}$ ähnliches und viermal kleineres Dreieck.

Wenn vom Inkreiscentrum des Urdreieckes auf dessen Seiten Senkrechte gezogen werden, so bilden die Fusspunkte derselben $A'B'C'$ als Ecken ein ebenfalls dem Dreieck $\mathfrak{ABC}$ ähnliches Dreieck, so dass

$$\triangle ABC = \sqrt{\triangle \mathfrak{ABC} \,.\, \triangle A'B'C'}$$

(Archiv LVI. 102.)

III.

Sind a_1 die Abstände der Ecken des Urdreieckes von den ihnen gegenüberliegenden Seiten $B_1 C_1$ des Fusspunktdreieckes der inneren Winkelhalbirenden und a' die Abstände des Inkreiscentrums von den Seiten $B_1 C_1$ desselben Dreieckes, so ist:

$$\Sigma a a_1 = \Sigma a \,.\, \Sigma a'$$

Der Abstand eines Punktes P, dessen Normale auf a mit p_a bezeichnet sei, von der Geraden

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

wird ausgedrückt durch:

$$\frac{\Sigma a_1 p_a}{\sqrt{\Sigma a_1^2 - 2 \Sigma a_1 b_1 \cos\gamma}}$$

Es ist nun

$$B_1 C_1 \equiv x_b + x_c - x_a$$

Ferner ist für A

$$p_a = \frac{2F}{a}, \quad p_b = p_c = 0$$

und für J als das Inkreiscentrum

$$p_a = p_b = p_c = \varrho$$

Somit ist:

$$a_1 : a' = \frac{2F}{a} : \varrho$$

$$a a_1 = \frac{2a'F}{\varrho} = a' \Sigma a$$

$$\Sigma a a_1 = \Sigma a \,.\, \Sigma a'.$$

IV.

Die Harmonikale des Inkreiscentrums ist parallel der Polare dieses Punktes in Bezug auf den Umkreis.

Die Gleichung des Umkreises in trimetrischen Coordinaten ist:

$$\Sigma a x_b x_c = 0$$

Dann hat die Polare eines Punktes ξ_a in Bezug auf diesen Kreis die Gleichung:

$$\Sigma x_a (b\xi_c + c\xi_b) = 0$$

für $\xi_a = \xi_b = \xi_c = 1$ hat man dann:

$$\Sigma x_a (b + c) = 0$$

Die Gleichung der Harmonikalen des Inkreiscentrums ist aber:

$$\Sigma x_a = 0$$

Nun sind zwei Gerade:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$
$$a_2 x_a + b_2 x_b + c_2 x_c = 0$$

parallel, wenn die Determinante $\Sigma a (b_1 c_2 - b_2 c_1)$ Null wird, was in der Tat für die Geraden

$$\Sigma x_a (b + c) = 0 = \Sigma x_a$$

geschieht. Denn es ist:

$$\Sigma a (b - c) = 0$$

Derselbe Satz lässt sich auch noch anders ausdrücken. Für den Punkt $\xi_a = bc$, d. i. für den Schwerpunkt des Urdreieckes hat man als Gleichung seiner Polare in Bezug auf dem Umkreis

$$\Sigma x_a (b\xi_c + c\xi_b) = \Sigma x_a = 0$$

Es ist also die Harmonikale des Inkreiscentrums zugleich die Polare des Schwerpunktes in Bezug auf den Umkreis. Die Umkreispolaren des Schwerpunktes und Inkreiscentrums sind also einander parallel.

V.

Die Normalen des Poles der Harmonikalen des Inkreiscentrums in Bezug auf den Umkreis sind zu bestimmen.

Schneidet die äussere Winkelhalbirende w_a' die Seite a in A_1', d. i. im Punkte (0, +1, −1), so liegen die $A^{1'}$ in der Harmonikalen des Inkreiscentrums. Es schneiden sich also die Umkreispolaren der A_1' in dem Punkt, dessen Normalen gesucht werden sollen. Nach IV. sind die Umkreispolaren von A_1' und B_1'

$$(b-c)x_a+ax_b-ax_c=0$$
$$-bx_a+(c-a)x_b+bx_c=0$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Coordinaten ξ_a des Schnittpunktes beider Geraden, nämlich:

$$\xi_a=a(b+c-a)$$

Die Normale des Punktes ξ_a auf a hat dann die Länge $\lambda\xi_a$, wenn

$$\lambda\Sigma a^2(b+c-a)=2F$$

Der Pol der Harmonikalen des Inkreiscentrums in Bezug auf den Umkreis hat also zum Abstand von der Seite a den Ausdruck:

$$\frac{2Fa(b+c-a)}{\Sigma a^2(b+c-a)}$$

VI.

Die von je zwei Fusspunkten der inneren Winkelhalbirenden und dem Schnittpunkt derselben als Ecken gebildeten Dreiecksflächen sind den Summen je zweier Seiten des Urdreieckes proportional.

Nach den früheren Bezeichnungen ist:

$$JA_1\equiv x_b-x_c$$
$$JB_1\equiv x_c-x_a$$
$$A_1B_1\equiv x_a+x_b-x_c$$

Es ist dann:

$$\triangle JA_1B_1=\frac{abcF.D^2}{D_1D_2D_3}$$

wo

$$D=\begin{vmatrix}0 & +1 & -1\\ -1 & 0 & +1\\ +1 & +1 & -1\end{vmatrix}=+1$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & +1 & -1\\ -1 & 0 & +1\\ a & b & c\end{vmatrix}=a+b+c$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -(a+c)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} +1 & +1 & -1 \\ 0 & +1 & -1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = b+c$$

Somit ist:

$$\triangle JA_1B_1 = \frac{abcF}{(a+b+c)\Pi(a+b)} \cdot (a+b)$$

$$\triangle JA_1B_1 : \triangle JB_1C_1 : \triangle JC_1A_1 = a+b : b+c : c+a$$

VII.

Die Verbindungsgeraden der Halbirungspunkte der Seiten eines Dreieckes und der zugehörigen inneren Winkelhalbirenden schneiden sich in einem Punkt.

Die Verbindungsgerade der Mitten von AA_1 und BC, d. i. der Punkte $(b+c, a, a)$ und $(0, c, b)$ hat die Gleichung

$$a(b+c)x_a - b(b+c)x_b + c(b+c)x_c = 0$$

Diese drei Geraden bilden ein Dreieck, dessen Fläche =

$$\frac{abcF.D^2}{D_1D_2D_3}$$

Hier ist:

$$D = abc \begin{vmatrix} +(b-c), & -(b+c), & +(b+c) \\ +(c+a), & +(c-a), & -(c+a) \\ -(a+b), & +(a+b), & +(a-b) \end{vmatrix}$$

Diese Determinante kann in zwei Determinanten zerlegt werden, deren Summe Null ist.

Jede der Determinanten des Nenners reducirt sich auf

$$4abc\Sigma ab$$

Es gilt also der so bewiesene Satz ohne alle Einschränkung.

Wien, den 6. Jänner 1875.

IX.

Miscellen.

1.

Herleitung der von l'Huilier gegebenen Formel für den sphärischen Excess.

Bezeichnen A, B, C die Winkel und α, β, γ die Seiten ein sphärischen Dreiecks und ist

$$A+B+C=180+2E, \quad \text{sowie} \quad \alpha+\beta+\gamma=2\sigma,$$

so ist

$$E=\frac{A+B+C}{2}-90 \quad \text{und daher}$$

$$1, \quad \cos E=\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C)$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\frac{C}{2}+\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\frac{C}{2}.$$

Nach den Gauss'schen Gleichungen ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \quad \text{und}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \quad \text{mithin wegen Nr. 1.}$$

$$2, \quad \cos E=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{C^2}{2}+\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{C^2}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

a $\mathrm{tg}\frac{E^2}{2}=\frac{1-\cos E}{1+\cos E}$, so ist auch

$$3.\quad \mathrm{tg}\frac{E^2}{2}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{C^2}{2}-\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{C^2}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{C^2}{2}+\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{C^2}{2}}.$$

setzt man statt $\cos\frac{\gamma}{2}$, $\left(\sin\frac{C^2}{2}+\cos\frac{C^2}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}$, so ergiebt sich:

$$4.\quad \mathrm{tg}\frac{E^2}{2}=\frac{-\left(\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\cos\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{C^2}{2}+\left(\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)\cos\frac{C^2}{2}}{\left(\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\cos\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{C^2}{2}+\left(\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)\cos\frac{C^2}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\sigma-\gamma}{2}\sin\frac{C^2}{2}-\sin\frac{\sigma-\alpha}{2}\sin\frac{\sigma-\beta}{2}\cos\frac{C^2}{2}}{\cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\sigma-\gamma}{2}\sin\frac{C^2}{2}+\cos\frac{\sigma-\alpha}{2}\cos\frac{\sigma-\beta}{2}\cos\frac{C^2}{2}}.$$

Da

$$\sin\frac{C^2}{2}=\frac{\sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{4\sin\frac{1}{2}(\sigma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\sigma-\beta)\cos\frac{1}{2}(\sigma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\sigma-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\quad\text{und}$$

$$\cos\frac{C^2}{2}=\frac{\sin\sigma\sin(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$=\frac{4\sin\frac{\sigma}{2}\sin\frac{1}{2}(\sigma-\gamma)\cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{1}{2}(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

so ergiebt sich aus Nr. 4.

$$5.\quad \mathrm{tg}\frac{E^2}{2}=\mathrm{tg}\frac{\sigma}{2}\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\sigma-\alpha)\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\sigma-\beta)\mathrm{tg}\frac{1}{2}(\sigma-\gamma)$$

$$\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\sigma-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\sigma-\beta)-\cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{1}{2}(\sigma-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\sigma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\sigma-\beta)+\sin\frac{\sigma}{2}\sin\frac{1}{2}(\sigma-\gamma)}.$$

Wegen: $\frac{\sigma-\alpha}{2}+\frac{\sigma-\beta}{2}=\frac{\sigma}{2}-\frac{\sigma-\gamma}{2}$ ist auch

$$\cos\left(\frac{\sigma-\alpha}{2}+\frac{\sigma-\beta}{2}\right)=\cos\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{\sigma-\gamma}{2}\right),\quad\text{d. i.}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\beta)-\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\beta)$$
$$=\cos\frac{\sigma}{2}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\gamma)+\sin\frac{\sigma}{2}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\gamma$$

mithin auch:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\alpha)\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\beta)-\cos\frac{\sigma}{2}\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\gamma)$$
$$=\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\beta)+\sin\frac{\sigma}{2}\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-$$

woraus folgt, dass der letzte Factor in Formel Nr. 5. gleich 1 i
Zieht man aus Nr. 5. die Quadratwurzel, so erhält man:

$$6.\quad \operatorname{tg}\frac{E}{2}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\;\tfrac{1}{2}(\sigma-\alpha)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\sigma-\beta)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\sigma-\gamma)}$$

Kiel im März 1875. Ligowski.

2.

Trisection eines beliebigen Winkels mit Hülfe der gleichseitige Hyperbel.

1. Der in drei gleiche Teile zu teilende Winkel $\angle AOB$ (s. d. Fi
sei zuerst ein spitzer. Man ziehe OH senkrecht auf OB, construi
eine gleichseitige Hyperbel, für die OH und OB Asymptoten sin
Mache $AD = 2.OA = AC$, halbire AD in E, ziehe OE, so ist

$$\angle EOB = \tfrac{1}{3}\angle AOB.$$

Beweis: Bekanntlich ist $AG = DF$,
nach Construction ist $AE = ED$
mithin ist $EG = EF$.

Da nun $\triangle GOF$ rechtwinklig ist, so ist

auch $OE = EF$; mithin $\angle AEO = 2\angle EOF$.

Nun war aber nach Construction $AD = 2AO$, mithin $AE = A$
demnach

$$\angle AEO = \angle AOE \text{ also auch } \angle AOE = 2\angle EOF$$
$$\text{d. h. } \angle EOF = \tfrac{1}{3} AOB.$$

2. Ist der in drei gleiche Teile zu teilende Winkel ein stumpfe
so halbire man diesen, teile den dadurch entstandenen spitzen in
gleiche Teile und nehme 2 solcher Teile.

Berlin, den 9. Mai 1875. F. Kosch, Ingenieur.

3.

Démonstration de la propriété fondamentale des équations différentielles linéaires.

Considérons pour plus de simplicité, une équation linéaire du quatrième ordre:

$$y^{IV} + A_1 y''' + A_2 y'' + A_3 y' + A_4 y = 0 \tag{1}$$

où A_1, A_2, A_3, A_4 sont des fonctions de x. Supposons que z_0 soit une solution particulière de l'équation (1), de manière que

$$z^{IV} + A_1 z''' + A_2 z'' + A_3 z' + A_4 z = 0. \tag{2}$$

Posons

$$u = y' - \frac{z'}{z} y, \quad v = uz.$$

Je dis qu'en prenant u, ou v, pour nouvelle variable dépendante, l'équation (1)se réduira au troisième ordre. On a, en effet,

$$v = zy' - z'y, \tag{3}$$

$$v' = (zy'' + z'y') - (z'y' + z''y), \tag{4}$$

$$v'' = (zy''' + 2z'y'' + z''y') - (z'y'' + 2z''y' + z'''y), \tag{5}$$

$$v''' = (zy^{IV} + 3z'y''' + 3z''y'' + z'''y') - (z'y''' + 3z''y'' + 3z'''y' + z^{IV}y) \tag{6}$$

Eliminons y^{IV}, y''', y'', y' entre les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6). Il viendra:

$$\begin{vmatrix} 1, & A_1, & A_2, & A_3, & A_4 y \\ 0, & 0, & 0, & \left\{\begin{matrix} z \\ \end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix} \\ -z'y - v \end{matrix}\right\} \\ 0, & 0. & \left\{\begin{matrix} z \\ \end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix} +z' \\ -z' \end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix} \\ -z''y - v' \end{matrix}\right\} \\ 0, & \left\{\begin{matrix} z \\ \end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix} 2z' \\ -z' \end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix} z'' \\ -2z'' \end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix} \\ -z'''y - v'' \end{matrix}\right\} \\ \left\{\begin{matrix} z \\ \end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix} 3z' \\ -z' \end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix} 3z'' \\ -z' \end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix} z''' \\ -3z''' \end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix} \\ -z^{IV}y - v''' \end{matrix}\right\} \end{vmatrix} = 0$$

Multiplions la dernière colonne du déterminant par $\frac{z}{y}$; ajoutons y_0 les autres multipliées respectivement par z^{IV}, z''', z'', z', il viendra 0, d'après les propriétés des coëfficients du binôme:

$$\begin{vmatrix} 1, & A_1, & A_2, & A_3, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & z, & v \\ 0, & 0, & \begin{Bmatrix} z \\ \; \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} z' \\ -z' \end{Bmatrix}, & v' \\ 0, & \begin{Bmatrix} z \\ \; \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} 2z' \\ -z' \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} z'' \\ -2z'' \end{Bmatrix}, & v'' \\ \begin{Bmatrix} z \\ \; \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} 3z' \\ -z' \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} 3z'' \\ -3z'' \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} 3z''' \\ -3z''' \end{Bmatrix}, & v''' \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation est du troisième ordre en v ou en u, et, par conséquent le théorème est démontré.

2. Nous avons donné trois autres démonstrations de ce théorème: la première, dans les **Mémoires en 8⁰ de l'Académie de Belgique**, t. XXII, reproduite avec quelques améliorations dans les **Bulletins de Bruxelles**, 2me série, t. XXXVIII, la seconde dans ce même tome des **Bulletins**, la troisième dans le **Messenger of Mathematics**, New Series, t. IV, p. 177. Dans la première, nous prouvons qu'en posant $u = y' - ay$, l'équation ne s'abaisse que si a est déterminé par la relation $0 = z' - az$, z étant une solution particulière. Dans la seconde et la troisième démonstration, nous montrons à posteriori qu'une valeur de a de cette forme conduit à la réduction de l'équation, ce que nous ferons aussi dans la présente note. Mais les trois premières démonstrations ont un défaut, elles supposent qu'une équation d'ordre n a n de solutions distinctes, tandis que la précédente ne s'appuie que sur l'existence d'une seule solution particulière.

Anvers, 12 juin 1875.

P. Mansion,
professeur à l'université de Gand.

4.

Note über Differentialgleichungen der Form

$$y''' = x^m (Ax^2 y'' + Bxy' + Cy) \tag{1}$$

Ich habe mich ziemlich oft mit der Integration von Differentialgleichungen der Form (1) befasst, bin zu manchen Sätzen über solche Gleichungen gelangt, aber eine vollständige Integration der Gleichung (1), die für alle Specialfälle passt, ist mir noch nicht geglückt.

Es gibt bekanntlich viele Wege eine Differentialgleichung zu integriren. Man setzt oftmals das Integrale in bestimmter Form

voraus und sucht die in dem vorausgesetzten Integrale unbestimmt gelassenen Grössen oder Functionen so zu bestimmen, dass sie der vorgelegten Differentialgleichung Genüge leisten; manchmal setzt man auch das Integrale in bestimmter Form voraus, und frägt nach der Differentialgleichung, welche durch das vorausgesetzte Integrale befriedigt wird.

So versuchte ich zu setzen:

$$z = x^n e^{ax^2}. \tag{2}$$

Durch Differentiiren erhält man:

$$z' = x^{n-1} e^{ax^2}(n+2ax^2). \tag{3}$$

Durch Elimination von e^{ax^2} aus den beiden Gleichungen (2) und (3) erhält man die Differentialgleichung:

$$xz' = (n+2ax^2)z. \tag{4}$$

Wird diese Gleichung n mal differentiirt, unter n eine ganze positive Zahl verstanden, so erhält man:

$$xz^{(n+1)} + nz^{(n)} = (n+2ax^2)z^{(n)} + 4anxz^{(n-1)} + 2an(n-1)z^{(n-2)}$$

oder reducirt:

$$xz^{(n+1)} = 2ax^2z^{(n)} + 4anxz^{(n-1)} + 2an(n-1)z^{(n-2)}.$$

Setzt man hierin

$$z^{(n-2)} = y, \tag{5}$$

so erhält man:

$$xy''' = 2ax^2y'' + 4anxy' + 2an(n-1)y \tag{6}$$

und dieser linearen Differentialgleichung 3ter Ordnung, welche die Form der Gleichung (1) hat, genügt offenbar:

$$y = \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}[x^n e^{ax^2}]. \tag{7}$$

Allein dieses Integrale ist blos ein particuläres Integrale der Gleichung (6). Um das vollständige Integrale der Gleichung (6) zu finden, setze ich in dieselbe

$$y = z^{(n-2)} \tag{5}$$

und erhalte sodann:

$$xz^{(n+1)} + nz^{(n)} = (n+2ax^2)z^{(n)} + 4anxz^{(n-1)} + 2an(n-1)z^{(n-2)}$$

und dies lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(xz') = \frac{\partial^n}{\partial x^n}[(n+2ax^2)z]$$

oder kürzer auf folgende Weise:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}[xz' - (n + 2ax^2)z] = 0. \tag{8}$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet für jene Werte von z, die folgender Differentialgleichung 1ter Ordnung Genüge leistet:

$$xz' - (n + 2ax^2)z = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_n x^{n-1} \tag{9}$$

und hieraus folgt:

$$z = x^n e^{ax^2} \int \frac{C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_n x^{n-1}}{x^{n+1}} \cdot e^{-ax^2} dx. \tag{10}$$

Man kann das Integrale

$$\int \frac{C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_n x^{n-1}}{x^{n+1}} \cdot e^{-ax^2} dx \tag{11}$$

auch so schreiben:

$$\int \frac{K_1 + K_2 x}{x^{n+1}} \cdot e^{-ax^2} dx + \frac{K_3 + K_4 x + K_5 x^2 + \ldots + K_n x^{n-3}}{x^n} \cdot e^{-ax^2}, \tag{12}$$

denn aus der Gleichung:

$$\int \frac{C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_n x^{n-1}}{x^{n+1}} \cdot e^{-ax^2} dx = \int \frac{K_1 + K_2 x}{x^{n+1}} \cdot e^{-ax^2} dx + \frac{K_3 + K_4 x + K_5 x^2 + \ldots + K_n x^{n-3}}{x^n} \cdot e^{-ax^2}$$

folgt durch Differentiiren:

$$\begin{aligned}\frac{C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_n x^{n-1}}{x^{n+1}} \cdot e^{-ax^2} = & \frac{K_1 + K_2 x}{x^{n+1}} \cdot e^{-ax^2} \\ & + \frac{K_4 + 2K_5 x + \ldots + (n-3) K_n x^{n-4}}{x^n} \cdot e^{-ax^2} \\ & - n \frac{K_3 + K_4 x + K_5 x^2 + \ldots + K_n x^{n-3}}{x^{n+1}} \cdot e^{-ax^2} \\ & - 2a \cdot \frac{K_3 + K_4 x + K_5 x^2 + \ldots + K_n x^{n-3}}{x^{n-1}} \cdot e^{-ax^2}.\end{aligned}$$

Dividirt man beiderseits durch e^{-ax^2} und befreit die Gleichung von Brüchen, so erhält man:

$$\begin{aligned}C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_n x^{n-1} = & K_1 + K_2 x + K_4 x + 2K_5 x^2 + 3K_6 x^3 + \ldots \\ & \ldots + (n-3) K_n x^{n-3} - (n + 2ax^2)(K_3 + K_4 x + K_5 x^2 + \ldots + K_n x^{n-3}).\end{aligned}$$

Entwickelt man den rechten Teil der Gleichung und ordnet denselben nach Potenzen von x, so erhält man:

$$C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_n x^{n-1} = (K_1 - nK_3) + x[K_2 + (1-n)K_4]$$
$$+ x^2[(2-n)K_5 - 2aK_3]$$
$$+ x^3[(3-n)K_6 - 2aK_4]$$
$$+ x^4[(4-n)K_7 - 2aK_5]$$
$$+ \quad \ldots\ldots\ldots$$
$$+ x^{n-4}[-4K_{n-1} - 2aK_{n-3}]$$
$$+ x^{n-3}[-3K_n - 2aK_{n-2}]$$
$$- 2aK_{n-1}x^{n-2} - 2aK_n x^{n-1}$$

und hieraus folgen nachstehende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
C_1 &= K_1 - nK_3 \\
C_2 &= K_2 + (1-n)K_4 \\
C_3 &= (2-n)K_5 - 2aK_3 \\
C_4 &= (3-n)K_6 - 2aK_4 \\
C_5 &= (4-n)K_7 - 2aK_5 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
C_{n-3} &= -4K_{n-1} - 2aK_{n-3} \\
C_{n-2} &= -3K_n - 2aK_{n-2} \\
C_{n-1} &= -2aK_{n-1} \\
C_n &= -2aK_n.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich der Reihe nach sehr leicht

$$K_n \;\; K_{n-1} \;\; K_{n-2} \;\; K_{n-3} \; \ldots \; K_4 \;\; K_3 \;\; K_2 \;\; K_1$$

als Functionen der willkürlichen Constanten

$$C_1 \;\; C_2 \;\; C_3 \; \ldots \; C_{n-1} \;\; C_n$$

berechnen, und hat man dies getan, so gestattet z folgende Schreibweise:

$$z = x^n e^{ax^2} \int \frac{K_1 + K_2 x}{x^{n+1}} \cdot e^{-ax^2} dx + K_3 + K_4 x + K_5 x^2 + \ldots + K_n x^{n-3},$$

in welcher nun $K_1 \; K_2 \; K_3 \ldots K_n$ willkürliche Constante sind.

Da nun

$$y = z^{(n-2)}$$

ist, so hat man für y folgenden Wert:

$$y = \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}} \left[x^n e^{ax^2} \int \frac{K_1 + K_2 x}{x^{n+1}} e^{-ax^2} dx \right]$$

und dies ist das vollständige Integrale der Differentialgleichung (6).

Professor Simon Spitzer.

5.

Zur Theorie der Anziehungsgesetze.

Eine Kreislinie (Fig. 1.) sei der Art mit Masse belegt, dass die Dichte derselben in einem beliebigen Punkte umgekehrt proportional dem Quadrat der Verbindungslinie dieses Punktes mit einem beliebigen Punkte S ist, der in der Kreisebene von dem Mittelpunkte des Kreises um die Grösse r absteht. Es ist die Anziehung der so mit Masse belegten Kreislinie auf einen Punkt P innerhalb des Kreises zu bestimmen.

Verbinden wir den Punkt P mit S und construiren wir auf der Verbindungslinie einen Punkt T, welcher die Eigenschaft besitzt, dass

$$PS.ST = r^2 - a^2, \tag{1}$$

wobei a den Radius des gegebenen Kreises vorstellt. Durch T möge eine beliebige Sehne gezogen werden, welche den Kreis in den Punkten K, K' schneidet. Die Verbindungslinien KS und $K'S$ schneiden alsdann die Kreislinie in den Punkten E und E'. Denken wir uns E, E', K, K' als Linienelemente des Kreises, so entspricht jedem Linienelement K ein Linienelement E und jedem Linienelement K' ein Linienelement E'. Denkt man sich durch T alle möglichen Sehnen KK' gezogen, so werden die correspondirenden Linienelemente E und E' nach und nach die ganze Kreisperipherie ausmachen. Dieses vorausgeschickt wollen wir nunmehr ein Anziehungsgesetz zu Grunde legen, wonach sich zwei Massenpunkte proportional ihrer Masse und umgekehrt proportional ihrer Entfernung von einander anziehen.

Bezeichnen wir mit s die Dichte des Linienelementes E, so ist die Anziehung F desselben auf den Punkt P ausgedrückt durch:

$$F = \frac{s.E}{EP}.$$

Nach dem zu Grunde gelegten Dichtigkeitsgesetz ist nun

$$s = \frac{C}{SE^2},$$

wobei C eine constante Grösse bedeutet. Hierdurch geht der Ausdruck für s über in:

$$F = \frac{C.E}{EP.SE^2}$$

Wie aus der Figur ersichtlich liegen die Elemente E und K zur Durchschnittslinie gleich geneigt. Da sie weiter in demselben Strahlenwinkel, dessen Spitze S ist, liegen, so gilt die Proportion:

$$E:K = SE:SK \text{ oder}$$

$$E = \frac{K.SE}{SK}.$$

Dieses in den Ausdruck F eingesetzt ergibt:

$$F = \frac{C.K.SE}{SK.EP.SE^2} = \frac{C.K}{SK.EP.ES}. \tag{2}$$

Nehmen wir die Relation (1) zu Hülfe

$$PS.ST = r^2 - a^2$$

und vergleichen damit die leicht erweisliche Gleichung:

$$SE.SK = r^2 - a^2$$

so folgt, dass

$$PS.ST = SE.SK, \tag{3}$$

und dass weiter

$$\triangle PES \sim \triangle TKS \text{ und}$$

$$\text{Winkel } P = \text{Winkel } K.$$

Aus (2) wird also:

$$F = \frac{C.K}{EP.PS.ST} = \frac{C.K}{EP.(r^2 - a^2)} \tag{4}$$

Das Element K ist nun

$$K = \frac{TK.w}{\cos\varphi} \text{ oder da}$$

$$KK' = 2a\cos\varphi,$$

$$K = \frac{TK.2aw}{KK'}.$$

Berücksichtigen wir noch, dass nach erwähnter Aehnlichkeit der Dreiecke $PES \sim \triangle TKS$ die Proportion stattfindet:

$$EP:PS = TK:KS,$$

$$EP = \frac{TK.PS}{KS},$$

so geht (4) über in:

$$F = C.\frac{2aw.KS}{KK'.PS.(r^2 - a^2)}.$$

Für die Anziehung des Elementes E' ergibt sich ebenso:

$$F' = C.\frac{2aw.K'S}{KK'.PS.(r^2 - a^2)}.$$

Für die Anziehung sämmtlicher Elemente E erhalten wir:

$$\Sigma F = C.\frac{2a\pi.KS}{KK'.PS.(r^2 - a^2)} \tag{5}$$

und für die Anziehung sämmtlicher Elemente E'

$$\Sigma F' = C.\frac{2a\pi . K'S}{KK'.PS.(r^2 - a^2)}. \tag{6}$$

hieraus entsteht die Proportion:

$$\frac{\Sigma F}{\Sigma F'} = \frac{KS}{K'S}$$

Berücksichtigt man weiter, dass

$$\text{Winkel } EPS = \text{Winkel } TKS \quad \text{und}$$
$$\text{Winkel } E'PS = \text{Winkel } TK'S,$$

so findet man, dass die Resultante R mit den Componenten ΣF und $\Sigma F'$ ein Dreieck bildet, welches dem Dreieck $KK'S$ ähnlich ist. Die Resultante R ist daher nach PS gerichtet, und ihre Grösse ermittelt sich aus der Proportion

$$\Sigma F : R = KS : KK' \quad \text{oder}$$

$$R = \frac{KK'.\Sigma F}{KS}.$$

Dies eingeführt in (5) liefert

$$R = C.\frac{2a\pi}{PS(r^2 - a^2)}. \tag{I.}$$

Ist daher eine Kreislinie der Art mit Masse belegt, dass die Dichtigkeit in einem beliebigen Punkte umgekehrt proportional ist der Verbindungslinie von diesem Punkte nach einem ausserhalb gelegenen Punkte S, so wirkt diese Kreislinie auf einen Punkt P im Innern des Kreises grade so, als wäre in S eine Masse angesammelt $= \frac{C.2a\pi}{(r^2 - a^2)}$, wobei C eine noch weiter zu bestimmende Constante bedeutet.

Der genau gleiche Satz gilt auch, wenn S innerhalb und P ausserhalb des Kreises liegt, die Constante C hat jedoch hierbei einen andern Wert und der Nenner wird, da $a > r$ ist, $a^2 - r^2$.

Um die Constante für den ersten Fall zu bestimmen denken wir uns die Masse m als eine elektrische Masse auf der Kreisperipherie ausgebreitet und setzen diese mit der Erde in leitende Verbindung. Ein in S befindlicher Massenpunkt m_1 wirke nach dem angegebenen Gesetz verteilend auf die Kreisperipherie und es ist alsdann die Grösse von m_1 zu bestimmen. Zu dem Ende bemerken wir, dass für diesen Fall das logarithmische Potential von m_1 in Bezug auf einen Punkt im Innern des Kreises plus dem logarithmischen Potential der Belegung m in Bezug auf den gleichen Punkt im Innern gleich Null ist oder:

$$m_1 \log r - m \log a = 0, \quad \text{woraus:}$$

$$m_1 = m \frac{\log a}{\log r}.$$

Man kann sich daher für den Fall, dass S ausserhalb und P innerhalb liegt, in S einen Massenpunkt $m \frac{\log a}{\log r}$ denken, welcher dieselbe Anziehung auf einen Punkt P im Innern ausübt, wie die Masse m der Kreisbelegung.

Auf diese Analogie zwischen der Kugel und dem Kreise hat C. Neumann in den mathematischen Annalen durch eine kurze Notiz aufmerksam gemacht. Offenbar aber ist dieses Resultat ein unbestimmtes, da der Wert von $\frac{\log a}{\log r}$ von dem Werte der den Grössen a und r zu Grunde gelegten Längeneinheit abhängig ist. Setzen wir beispielsweise $a = 1$, so wird dieser Ausdruck gleich Null etc. Der Grund dieser Eigentümlichkeit liegt in der Eigenschaft des logarithmischen Potentials in unendlicher Entfernung nicht Null zu werden, wie dies bei dem gewöhnlichen Potential der Fall ist. Aus diesem Grunde ist auch die Gleichung

$$m_1 \log r - m \log a = 0$$

nicht richtig.

Liegt in dem zweiten Fall der Punkt S innerhalb und der angezogene Punkt P ausserhalb, so ist die Wirkung der angegebenen Belegung der Kreisperipherie, wie sich leicht aus den Green'schen Sätzen ableiten lässt, grade so, als wäre die ganze Masse in dem Punkte P vereinigt.

Liegen beide Punkte S und P ausserhalb oder innerhalb (Fig. 2.), so wähle man einen Punkt S_1 auf der Verbindungslinie von S mit dem Mittelpunkte C des gegebenen Kreises der Art, dass die Proportion stattfindet:

$$CS \,.\, CS_1 = a^2$$

Der Punkt S_1 wird innerhalb des Kreises liegen, wenn S ausserhalb desselben sich befindet und umgekehrt. Bedeutet E einen Punkt der Peripherie, so ist leicht die Proportion nachzuweisen:

$$\frac{SE}{S_1E} = \frac{r}{a}; \quad \text{daher ist:}$$

$$\frac{C}{SE^2} = \frac{C}{S_1E^2} \cdot \frac{a^2}{r^2} = \text{Dichtigkeit.}$$

Setzen wir $C_1 = \frac{C \,.\, a^2}{r^2}$, so wird dieser Ausdruck für die Dichtigkeit $= \frac{C_1}{S_1E^2}$; nach den Betrachtungen, welche zu I. geführt haben, geht die Resultante in der Richtung S_1E und die Wirkung der zu

Anfang zu Grunde gelegten Belegung ist daher so gross, als wenn in dem Punkte S_1 die Masse $\frac{C_1 . 2\pi a}{r_1^2 - a^2}$ oder $\frac{C_1 . 2\pi a}{a^2 - r_1^2}$ concentrirt wären, je nachdem beide Punkte S und P innerhalb oder ausserhalb der Kreisperipherie sich befinden. Hierbei bedeutet r_1 die Entfernung des Punktes S_1 von dem Mittelpunkte des Kreises.

In dem Vorhergehenden ist gezeigt worden, wie nach dem Vorbilde der in dem Handbuch der theoretischen Physik von Thomson & Tait (deutsch von Dr. H. Helmholtz und G. Wertheim) Bd. I. 2. Teil. p. 19—22. angegebenen Metode Sätze über das logarithmische Potential elementar abgeleitet werden können. Man kann aber umgekehrt zeigen, dass wenn diese Sätze existiren sollen, das Gesetz der Dichtigkeit dasjenige sein muss, welches wir oben definirt haben. Nebenbei bemerkt liefern die Green'schen Sätze dieses Gesetz unmittelbar, es kann sich also hier nur um eine andre Ableitung handeln.

Es seien (Fig. 3.) 1 und 2 zwei gleiche Massenpunkte, welchen jedoch in ihrer Wirkung entgegengesetzte Vorzeichen zukommen mögen. Bestimmen wir das logarithmische Potential beider Punkte in Bezug auf einen Punkt O, welcher um ϱ_1 von 1 und um ϱ_2 von 2 absteht, so lautet dieses: $\log\varrho_1 - \log\varrho_2$

Wählen wir nun lauter solche Punkte O, bei welchen dieses logarithmische Potential constant und zwar gleich $\log C$, so erhalten wir

$$\log\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) = \log C \quad \text{oder} \quad \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = C,$$

welches einen Kreis darstellt. Die Niveaulinie oder die Linie gleichen logarithmischen Potentials ist für unsern Fall also ein Kreis. Bringt man auf dieser Linie eine Massenverteilung an, die gleich der absoluten Kraft ist, so wird im Innern des Kreises das Niveau constant. Diese absolute Kraft ist aber:

$$\frac{1}{\varrho_1}\cos(\varrho_1 n) - \frac{1}{\varrho_2}\cos(\varrho_2 n),$$

welcher Ausdruck übergeht in:

$$\frac{R^2 + \varrho_1^2 - r_1^2}{2R\varrho_1^2} - \frac{R^2 + \varrho_2^2 - r_2^2}{2R\varrho_2^2},$$

wenn man Fig. 4. berücksichtigt. Denken wir uns nun in beiden Ausdrücken die Division vorübergehend ausgeführt, so erhalten wir eine weitere Vereinfachung:

$$\frac{R^2 - r_1^2}{2R\varrho_1^2} - \frac{R^2 - r_2^2}{2R\varrho_2^2}.$$

Nach der Figur ist aber:

$$\varrho_2 = \frac{R\varrho_1}{r_1}.$$

Ebenso fällt der Mittelpunkt unseres Kreises der Art, dass:

$$r_1 r_2 = R^2.$$

Hierdurch geht der Ausdruck für die absolute Kraft über in

$$\frac{R^2 - r_1^2}{2R\varrho_1^2} - \frac{r_1^2 - R^2}{2R\varrho_1^2} \quad \text{oder} \quad \frac{R^2 - r_1^2}{R\varrho_1^2}$$

und die Dichte ist daher nach der Potentialtheorie gleich:

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{R^2 - r_1^2}{R\varrho_1^2}.$$

Damit also das Niveau im Innern des Kreises constant sein soll, muss auf der Kreispheripherie eine Massenverteilung angeordnet werden, welche umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung des Punktes 1 von einem beliebigen Punkte 0 der Kreisperipherie ist. Offenbar wirkt diese Massenbelegung auf innere Punkte eben so, als wäre in dem Punkte 1 eine gewisse Masse vereinigt.

In ganz gleicher Weise lässt sich zeigen, dass die Dichte der Belegung umgekehrt proportional dem Quadrate von ϱ_2 sein muss, wenn die Wirkung dieser Belegung auf ausserhalb gelegene Punkte grade so sein soll, als wäre im Punkte 2 eine bestimmte Masse vorhanden.

C. Bender.

6.

Beweis, dass $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen nicht auflösbar sei, nebst einer neuen kurzen Auflösung für $n = 2$.

Nachfolgender Beweis wurde angeregt durch eine Bemerkung in Baltzer's Elemente der Mathematik 1. Bd. p. 261., wo es in der Anmerkung u. A. auch heisst: „dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen nicht auflösbar sei, hat Fermat bemerkt". Ein allgemeiner Beweis dieser Behauptung ist zur Zeit nicht bekannt. Wir setzen zum Behufe des Beweises $x = z - a$ und $y = z - b$, was gewiss erlaubt ist. Ein 2ter möglicher Fall ist der, dass man $z = x + a$ und $y = x + b$ setzt, da man als x die kleinste Zahl nehmen kann.

Wir hätten daher folgende 2 Fälle:

I. $$x^n = (x-a)^n + (x-b)^n \;\ldots\; a < b$$

II. $$(x+a)^n = x^n + (x+b)^n \;\ldots\; a > b,$$

wobei in I. der Conformität halber x anstatt z geschrieben wurde. Dass im Grunde nur 2 Fälle denkbar sind, erhellt daraus, dass wenn die Summe zweier Potenzen von derselben Grundzahl wieder Potenz einer reellen Grundzahl von demselben Grade sein soll, diese grösser sein muss als jede der andern. Sollte dies nicht zugegeben werden, so könnte man z. B. schreiben:

III. $$(x+a)^n + (x+b)^n = x^n.$$

Es wird sich jedoch während der Untersuchung ergeben, dass dies für die Deduction der Arbeit gleichgültig sei. Entwickeln wir die Gleichung I. II. und III. und reduciren auf Null, so hat man:

$$\text{I.}\quad x^n - \binom{n}{1}(a+b)x^{n-1} + \binom{n}{2}(a^2+b^2)x^{n-2} - \binom{n}{3}(a^3+b^3)x^{n-3} - \\ \ldots + (-1)^n(a^n+b^n) = 0,$$

das $r$te Glied heisst: $-(-1)^r(a^r+b^r)\binom{n}{r}x^{n-r}$.

$$\text{II.}\quad x^n + \binom{n}{1}(b-a)x^{n-1} + \binom{n}{2}(b^2-a^2)x^{n-2} + \binom{n}{3}(b^3-a^3)x^{n-3} \\ + \ldots + (b^r-a^r)\binom{n}{r}x^{n-r} + \ldots + (b^n-a^n) = 0 \ldots (\alpha)$$

oder da $a > b$ ist, so hat man auch:

$$\text{II.}\quad x^n - \binom{n}{1}(a-b) - \binom{n}{2}(a^2-b^2)x^{n-r} - \binom{n}{3}(a^3-b^3)x^{n-3} - \ldots \\ \ldots - \binom{n}{r}(a^r-b^r)x^{n-r} - \ldots - (a^n-b^n) = 0 \ldots (\beta)$$

$$\text{III.}\quad x^n + \binom{n}{1}(a+b)x^{n-1} + \binom{n}{2}(a^2+b^2)x^{n-2} + \binom{n}{3}(a^3+b^3)x^{n-3} + \ldots \\ \ldots + \binom{n}{r}(a^r+b^r)x^{n-r} + \ldots + (a^n+b^n) = 0.$$

Wir wollen jedoch nur die Reihe I. hauptsächlich in Untersuchung nehmen, da man bei Reihe II. immer nur, wie aus der Entwicklung ersichtlich sein wird, (a^r-b^r) statt (a^r+b^r) u. s. w. zu setzen hat und sich höchstens einige Eigenschaften bezüglich der in (a^r-b^r) enthaltenen Factoren $(a-b)$ oder $(a+b)$ ergeben, was jedoch hier keine Bedeutung besitzt. Auch wird eine Zeichenänderung vorzunehmen sein. Aehnliches gilt von der Reihe III.

Wie man sieht, handelt es sich nur darum, zu untersuchen, ob diese Gleichung reelle ganze Werte als Wurzeln besitzen kann und für welche Werthe von n dies möglich ist.

Nehmen wir zuerst die Reihe I. in Untersuchung. Wir wollen die Wurzeln der Gleichung $X = 0 \ldots$ I. $w_1\, w_2 \ldots w_n$ heissen. Aus einer Betrachtung der Gleichung erkennt man, dass alle Wurzeln positiv sein müssen, was übrigens schon die Bauart nach dem Binomischen Lehrsatz zeigt. Noch besser erkennt man dies, wenn man die Gleichung entwickelt, nämlich:

$$(x-w_1)(x-w_2)(x-w_3)(x-w_4)\ldots(x-w_n) = 0 \quad \text{oder:}$$

$$x^n - (w_1+w_2+\ldots+w_n)x^{n-1} + (w_1 w_2 + \ldots w_{n-1} w_n)x^{n-2} \\ - \Sigma C^3 x^{n-3} \ldots + (-1)^r - \Sigma C^r x^{n-r} \ldots$$

Da diese mit der obern dem Zeichen nach conform ist, so geht diese Behauptung zur Genüge hervor.

Vergleicht man diese Reihe mit der gegebenen, so hat man ähnlich, wie nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten folgende Resultate:

$$\Sigma C^1 = -\binom{n}{1}(a+b).\ \Sigma C^2 = \binom{n}{2}(a^2+b^2).\ \Sigma C^3 = \binom{n}{3}(a^3+b^3)\ldots$$
$$\ldots \Sigma C^n = \binom{n}{n}(a^n+b^n) = a^n+b^n.$$

Nun beginnt der eigentliche Teil der Arbeit; man hat nämlich: $\Sigma C^1 = -(w_1+w_2 \ldots + w_n) = -\binom{n}{1}(a+b)$ oder $\binom{1}{n}(w_1+\ldots+w_n) = a+b =$ einer ganzen Zahl, da a und b als solche angenommen wurden. Geht man nun zu ΣC^2 über und bildet die Summe $w_1^2+\ldots+w_n^2$, so erhält man also:

$$(w_1+\ldots w_n)^2 = n^2(a+b)^2 \quad \text{oder auch:}$$
$$(w_1^2+\ldots w_n^2)+2\,\Sigma C^2 = n^2(a+b)^2, \quad \text{also ist:}$$
$$(w_1^2+\ldots w_n^2)+2.\binom{n}{2}(a^2+b^2) = n^2(a+b)^2 \quad \text{oder:}$$

$\frac{1}{n}(w_1^2+w_2^2+\ldots+w_n^2) = n(a+b)^2-(n-1)(a^2+b^2)$, also endlich:

$\frac{1}{n}(w_1^2+w_2^2+\ldots+w_n^2) = a^2+b^2+2nab =$ einer ganzen Zahl. Nun hat man zu überlegen, für welche n diese 2 Gleichungen möglich sind.

Wie man sieht, geht dies nur für $n=1$ und $n=2$ an; für alle Zahlen, welche grösser als 2 sind, geht dies nicht. Nun erübriget noch zu sagen, warum es für $n=2$ möglich ist.

Hat man nämlich die Summe $\frac{1}{2}(w_1+w_2) = \alpha =$ einer ganzen Zahl, so muss auch $\frac{1}{2}(w_1^2+w_2^2) = \beta =$ einer ganzen Zahl sein. Denn es kann nur w_1 und w_2 gerade oder beide zugleich ungerade sein. In jedem Falle sind auch die Quadrate entweder resp. gerade oder ungerade, da $(2n)^2 = 4n^2$ und $(2n\pm1)^2 = 4n^2\pm4n+1 = 4n(n\pm1)+1$ ist. Die Summe dieser Zahlen ist immer gerade, was aus folgendem ersichtlich ist: $(2\mu\pm1)+(2\nu\pm1) = \begin{cases} 2(\mu+\nu) \\ 2(\mu+\nu\pm1) \end{cases}$ und $2\mu\pm2\nu = 2(\mu+\nu)$. Für höhere Werte von n trifft dieses Gesetz nie zu, wie z. B. für 3, 4, 5 u. s. w.

Zu bemerken ist noch, dass der Beweis geradeso geführt wird, wenn man nicht annimmt, dass die Wurzeln alle negativ seien, wie man dies bei II. (β) sehen kann, wenn man über die Natur der Wurzeln durchaus nicht im Klaren ist.

Wir wollen noch den Fall $n=2$ ausführen; man hat dann: $w_1+w_2 = n^2(a+b)^2$ und $w_1^2+w_2^2 = n(n-1)(a+b)$ oder $w_1+w_2 = 4(a+b)$ und $w_1^2+w_2^2 = 2(a+b)$; woraus man w_1 und w_2 bestimmen

könnte. Besser geschieht dies aus: $x^2-2(a+b)x+(a^2+b^2)=0$, also $x=(a+b)\pm\sqrt{(a+b)^2-(a^2+b^2)}$ oder $x=(a+b)\pm\sqrt{2ab}$. Es kommt daher darauf an $\sqrt{2ab}=q$ oder $2ab=q^2$ zu machen.

Um daher diese Gleichung aufzulösen, zerlege man alle Quadrate (die durch 2 teilbar sind, also ausserdem noch andere Factoren enthalten müssen) in ihre Factoren und bestimme a und b. Ein einfacher Fall ist jener wo $2a=b=q$ ist; was jedoch nicht sein muss z. B.: $a=3$, $b=24$ also $\sqrt{2ab}=\sqrt{144}=12$. Ebenso kann a oder $b=1$ sein u. s. w.

Zur Reihe II. (α) (β) erwähnen wir folgendes:

Nach dem Ansehen kann die Reihe posit. und negat. Wurzeln haben, was aus der Reihe II. (α) nicht so ersichtlich ist, da dort $(b-a)$ doch negat. ausfällt.

Für $(w_1^2+\ldots+w_n^2)$ hat man:

$$\frac{1}{n}(w_1^2+\ldots+w_n^2)=(2n-1)a^2-(2a+b)b \text{ und für } n=2:$$

$x^2+2(b-a)x+b^2-a^2=0$ also $x=(a-b)\pm\sqrt{2a(a-b)}$ wo $a>b$ ist. Wie man sieht, ist dieser Ausdruck nicht so bequem, wie der obige.

Für die Reihe III. erhält man alle Wurzeln negativ und

$$\frac{1}{n}(w_1^2+\ldots+w_n^2)=n(a+b)^2-(n-1)(a^2+b^2)=a^2+b^2+nab.$$

Für $n=2$: $x^2+2(a+b)x+(a^2+b^2)=0$ also:

$$x=-(a+b)\pm\sqrt{(a+b)^2-(a^2+b^2)}=-(a+b)\pm\sqrt{2ab}.$$

Wie man sieht, ist diese letzte Form ebenso bequem, wie die erste, nur sind die Wurzeln negativ, denn $(a+b)^2=(a^2+b^2)+2ab$, also $(a+b)^2>2ab$ oder $(a+b)>\sqrt{2ab}$. Da die Potenz gerade ist, so ist $(-x)^2$ immer positiv, also die eigentliche Gleichung: $(a-x)^2+(b-x)^2=x^2$. Wie man sieht, ist die hier angegebene Methode zur Bestimmung der Wurzelwerte viel einfacher und bequemer als die bisherigen.

Die Aufgabe löst ferner das Problem, die Quadrate der Wurzelwerte als eine Function der Coef. der Gleichung darzustellen. Ist nämlich die Gleichung:

$$x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+\ldots+U=0.$$

$$w_1+w_2+\ldots+w_n=A \quad\text{und}\quad w_1^2+\ldots+w_n^2=A^2-2B.$$

Dasselbe gilt für eine andere Gleichung, nur hat man auf das Zeichen Rücksicht zu nehmen.

Franz Lukas in Wien.

X.

Ueber das Potential des Ellipsoids.

Von

A. Oberbeck.

Seit den ersten Anfängen der Analysis und analytischen Mechanik hat das Problem der Anziehung eines homogenen Ellipsoids die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gezogen. Die Specialgeschichte dieses Problems gehört jedenfalls zu den anziehendsten Capiteln der Geschichte der Mathematik, einmal weil sich die hervorragendsten Mathematiker von Newton und Mac-Laurin bis auf Gauss, Dirichlet und Chasles an demselben versucht haben, ferner weil fast mit jedem Fortschritt der Wissenschaft im allgemeinen ein Fortschritt in der Lösung dieser Aufgaben verbunden war, so dass man jetzt synthetische und analytische Lösungen von gleicher Vollkommenheit besitzt.

Was die letzteren betrifft, so dürften dieselben ihren Höhepunkt in der Aufstellung eines geschlossenen Ausdrucks für das Potential des Ellipsoids erreicht haben, den man Dirichlet verdankt[1]). Diese Form der Lösung scheint dem Verfasser die vollkommenste zu sein einmal, weil aus derselben mit Leichtigkeit alle teils analytisch, teils synthetisch gefundenen Sätze abgeleitet werden können, deren man früher zur Lösung der besprochenen Aufgabe bedurfte, ferner weil die Kenntniss gerade des Potentials unentbehrlich bei den meisten

---

1) Lejeune Dirichlet, Abh. der Berl. Akad. 1839. — Crelle J. Bd. 32, S. 88. Vergl. auch Schell, Theorie der Bewegung und Kräfte. Leipzig 1870. S. 690—716.

Problemen der mathematischen Physik ist[1]. Dirichlet leitete in der oben citirten Abhandlung das Potential des Ellipsoids mit Hilfe des „discontinuirlichen Factors" ab. Diese Methode erlaubt nach zwei Seiten hin Erweiterungen. Einmal kann mit Hilfe derselben das Potential anderer Körper von homogener Dichtigkeit gefunden werden. So hat z. B. Mehler[2] die Potentiale von Schalen bestimmt, welche durch Flächen zweiten Grades begrenzt werden. Andererseits ist es möglich, in derselben Weise die Potentiale solcher Ellipsoide zu berechnen, deren Dichtigkeit eine Function der Coordinaten ist. Diese Erweiterung ist noch nicht vorgenommen. Es ist daher der Zweck der vorliegenden Arbeit die Potentiale dreiaxiger Ellipsoide von variabler Dichtigkeit und ellipsoidischen Oberflächen zu ermitteln, welche sich durch ähnliche, geschlossene Ausdrücke darstellen lassen.

Zwar stellte sich hierbei heraus, dass es nur in einigen, speciellen Fällen gelingt, Potentiale in der genannten Form aufzufinden. Doch gestatten auch diese schon eine Reihe von Anwendungen aus dem Gebiete der Mechanik, der Elektrostatik und des Magnetismus.

2.

Nachdem vermittelst der Dirichlet'schen Methode die gesuchten Potentiale aufgefunden waren, bot sich nachträglich ein erheblich einfacheres Mittel dar, dieselben herzuleiten. Dasselbe besteht darin zuerst eine Reihe von Functionen aufzustellen, welche gewisse, allgemeine Eigenschaften haben und dann nachträglich die Bedeutung derselben nach bekannten Sätzen der allgemeinen Potentialtheorie festzustellen.

Das mehrerwähnte Dirichlet'sche Potential:

a) für einen äusseren Punkt:

$$P_a = \int_\sigma^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}\, ds$$

b) für einen inneren Punkt:

$$P_i = \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}\, ds$$

---

1) Vergl. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik. Leipzig 1874. S. 21[illegible] bis 221.

2) Borch. J. Bd. 60. S. 321–342.

kann man sich geschrieben denken:

$$P_a = f_0(\sigma) + f_1(\sigma)x^2 + f_2(\sigma)y^2 + f_3(\sigma)z^2$$
$$P_i = f_0(0) + f_1(0)x^2 + f_2(0)y^2 + f_3(0)z^2.$$

Ist die Gleichung des Ellipsoids:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

so bedeutet σ die positive Wurzel der Gleichung dritten Grades:

$$\frac{x^2}{a^2+\sigma} + \frac{y^2}{b^2+\sigma} + \frac{z^2}{c^2+\sigma} = 1. \tag{1}$$

Hieraus ergeben sich zunächst einige Hilfsformeln. Setzt man:

$$p = \frac{x^2}{(a^2+\sigma)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\sigma)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\sigma)^2},$$

so ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial x} &= \frac{2x}{a^2+\sigma}\cdot\frac{1}{p} \\ \frac{\partial\sigma}{\partial y} &= \frac{2y}{b^2+\sigma}\cdot\frac{1}{p} \\ \frac{\partial\sigma}{\partial z} &= \frac{2z}{c^2+\sigma}\cdot\frac{1}{p} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)^2 = \frac{4}{p} \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2} = \Delta(\sigma) = \frac{2}{p}\left\{\frac{1}{a^2+\sigma} + \frac{1}{b^2+\sigma} + \frac{1}{c^2+\sigma}\right\}. \tag{4}$$

Es soll nun zunächst die einfache Aufgabe gelöst werden, eine Function von $\sigma : f(\sigma)$ zu ermitteln, so dass:

$$\Delta f = 0$$

Bildet man:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d\sigma}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d\sigma^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2 + \frac{df}{d\sigma}\cdot\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2};$$

dann ist:

$$\Delta f = \frac{d^2 f}{d\sigma^2}\left\{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right)^2\right\} + \frac{df}{d\sigma}\cdot\Delta\sigma = 0$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) ergiebt sich dann:

$$2\frac{d^2 f}{d\sigma^2}+\frac{df}{d\sigma}\left\{\frac{1}{a^2+\sigma}+\frac{1}{b^2+\sigma}+\frac{1}{c^2+\sigma}\right\}=0.$$

Setzt man:

$$F=\frac{df}{d\sigma},$$

so ist:

$$2\frac{dF}{F}=\left\{\frac{1}{a^2+\sigma}+\frac{1}{b^2+\sigma}+\frac{1}{c^2+\sigma}\right\}d\sigma.$$

Bedeutet $-k$ die Integrationsconstante, so ist:

$$F=\frac{-k}{\sqrt{(a^2+\sigma)(b^2+\sigma)(c^2+\sigma)}}$$

$$\frac{df}{d\sigma}=\frac{-k}{\sqrt{(a^2+\sigma)(b^2+\sigma)(c^2+\sigma)}}$$

Danach ist die gesuchte Function, die mit Q bezeichnet werden soll:

$$Q=k\int_{\sigma}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}$$

$$Q_2 = \int_\sigma^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}$$

$$\left\{\frac{\alpha y z}{(b^2+s)(c^2+s)} + \frac{\beta x z}{(a^2+s)(c^2+s)} + \frac{\gamma x y}{(a^2+s)(b^2+s)}\right\} \quad (7)$$

c) Eine Function Q_3 ermitteln, so dass:

$$Q_3 = kxyz.f(\sigma) \quad \text{und}$$

$$\Delta Q_3 = 0$$

$$Q_3 = kxyz \int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)})^3} \quad (8)$$

Es wird sich herausstellen, dass man hier eine Reihe von Flächenpotentialen gefunden hat, deren Oberflächendichtigkeit nachher ermittelt werden soll.

In derselben Weise kann man die Potentiale voller Ellipsoide ermitteln, welche zu den eben bestimmten Flächenpotentialen in einfachen Beziehungen stehen. Als Beispiel soll diejenige Entwicklung gegeben werden, welche auf das Dirichlet'sche Potential führt.

Es soll eine Function P gefunden werden, so dass:

$$P = x^2.f_1(\sigma) + y^2.f_2(\sigma) + z^2.f_3(\sigma)$$

$$\Delta P = 0$$

$$\Delta P = x^2.\Delta f_1 + y^2.\Delta f_2 + z^2.\Delta f_3 +$$

$$4\left\{x\frac{\partial f_1}{\partial x} + y\frac{\partial f_2}{\partial y} + z\frac{\partial f_3}{\partial z}\right\} + 2\{f_1+f_2+f_3\} = 0.$$

Beachtet man, dass:

$$\Delta f_1 = \frac{2}{p}\left\{2\frac{d^2 f_1}{d\sigma^2} + \frac{df_1}{d\sigma}\left(\frac{1}{a^2+\sigma} + \frac{1}{b^2+\sigma} + \frac{1}{c^2+\sigma}\right)\right\}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{2x}{a^2+\sigma}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{df_1}{d\sigma}$$

und dass analoge Beziehungen für f_2 und f_3 bestehen, so kann man schreiben:

$$\Delta P = x^2\left[2\frac{d^2 f_1}{d\sigma^2} + \frac{df_1}{d\sigma}\left\{\frac{3}{a^2+\sigma} + \frac{1}{b^2+\sigma} + \frac{1}{c^2+\sigma}\right\}\right]$$

$$+ y^2\left[2\frac{d^2 f_2}{d\sigma^2} + \frac{df_2}{d\sigma}\left\{\frac{1}{a^2+\sigma} + \frac{3}{b^2+\sigma} + \frac{1}{c^2+\sigma}\right\}\right]$$

$$+ z^2\left[2\frac{d^2 f_3}{d\sigma^2} + \frac{df_3}{d\sigma}\left\{\frac{1}{a^2+\sigma} + \frac{1}{b^2+\sigma} + \frac{3}{c^2+\sigma}\right\}\right]$$

$$+ x\frac{\partial f_1}{\partial x} + y\frac{\partial f_2}{\partial y} + z\frac{\partial f_3}{\partial z} + f_1 + f_2 + f_3 = 0$$

Setzt man die Klammern einzeln $= 0$, so ergiebt sich:

$$f_1 = \int_\sigma^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}} \cdot \frac{1}{a^2+s}$$

$$f_2 = \int_\sigma^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}} \cdot \frac{1}{b^2+s}$$

$$f_3 = \int_\sigma^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}} \cdot \frac{1}{c^2+s}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass dann auch der zweite Teil der Gleichung verschwindet, da:

$$x\frac{\partial f_1}{\partial x} + y\frac{\partial f_2}{\partial y} + z\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{2}{\sqrt{(a^2+\sigma)(b^2+\sigma)(c^2+\sigma)}}$$

$$f_1 + f_2 + f_3 = -\frac{2}{\sqrt{(a^2+\sigma)(b^2+\sigma)(c^2+\sigma)}}$$

ist. Es wird sich nachher als notwendig herausstellen, die in Gleichung (5) dargestellte Function Q, welche ja ebenfalls der Bedingung $\Delta Q = 0$ genügt, hinzuzufügen. Die Function P ist dann in der Tat das Dirichlet'sche Potential:

$$P = k\int_\sigma^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}\, ds. \tag{9}$$

In ähnlicher Weise findet man leicht die folgenden Functionen:

$$P_1 = \int_\sigma^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}} \left\{\frac{\alpha x}{a^2+s} + \frac{\beta y}{b^2+s} + \frac{\gamma z}{c^2+s}\right\} ds$$

$$P_2 = \int_\sigma^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}$$

$$\left\{\frac{\alpha y z}{(b^2+s)(c^2+s)} + \frac{\beta x z}{(a^2+s)(c^2+s)} + \frac{\gamma x y}{(a^2+s)(b^2+s)}\right\} ds$$

$$P_3 = k x y z \int_\sigma^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}}{\left(\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}\right)^3}\, ds$$

Weitere Lösungen in dieser Form zu finden, ist mir bis jetzt nicht gelungen. Man muss daher für andere Potentiale zu Reihenentwickelungen übergehen.

3.

Was nun die Bedeutung der gefundenen Functionen betrifft, so genügen sie ihrer Ableitung nach alle der Differentialgleichung:

$$\Delta f = 0.$$

Sie können also angesehen werden als Potentiale von Massen, welche innerhalb des Ellipsoids oder auf der Oberfläche desselben liegen. Für die Oberfläche ist bei allen Functionen:

$$\sigma = 0$$

und soll dieser Wert für alle inneren Punkte beibehalten werden. Dann bleiben die sämmtlichen Functionen continuirlich beim Eintritt des Punktes x, y, z in das Ellipsoid. Anders verhält es sich aber mit den ersten Differentialquotienten. Wenigstens haben dieselben bei allen Functionen Q eine Discontinuität, während sie bei allen Functionen P continuirlich bleiben. Hiernach sind also die Functionen Q Flächenpotentiale, die Functionen P Potentiale von Massen, welche das Ellipsoid continuirlich erfüllen.

a) Es soll zunächst die Oberflächendichtigkeit der Functionen Q bestimmt werden. Dies geschieht nach der bekannten Formel:

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{dQ_a}{dn_a} + \frac{dQ_i}{dn_i}\right\}.$$

Ist zuerst:

$$Q_a = \pi abc \int_\sigma^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}$$

$$Q_i = \pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}},$$

so ist:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}. \tag{13}$$

Setzt man ferner:

$$Q_1 = \pi abc \int_\sigma^\infty \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}\left\{\frac{\alpha x}{a^2+s}+\frac{\beta y}{b^2+s}+\frac{\gamma z}{c^2+s}\right\}$$

und entsprechend das innere Potential mit der Grenze $\sigma = 0$, so ist:

$$\varrho_1 = \frac{\alpha \frac{x}{a^2} + \beta \frac{y}{b^2} + \gamma \frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}. \tag{14}$$

In derselben Weise erhält man, wenn man den Potentialen Q_2 und Q_3 den Factor πabc giebt:

$$\varrho_2 = \frac{\alpha \frac{yz}{b^2c^2} + \beta \frac{xz}{a^2b^2} + \gamma \frac{xy}{a^2b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \tag{15}$$

$$\varrho_3 = \frac{\frac{kxyz}{a^2b^2c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}. \tag{16}$$

b) Die Massendichtigkeit für die zweite Reihe von Functionen ergiebt sich mit Hülfe der bekannten Differentialgleichung:

$$\triangle P_i = -4\pi\varrho.$$

Giebt man ebenfalls den Functionen P den Factor: πabc, so erhält man:

$$\text{für } P: \varrho = 1 \tag{17}$$

$$\text{„ } P_1: \varrho = \alpha \frac{x}{a^2} + \beta \frac{y}{b^2} + \gamma \frac{z}{c^2} \tag{18}$$

$$\text{„ } P_2: \varrho = \alpha \frac{yz}{b^2c^2} + \beta \frac{xz}{a^2c^2} + \gamma \frac{xy}{a^2b^2} \tag{19}$$

$$\text{„ } P_3: \varrho = \frac{kxyz}{a^2b^2c^2}. \tag{20}$$

4.

Die Aehnlichkeit der entsprechenden Potentiale P und Q, sowie ihrer Flächen- und Massendichtigkeit liess darauf schliessen, dass es möglich sein würde von den Potentialen P einen directen Uebergang zu den Potentialen Q zu finden. In der Tat kann man vermittelst der Functionen P zuerst Potentiale ellipsoidischer Schalen von endlicher Dicke ausdrücken, und dann diese Dicke unendlich klein werden lassen. Da man auf diesem Wege neue Reihen von Flächenpotentialen entdecken kann, so soll derselbe kurz besprochen werden.

Das Potential einer Schale von endlicher Dicke, eingeschlossen von den Ellipsoiden mit den Halbaxen a, b, c und a_1, b_1, c_1; wo:

$$a > a_1, \quad b > b_1, \quad c > c_1$$

ist die Summe der Potentiale der Ellipsoide, das grössere erfüllt mit der Dichtigkeit $+1$, das kleinere mit der Dichtigkeit -1. Also

a) für einen äusseren Punkt:

$$P = \pi abc \int_{\sigma}^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}} ds$$

$$- \pi a_1 b_1 c_1 \int_{\sigma_1}^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a_1^2+s} - \frac{y^2}{b_1^2+s} - \frac{z^2}{c_1^2+s}}{\sqrt{(a_1^2+s)(b_1^2+s)(c_1^2+s)}} ds \tag{21}$$

b) für einen Punkt in der Masse der Schale:

$$P' = \pi abc \int_{0}^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}} ds$$

$$- \pi a_1 b_1 c \int_{\sigma_1}^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a_1^2+s} - \frac{y^2}{b_1^2+s} - \frac{z^2}{c_1^2+s}}{\sqrt{(a_1^2+s)(b_1^2+s)(c_1^2+s)}} ds \tag{22}$$

c) für einen Punkt innerhalb des kleineren Ellipsoids:

$$P'' = \pi abc \int_{0}^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}} ds$$

$$- \pi a_1 b_1 c_1 \int_{0}^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a_1^2+s} - \frac{y^2}{b_1^2+s} - \frac{z^2}{c_1^2+s}}{\sqrt{(a_1^2+s)(b_1^2+s)(c_1^2+s)}} ds \tag{23}$$

Von der Richtigkeit der aufgestellten Formeln kann man sich leicht überzeugen. Lässt man die Axen a_1, b_1, c_1 wachsen, bis die Schale unendlich dünn wird und also in eine Oberfläche übergeht, so müssen die Grenzwerte der Potentiale P und P'' Flächenpotentiale geben. Hierzu ist es aber nötig:

a) die constante Massendichtigkeit in dem Maasse unendlich gross werden zu lassen, als die Schale unendlich dünn wird;

b) eine Beziehung zwischen den Axen a, b, c und a_1, b_1, c_1 festzustellen.

Nimmt man die Ellipsoide als ähnlich an, so dass:

$$a = \varepsilon a_1, \quad b = \varepsilon b_1, \quad c = \varepsilon c_1$$

und giebt der constanten Dichtigkeit den Factor: $\frac{1}{1-\varepsilon}$, so dass dieselbe für $\varepsilon = 1$, unendlich werden müsste, so geht nach einer einfachen Grenzbetrachtung P und P'' über in das äussere und innere Flächenpotential Q.

Ebenso geben die Körperpotentiale: P_1, P_2, P_3 die Flächenpotentiale: Q_1, Q_2, Q_3.

Andere Flächenpotentiale erhält man dagegen, wenn man andere Beziehungen zwischen den Axen der beiden Ellipsoide festsetzt. Sind z. B. die beiden Ellipsoide confocal, so erhält man aus den Potentialen P und P'' die Flächenpotentiale:

a) für einen äusseren Punkt:

$$Q_a = \pi a b c \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \int_{\sigma}^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}}{\sqrt{(a^2+s)\,(b^2+s)\,(c^2+s)}} ds \tag{24}$$

b) für einen inneren Punkt:

$$Q_i = \pi a b c \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \int_{0}^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}}{\sqrt{(a^2+s)\,(b^2+s)\,(c^2+s)}} ds + 2\pi \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right\} \tag{25}$$

Die Flächendichtigkeit ist in diesem Fall:

$$\varrho = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

In derselben Weise erhält man neue Flächenpotentiale, wenn man bei P_1, P_2, P_3 ähnliche Grenzbetrachtungen anstellt. Hiermit ist zugleich eine nicht uninteressante Aufgabe gelöst. Es ist nämlich die Oberflächendichtigkeit desjenigen Flächenpotentials ermittelt, das in äusseren Punkten dieselben Werte hat, wie das Körperpotential P. Dass eine derartige Belegung einer geschlossenen Oberfläche stets möglich ist, hat Gauss bekanntlich zuerst bewiesen [1]).

---

1) Gauss Werke Bd. V, Allgemeine Lehrsätze etc. S. 240.

5.

nngleich die Anwendungen der gefundenen Functionen, auf
wir hier zum Schluss eingehen wollen, keine wesentlich neue
e enthalten, so wird doch die Art ihrer Ableitung durch die
hende Kenntniss der Potentiale erheblich vereinfacht.

Es sollen die Potentiale zweier homogener Ellipsoide mit gleich-
ten Axen a, b, c und a_1, b_1, c_1 in Bezug auf äussere Punkte
en werden. Die Gleichungen der beiden Ellipsoide seien:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}=1.$$

wir zuerst an, dieselben seien confocal, so dass:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 &= a^2+m \\ b_1^2 &= b^2+m \\ c_1^2 &= c^2+m \end{aligned}\right\}$$

die Potentiale in Bezug auf einen äussseren Punkt x, y, z:

$$\pi abc\int_\sigma^\infty \frac{1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}\,ds$$

$$\pi a_1b_1c_1\int_{\sigma_1}^\infty \frac{1-\frac{x^3}{a^2+m+s}-\frac{y^2}{b^2+m+s}-\frac{z^2}{c^2+m+s}}{\sqrt{(a^2+m+s)(b^2+m+s)(c^2+m+s)}}\,ds$$

urch die Substitution:

$$m+s=s',$$

as zweite Integral dem ersten gleich, so dass:

$$\frac{V}{V_1}=\frac{abc}{a_1b_1c_1}=\frac{M}{M_1}, \tag{27}$$

M und M_1 die Massen der Ellipsoide bedeuten. Dies ist der
hste Ausdruck des berühmten Mac-Laurin'schen Satzes. Sind
n die beiden Ellipsoide ähnlich, so erhält man ebenfalls einen
hen Satz, wenn man ihre Potentiale in Bezug auf zwei Punkte
icht, welche man als ähnlich gelegen bezeichnen kann. Be-
et man wieder mit V und V_1 die Potentiale der beiden Ellip-
für welche:

$$a_1 = \varepsilon a$$
$$b_1 = \varepsilon b$$
$$c_1 = \varepsilon c$$

und berechnet V in Bezug auf einen Punkt xyz, V_1 dagegen
auf einen Punkt $x_1 y_1 z_1$, wo:

$$x_1 = \varepsilon x, \quad y_1 = \varepsilon y, \quad z_1 = \varepsilon z;$$

so findet man, wenn man in dem zweiten Integral die Substi

$$\varepsilon^2 s' = s \text{ macht,}$$

dass die Potentiale bis auf den constanten Factor ε^2 übereins
d. h.

$$V = \varepsilon^2 . V_1$$

die Potentiale ähnlicher Ellipsoide in ähnlich gelegenen Pun
terscheiden sich nur durch den constanten Factor ε^2. Alle
Lehrbüchern der Mechanik vorkommenden Sätze, besonders
Ausdrücke für die Componenten nach den drei Axen, lassen
leicht aus den gefundenen Potentialen herleiten, dass hier nic
darauf eingegangen zu werden braucht.

Die Kenntniss des Potentials Q und seiner Oberflächendi

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

löst die elektrostatische Aufgabe: „die Verteilung der freien
cität auf der Oberfläche eines leitenden Ellipsoids zu best
Die Verteilung muss bekanntlich eine derartige sein, dass das
für jeden inneren Punkt einen constanten Wert hat. Dies h
der Tat die Function Q.

Mit Benutzung des Potentials Q_1 (Gl. 6) kann leicht die
Aufgabe gelöst werden: „die Verteilung der freien Elektric
einem abgeleiteten Ellipsoid bestimmen, welches von elek
Massen inducirt wird, deren Potential eine lineare Funct
Coordinaten ist“. Die Lösung dieser Aufgabe erfordert bek
eine Oberflächenverteilung, so dass die Summe der Potenti
inducirenden Massen und der inducirten Elektricität für jeden
Punkt verschwinden muss. Ist das Potential der äusseren M

$$V = Kx + Ly + Mz,$$

so kann man Q_1 als Potential der inducirten Elektricität
Setzt man noch:

$$\left.\begin{aligned}
A &= \pi abc\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}\\
B &= \pi abc\int_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}\\
C &= \pi abc\int_0^\infty \frac{ds}{(c^2+s)\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

so ist:

$$Q_1 = \alpha . Ax + \beta . By + \gamma . Cz$$

$$V + Q_1 = 0. \quad \text{Also:}$$

$$\alpha = -\frac{K}{A}, \quad \beta = -\frac{L}{B}, \quad \gamma = -\frac{M}{C}.$$

Hieraus erhält man die Oberflächendichtigkeit:

$$\varrho = -\frac{\frac{K}{A}\cdot\frac{x}{a^2} + \frac{L}{B}\cdot\frac{y}{b^2} + \frac{M}{C}\cdot\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}} \tag{30}$$

c) Schliesslich mag noch die Lösung des analogen Problems für die Induction von Magnetismus in einem Ellipsoid von weichem Eisen angeführt werden, welche Aufgabe zuerst von F. Neumann [1]) mit Hilfe von Reihenentwickelungen gelöst worden ist. Das Potential der inducirenden Massen sei wieder:

$$V = Kx + Ly + Mz.$$

Dann muss für jeden Punkt im Innern der Eisenmasse:

$$V + \varphi + k\int \frac{dv}{r}\frac{d\varphi_i}{dn_i} = 0 \tag{31}$$

sein. Setzt man:

$$\varphi = \alpha x + \beta y + \gamma z, \text{ so ist:}$$

$$\frac{d\varphi_i}{dn_i} = \frac{\alpha\frac{x}{a^2} + \beta\frac{y}{b^2} + \gamma\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$$

Das Potential mit dieser Oberflächendichtigkeit ist aber die Function Q_1; also:

---

1) Crelle J. XXXVII S. 39. 40.

$$\int \frac{dv}{r} \frac{d\varphi_i}{dn_i} = 2\{\alpha A x + \beta B y + \gamma C z\};$$

wo A, B, C die Bedeutung der Gleichungen (29) haben. Hier erhält man aus Gleichung (31):

$$\alpha = -\frac{K}{1+2kA}, \quad \beta = -\frac{L}{1+2kB}, \quad \gamma = -\frac{M}{1+2kC}$$

$$\varphi = -\left\{\frac{Kx}{1+2kA} + \frac{Ly}{1+2kB} + \frac{Mz}{1+2kC}\right\}$$

Da die magnetischen Momente nach den drei Axen durch die meln dargestellt werden [1]):

$$Mx = -k \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx\,dy\,dz, \text{ etc. so ist:}$$

$$Mx = \frac{k.Kv}{1+2kA}$$

$$My = \frac{k.Lv}{1+2kB}$$

$$Mz = \frac{k.Mv}{1+2kC}$$

XI.

Untersuchungen über algebraische Gleichungen.

Von

Alfred Siebel.

Fortsetzung von N. XXIV. d. vor. Bd.

Artikel IV. (§ 13—§ 17.)

Specielle Behandlung des Trennungs-Problems.

Einleitung.

Wir haben in § 10. eine allgemeine Methode angegeben, die reellen Wurzeln von

$$f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0,$$

wo $\alpha_0 > 0$, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ beliebig reell, in positivem oder negativem Sinne zu trennen.

Eine nähere Betrachtung des geometrischen Trennungsverfahrens, § 2. Aufg. III. und § 3. Krit. II., aus dem das arithmetische hervorgeht, lässt erkennen, dass die Trennung in neg. Sinne wenig brauchbar ist. Dies schliesst nicht aus, dass sie sich in einzelnen Fällen mit Vorteil anwenden lässt.

Beschäftigen wir uns im Folgenden eingehender mit der Trennung in positivem Sinne und stellen uns die Aufgabe den Parameter a (§ 10.) so zu bestimmen, dass der jedesmalige Fortschritt bei der Trennung möglichst gross wird. Wir werden an Beispielen zeigen, dass dies Verfahren rationeller, d. h. schneller zum Ziele führend, ist als das in § 10., wo wir a oder s willkürlich annahmen.

Um die Hauptuntersuchung nicht aufzuhalten, verweisen wir in Betreff einiger Nebenberechnungen auf den folgenden Artikel.

§ 13.

I. Problem. Auf der positiven Seite einer Nichtwurzel x_1 von $f(x) = 0$ ein Intervall $(x_1, x_1 + x)$ zu bestimmen, in welchem höchstens eine Wurzel liegt.

Dies Problem ist in § 10., Problem I., enthalten und eine Lösung ergibt sich aus § 10. und § 2. Wir erhalten folgende

Specielle Lösung.

Wir behandeln gleichzeitig die Fälle

$$\left.\begin{array}{l}\text{a)}\\ \text{b)}\end{array}\right\} f(x_1) \gtrless 0$$

Bestimme

1) $c = x_1$ *)

$r =$ oder $>$ Exponent des ersten $\left\{\begin{array}{c}\text{pos.}\\ \text{neg.}\end{array}\right\}$ Gliedes von

$$f(x+c) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots c_{n-1} x + c_n = 0$$

$$\varphi_r(z) = (r-1)z^r - rz^{r-1} + 1$$

$$p = \frac{kf(x_1)}{a^r}$$

$$x = a(z-1)$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln lassen sich die ellen Wurzeln successive trennen. (§ 10., Problem II.).

II. Wir begnügen uns, wie gesagt, mit dieser Lösung nicht, sondern gehen einen Schritt weiter, indem wir x als Function von z darstellen.

Aus 3) und 4) resultirt

$$\varphi_r(z) = \binom{r}{e} \frac{a^{r-e}}{c_{n-e}} \cdot \frac{f(x_1)}{a^r}$$

$$) \qquad \varphi_r(z) = \binom{r}{e} \frac{f(x_1)}{c_{n-e} \cdot a^e}$$

$$) \qquad a = \sqrt[e]{\frac{\binom{r}{e}}{\varphi_r(z)} \cdot \frac{f(x_1)}{c_{n-e}}}$$

und wegen 5)

$$x = (z-1)\sqrt[e]{\frac{\binom{r}{e}}{\varphi_r(z)} \cdot \frac{f(x_1)}{c_{n-e}}}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$3) \qquad (z-1)\sqrt[e]{\frac{\binom{r}{e}}{\varphi_r(z)}} = F_{r,e}(z) \text{ oder kürzer } = F\,^*),$$

$$4) \qquad x = F\sqrt[e]{\frac{f(x_1)}{c_{n-e}}}.$$

Hier ist e eine der ganzen Zahlen

$$n,\ n-1,\ \ldots\ 2$$

$$c_{n-e} = \frac{f^e(e)}{e!}$$

---

*) Es ist

$$F_{r,r}(\pm\infty) = \sqrt[r]{\frac{1}{r-1}}$$

Von diesem Werte werden wir häufig Gebrauch machen.

Der Exponent e ist im Allgemeinen abhängig von a. Es läs[st] sich von vornherein übersehen, dass e constant bleibt für eine Rei[he] von Werten der unabhängig Variabeln a. Fassen wir nur solche i[ns] Auge und nehmen r constant, z. B. = Minimalwert (I. 1.) an, so i[st] also in 4)

z **explicite als Function von z dargestellt.**

Ziehen wir in Erwägung, wie eine solche Darstellung sich ergab. Durch die Annahme $c = x_1$ (= Maximalwert) erreichten wir, dass in [der] allgemeinen Formel

$$\varphi_r(z) = \frac{a^{r-e}}{(x_1 - c + a)^r} \cdot \frac{\binom{r}{e} f(x_1)}{c_{n-e}}$$

einerseits der erste Factor eine Potenz von a, nämlich a^{-e}, andererseits [der] zweite von a nicht abhängig wurde.

§ 14.

In beiden Fällen $f(x_1) \gtrless 0$ führt uns die Maximalbestimmu[ng] von x auf die

Hülfsaufgabe I.: Gegeben ist eine vollständige Rei[he] von ganzen Functionen*) von a

$$A_0 = C_0 a^0, \quad A_1 = C_1 a^1, \quad A_2 = C_2 a^2 \; . \; . \; . \; A_m = C_m a^m,$$

wo $C_0, C_1 \; . \; . \; . \; C_m > 0$ (endlich oder ∞ gross). Für welc[he] Werte der Variabeln a ist das kleinste Glied A ein ga[nz] bestimmtes

$$A = A_s?$$

Wenn Potenzen fehlen, so können wir diese mit ∞ grossen po[si]tiven Coefficienten versehen eingeschaltet denken; diese komm[en] nicht in Betracht.

Lösung.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dass

---

*) Wir empfehlen diese und die folgende Aufgabe für die allgemeine[n] Functionen $A_0, A_1 \dots A_m$ zu lösen, welche in einem Intervall von a einde[utig] und stetig sind und die weitere Eigenschaft besitzen, dass allgemein

$$A_s - A_q$$

höchstens einmal in jenem Intervall null wird.

(1)

1) $A = A_0$, sind: $a > \frac{C_0}{C_1}, > \sqrt[2]{\frac{C_0}{C_2}}, > \sqrt[3]{\frac{C_0}{C_3}} \ldots > \sqrt[m]{\frac{C_0}{C_m}}$

2) $= A_1$, „ $a < \frac{C_0}{C_1}$ dagegen $> \frac{C_1}{C_2}, \sqrt[2]{\frac{C_1}{C_3}}, \sqrt[3]{\frac{C_1}{C_4}} \ldots \sqrt[m-1]{\frac{C_1}{C_m}}$

3) $= A_2$, „ $a < \sqrt[2]{\frac{C_0}{C_2}}, \frac{C_1}{C_2}$ dagegen $> \frac{C_2}{C_3}, \sqrt[2]{\frac{C_2}{C_4}} \ldots \sqrt[m-2]{\frac{C_2}{C_m}}$

u. s. w.

Es treten hier die reellen Wurzeln a je zweier der Gleichungen

$$y = A_0, \quad y = A_1, \ldots y = A_m$$

oder geometrisch aufgefasst, die Abscissen a der Durchschnitte der durch diese Gleichungen dargestellten Curven auf.

(2)

Bezeichnen wir allgemein den Wert von a, für den

$$A_s = A_q$$

mit

$$a_{s,q}$$

und in Consequenz mit

$$a_{q,s}$$

d. h.

$$a_{s,q} = a_{q,s} = \sqrt[s-q]{\frac{C_q}{C_s}} = \sqrt[q-s]{\frac{C_s}{C_q}},$$

und bilden das Schema

(3)

$A_s = C_s a^s$	$C_0 a^0$	$C_1 a^1$	$C_2 a^2$	$C_3 a^3$	$C_4 a^4$	...
$A_0 = C_0 a^0$	*	$a_{0,1}$	$a_{0,2}$	$a_{0,3}$	$a_{0,4}$	...
$A_1 = C_1 a^1$	$a_{1,0}$	*	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	...
$A_2 = C_2 a^2$	$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	*	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	...
$A_3 = C_3 a^3$	$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	*	$a_{3,4}$	...
$A_4 = C_4 a^4$	$a_{4,0}$	$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	*	...
. .	.	.	.	.	.	...
. .	.	.	.	.	.	...
. .	.	.	.	.	.	...

worin allgemein im Durchschnitt derjenigen Horizontal- und Verticalreihe, welche bezüglich

$$A_s \text{ und } A_q$$

entspricht:

$$a_{s,q} \quad \text{steht.}$$

(4) Es sei in jener Horizontalreihe
der kleinste der Werte vor dem * mit a_s'
„ grösste „ „ hinter „ * „ a_s bezeichnet.

Obige Lösung (1) nimmt folgende Gestalt an:

(5) 1) Die notwendige und hinreichende Bedingung, dass

$$A = A_s$$

sein kann, ist

$$a_s < a_s'$$

2) Ist diese Bedingung erfüllt, so ist $A = A_s$ für alle Werte von a im Intervall

$$(a_s, \quad a_s')$$

und nur für diese.

Hülfsaufgabe II^a. Den Verlauf von A_1 des kleinsten der Werte A_0, A_1, A_2 . . . A_m, als Function von a für das Integral $(0, \infty)$ festzustellen.

Wir verstehen unter ∞ stets $+\infty$.

Es lässt sich in jedem beliebigen Falle die Aufgabe dadurch lösen, dass die Intervalle in (5) der Reihe nach für $s = 0, 1, 2 \ldots$ bestimmt werden.

Bei grösserer Gliederzahl wird im Allgemeinen die Lösung*) durch folgende Betrachtung wesentlich vereinfacht.

Jedem A_s entspricht entweder ein Intervall (a_s, a_s') oder keins, jedem a entspricht aber umgekehrt ein ganz bestimmtes A_s. Hieraus folgt leicht, dass sich sämmtliche Intervalle aneinander anschliessen, der Anfangswert des einen zugleich Endwert eines andern ist und umgekehrt.

Die Intervalle (a_s, a_s') erhalten wir in folgender Weise.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, sei $m = 4$, C_0 . . . C_4 endlich.

Lassen wir a die positiven Werte in negativem Sinne von ∞ bis 0 durchlaufen, so ist nach dem Vorigen, wenn von den Werten

---

*) Siehe 2. Lösung.

$$a_{0,1} \quad a_{0,2} \quad a_{0,3} \quad a_{0,4}$$

der grösste

1) $a_{0,4}$ ist: für a zwischen $a_0' = \infty$ und $a_0 = a_{0,4}$ das $A = A_0 a^0$
   „ a „ $a_4' = a_{0,4}$ „ $a_4 = 0$ „ $A = A_4 a^4$

2) $a_{0,3}$ ist: „ a „ $a_0' = \infty$ „ $a_0 = a_{0,3}$ „ $A = A_0 a^0$.

Dann kommt ein Intervall, dessen Endwert $a_{0,3}$ ist. Denselben Wert $a_{3,0} = a_{0,3}$ finden wir in dem Schema (3) in der 4ten Horizontalreihe vor dem *, das dem besagten, zu suchenden Integral entsprechende A ist also A_3 und das Intervall selbst nach Obigem begrenzt durch

das grössere $a_3' = a_{3,0}$ ($= a_{0,3}$) und das kleinere $a_3 = a_{3,4}$

u. s. w. Wir bemerken, dass das Schema (3) gedacht wird und nur die nötigen Werte desselben auszurechnen sind. So ist ad 1) die Berechnung der Werte in der 2ten, 3ten ... Horizontalreihe überflüssig.

Wir gehen zum allgemeinen Falle über und können uns darauf beschränken die Lösungen anzudeuten.

1. Lösung.

(Nur bei 1, 2, 3 Gliedern zweckmässig).

Bestimme die Intervalle (a_s, a_s') nach Hülfsaufgabe I. (1) der Reihe nach für $s = 0, 1, 2 \ldots$

2. Lösung.

Bestimme die Intervalle (a_s, a_s'), wie oben ad 1) und 2), mit Hülfe folgender Sätze.

Hülfssatz I. Bei $\left\{\begin{matrix}\text{zu-}\\ \text{ab-}\end{matrix}\right\}$ nehmendem a fogt auf eine $\left\{\begin{matrix}\text{höhere}\\ \text{niedrigere}\end{matrix}\right\}$ Potenz von a in $A_s = C_s a^s$ stets eine $\left\{\begin{matrix}\text{niedrigere}\\ \text{höhere}\end{matrix}\right\}$.

(Wenn wir z. B. ad 2) $a_{0,3}$ in $a_{3,0}$ verwandeln, springen wir in Schema (3) aus der 1ten in die 3te Horizontalreihe über).

Hülfssatz II. Ist $a_s = a_{s,t}$, so ist $a_t' = a_{t,s} = a_{s,t} = a_s$ und es folgt in negativem Sinne auf $A_s : A_t$.

Als Erläuterung und Anwendung diene:

Hülfsaufgabe II[b]. Die überhaupt möglichen Fälle zu classificiren.



Ist speciell, wie oben

$$m = 4, \quad C_0, \quad C_1 \ldots C_4 \text{ endlich,}$$

so haben wir folgende Zusammenstellung.

Classification der Fälle.	Indices der A bei wachsendem a.	Symbolische Bezeichnung der Fälle.
Von $a_{0,1} \ldots a_{0,4}$ sei der grösste:		
I. $a_{0,4}$	4, 0	$A_{(4,0)}$
II. $a_{0,3}$	4, 3, 0	$A_{(4,3,0)}$
III. $a_{0,2}$		
1) $a_{2,4} > a_{2,3}$	4, 2, 0	$A_{(4,2,0)}$
2) $a_{2,3} > a_{2,4}$	4, 3, 2, 0	$A_{(4,3,2,0)}$
IV.*) $a_{0,1}$		
Von $a_{1,2}$, $a_{1,3}$, $a_{1,4}$ sei der grösste:		
1) $a_{1,4}$	4, 1, 0	$A_{(4,1,0)}$
2) $a_{1,3}$	4, 3, 1, 0	$A_{(4,3,1,0)}$
3) $a_{1,2}$		
1) $a_{2,4} > a_{2,3}$	4, 2, 1, 0	$A_{(4,2,1,0)}$
2) $a_{2,3} > a_{2,4}$	4, 3, 2, 1, 0	$A_{(4,3,2,1,0)}$

Die Intervalle von a mit den zugehörigen A ergeben sich aus der 2ten Columne nach Hülfsaufgabe I. (2), z. B. ad Fall III. 1):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & A_4 & a_{2,4} & A_2 & a_{0,2} & A_0 & \infty \\ . & & . & & . & & . \\ = a_4 & & = a_4' & & . & & . \\ & & = a_2 & & = a_2' & & . \\ & & & & = a_0 & & = a_0'. \end{array}$$

Sind $C_0 \ldots C_4$ oder ist ein Teil dieser Coefficienten ∞ gross, so fallen die entsprechenden A fort.

Ist z. B. $C_0 = \infty$, so in vorstehendem Falle III. 1):

$$0 \quad A_4 \quad a_{2,4} \quad A_2 \quad \infty.$$

---

*) Ist von $a_{0,1} \ldots a_{0,4}$: $a_{0,1}$ der grösste und
1) $a_{0,4}$ der zweitgrösste, so liegt Fall IV. 1) vor,
2) $a_{0,3}$ " " " " " IV. 1) oder IV. 2),
3) $a_{0,2}$ " " " " " IV. 1) oder IV. 3) 1,
wenn dabei $a_{0,3} < a_{0,4}$ ($< a_{0,2} < a_{0,1}$).

Denken wir uns die Curve $y = A$ für $a > 0$ construirt. Die-
lbe setzt sich aus Bogen der Curven $y = A_4, A_3 \ldots$ zusammen.

Die allgemeine Classification für ein beliebiges m lässt sich aus
bigem ersehen.

§ 15.

Die Maximalbestimmung von x (§ 13. II. 4)) führt uns weiter
af die

Hülfsaufgabe III. Den Verlauf der Function

$$F = F_{r,e}(z) = (z-1)\sqrt[e]{\frac{\binom{r}{e}}{\varphi_r(z)}}$$

(§ 13. II. 3)) für $z > 1$ zu bestimmen.

Lösung.

Ist $r = e = 2$, so $F = \text{const.} = 1$.

In jedem andern Falle ist das Vorzeichen

$$\mathfrak{V}$$

der ersten Derivirten F' identisch mit dem der ersten Derivirten von

$$\frac{(z-1)^e}{\varphi_r(z)}.$$

Beachten wir, dass

$$\varphi_r(z) = (z-1)^2(1+2z+3z^2+\ldots(r-1)z^{r-2})$$
$$\varphi_r'(z) = r(r-1)(z-1)z^{r-2},$$

(1) so ergeben sich successive folgende Ausdrücke mit demselben Vorzeichen $\mathfrak{V}$:

1) $\varphi_r(z) \,.\, e(z-1)^{e-1} - (z-1)^e \varphi_r'(z)$
2) $e((r-1)z^r - r\,.\,z^{r-1} + 1) - r(r-1)(z-1)^2 . z^{r-2}$
3) $e(1+2z+3z^2+\ldots(r-2)z^{r-3}) - (r-1)(r-e)z^{r-2}$.

(2) Der letzte Ausdruck ändert höchstens einmal sein Zeichen, wenn z von 0 bis $\overset{+}{\infty}$ übergeht und ist

1) für $z = 1$: $\dfrac{e(r-1)(r-2)}{2} - (r-1)(r-e) = \dfrac{r(r-1)(e-2)}{2}$
2) für $z = \overset{+}{\infty}$, wenn $e \leqq r$: $\lesseqgtr 0$.

Aus (2) folgt:

(3) Ist 1) $e \leqq 2 < r$, so $\mathfrak{B} = -$ für $1 < z < \infty$

2) $e = r > 2$, „ $\mathfrak{B} = +$ „ $1 < z < \infty$

3) $2 < e < r$, „ $\mathfrak{B} = +$ „ $1 < z < \overset{m}{z}_{s,r}$

$= -$ „ $\overset{m}{z}_{s,r} < z < \infty$

wo

$$\overset{m}{z}_{s,r}$$

die Wurzel, > 1, von (1) 2) oder (1) 3) bezeichnet,

$$s = r - e,$$

s also dieselbe Bedeutung hat wie in § 14.

Das Vorzeichen $\mathfrak{B}$ belehrt uns über das Wachsen und Abnehmen von F. Diese Function nimmt $\left\{ \begin{matrix} \text{zu} \\ \text{ab} \end{matrix} \right\}$, wenn $\mathfrak{B} = \pm$

(4) Ist a) $e = r = 2$, so ist F constant $= 1$.

b) $e \overset{=}{<} 2 < r$, so nimmt F ab von $F_{r,e}(1)$ bis $F_{r,e}(\infty) = 0$.

(Es ist $F_{r,1}(1) = \infty$, $F_{r,2}(1) = 1$).

c) $e = r > 2$, so nimmt F zu von $F_{r,r}(1) = 0$ bis

$$F_{r,r}(\infty) = \sqrt[r]{\frac{1}{r-1}}$$

d) $2 < e < r$, so nimmt F zu von $F(1) = 0$ bis $F(\overset{m}{z}_{s,r})$

und ab von $F(\overset{m}{z}_{s,r})$ bis $F(\infty) = 0$

$F = \text{Max.}$ für $z = \overset{m}{z}_{s,r}$.

Bei der Auflösung numerischer Gleichungen wäre die jedesmalige Berechnung der Wurzeln

$$\overset{m}{z}_{s,r}$$

zu zeitraubend. Wir werden daher im nächsten Artikel für die Wurzeln

$$\overset{m}{z}_{1,4};\ \ z_{1,5},\ z_{2,5};\ \ z_{1,6},\ z_{2,6},\ \overset{m}{z}_{3,6}$$

Näherungswerte angeben und zeigen, wie für die weiteren Wurzeln durch eine kleine Nebenrechnung ein erster Näherungswert gefunden werden kann, mit dem man sich in den meisten Fällen begnügen wird.

§ 16.

Problem. Das Problem in § 13. mit der Bedingung zu lösen, dass der Fortschritt x *) ein Maximum wird, $c = x_1$ und $r =$ constant angenommen.

Lösung **).

1) Bilde zunächst nach dem bekannten Schema (Art. I. § 2.)

$$f(x+c) = c_0.x^n + c_1.x^{n-1} + \ldots c_{n-1}.x + c_n = 0.$$

Wir unterscheiden 2 Fälle:

a) $f(x_1) = c_n > 0$,

b) $f(x_1) = c_n < 0$.

2) $r =$ oder $>$ Exponent bezüglich des ersten $\left\{\begin{matrix}\text{pos.}\\\text{neg.}\end{matrix}\right\}$ Gliedes dieser Gleichung.

3) Berechne für jedes $\left\{\begin{matrix}\text{pos.}\\\text{neg.}\end{matrix}\right\}$ Glied bis einschliesslich des mit x^2

$$C_s = C_{r-e} = \frac{\binom{r}{e}}{\pm c_{n-e}},$$

mit e den Exponenten jenes Gliedes bezeichnet.

4) Löse Hülfsaufgabe II^a^. in § 14.

Ist $m \overset{=}{<} 4$, so kann man sich dabei an die Classification (§ 14. Hülfsaufgabe II^b^.) anlehnen.

Die sich hierdurch ergebenden Intervalle von a, in welchen

$$A = A_s = A_{r-e} = \pm k_e,$$

seien wie oben allgemein mit (a_s, a_s') bezeichnet ***).

Wir könnten nun weiter fortfahren, indem wir für jedes der e die Hülfsaufgabe III. in § 15. lösen, die F_{max} in den entsprechenden Intervallen von z: (z_s', z_s) bestimmen, u. s. w. — (Es ist das a_s entspr. $z_s >$ das a_s' entspr. z_s').

---

*) Wir setzen voraus, dass die Gleichung wenigstens 2 Wechsel hat; sonst ist $x_{max} = \infty$.

**) Für gewisse Kategorien der Gleichung (c), charakterisirt durch die Vorzeichen der Glieder, geben wir in § 17. direct das Endresultat.

***) 5) siehe später.

Einfacher gelangen wir zum Ziel, indem wir Folgendes beachten.

Zunächst führen wir einige Bezeichnungen ein:

(1)

1) $\overset{m}{z}_s$ statt $\overset{m}{z}_{s,r}$ wenn ein bestimmtes r vorliegt.

2) $\left.\begin{matrix}\overset{v}{a}_s \\ \overset{v}{a}\end{matrix}\right\}$ = vorteilhaftester Wert von a im Int. $\left\{\begin{matrix}(a_s, a_s') \\ (0, \infty)\end{matrix}\right\}$ d. h. für den x ein Max.:

. . . . oder kürzer, wenn ein bestimmtes s ins Auge gefasst ist:

$\overset{v}{a}$ statt $\overset{v}{a}_s$.

3) Sich nach § 13, II 2) und 4) entsprechende Werte von a, z, x seien durch dieselben Indices bezeichnet; so entspreche z. B. $\overset{m}{a}_s$ dem $\overset{m}{z}_s$, $\overset{v}{z}_s$ dem $\overset{v}{a}_s$, $\overset{v}{x} = x_{max}$ dem $\overset{v}{a}$.

Aus § 15 (4) folgt:

(2)

a) wenn $s = r = 2$, so ist $\overset{v}{z}$, also auch $\overset{v}{a}$ beliebig

b) „ $s = 2 < r$, „ „ $\overset{v}{z} = z_s'$ also $\overset{v}{a} = a_s'$

c) „ $s = r > 2$, „ „ $\overset{v}{z} = z_s$ „ $\overset{v}{a} = a_s$

d) „ $2 < s < r$, „ „ $\overset{v}{z}$ = mittl. d. Werte z_s, z_s', $\overset{m}{z}_s$,

mithin $\varphi_r(\overset{v}{z})$ = mittl. d. Werte $\varphi_r(z_s)$, $\varphi_r(z_s')$, $\varphi_r(\overset{m}{z}_s)$,

„ $\overset{v}{a}$ = „ „ „ a_s, a_s', $\overset{m}{a}_s$,

„ $\log \overset{v}{a}$ = „ „ „ $\log a_s$, $\log a_s'$, $\log \overset{m}{a}_s$*).

Hiernach liessen sich für jedes der Partialintervalle die $\overset{v}{x}_s$ bestimmen und schliesslich $\overset{v}{x}$ = dem grössten dieser Werte.

In gewissen Fällen können wir uns einen Teil dieser Arbeit ersparen. Sind nämlich zwei aufeinander folgende Intervalle

$$a_s \quad a_s' \quad a_t',$$

---

*) Die Berechnung von $\log \overset{m}{a}_s$ ersiehe aus Art. V.

so dass nach unserer früheren Bezeichnung in dem 1ten $A = A_s$, in dem 2ten $A = A_t$, so können unter anderm folgende Fälle eintreten

(3)

1) $\overset{\mathfrak{v}}{a}_s = a_s'$ und gleichzeitig $\overset{\mathfrak{v}}{a}_t = a_s$

2) $\overset{\mathfrak{a}}{a}_s = a_s'$ od. a_s „ „ $\overset{\mathfrak{v}}{a}_t = a_t'$ bez. a_s'

ad 1) ist in $(a_s\, a_t') : \overset{\mathfrak{v}}{a} = a_s'$

„ 2) „ „ „ $: \overset{\mathfrak{v}}{a} = a_t'$ bez. a_s; es kommt also hier $\overset{\mathfrak{v}}{x}_s$ bezügl. $\overset{\mathfrak{v}}{x}_t$ nicht in Betracht.

Nach diesen Einschaltungen fahren wir in unserer Lösung fort.

5) Bestimme nach (2) mit Rücksicht auf (3) die „in Betracht kommenden“

$$\overset{\mathfrak{v}}{x}_s$$

entweder mit Hülfe der Formeln § 13, I oder § 13, II.

Einige Beispiele werden das Vorstehende klarer machen und zeigen, dass die Lösung einfacher ist, als sie sich darstellt.

Beispiel I[a].

$$f(x) = x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0\ ^{*)}$$

Die kleinste Wurzel zu trennen.

Hier ist $x_1 = 0$, $c = 0$, $f(0) > 0$, $n = 4$, $r = 4$.

Der Verlauf von $A = k_t$:

$$0 \quad k_2 \quad \sqrt{333} \quad k_4 \quad \infty$$

$$s = \overset{\mathfrak{v}}{a} = \sqrt{333}; \quad z = 1{,}082\ldots, \quad \overset{\mathfrak{v}}{x} = 0{,}082 \,.\, \sqrt{333} = 1{,}496\ldots$$

Zwischen 0 und 1,496 liegt also höchstens eine Wurzel. Nun ist $f(0) > 0$; $f(1) < 0$, also enthält

$$(0;\ 1)$$

eine und nur eine Wurzel (zwischen 1 und 1,496 liegt keine).

---

*) The Analysis and Solution of Cubic and Biquadratic Equations. By J. R. Young, London 1842, S. 213 und:

Die Theorie und Aufl. der höheren algebr. und der transc. Glg. von Dr. C. H. Schnuse, Braunschweig 1850, S. 212.

Beispiel I[b].

Die 2te Wurzel der vorigen Gleichung:

(0)*) ... $x^4-80x^3+1998x^2-14937x+5000=0$ ... (4 Wechs

zu trennen.

Wir setzen $c=x_1=1$ und erhalten:

(1) ... $x^4-76x^3+1764x^2-11177x-8018=0$ ... (3 Wechs

$n=4,\quad r=3,\quad e=3,\quad A=-k_3=\frac{1}{76}$ für jedes a in $(0, \infty$

$\overset{v}{a}_0=0,\quad \overset{v}{z}=\infty;$ nach § 13, II.: $\overset{v}{x}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\cdot\frac{8018}{76}}=3{,}75\ \ldots,$

da $f(3{,}75)<0$, so hat (0) zwischen 1 und 4,75 keine Wurzel.

Für $c=x_1=5$ ist

(5) ... $x^4-60x^3+948x^2-457x-29110=0$ ... (3 Wechsel

Hätte (5) weniger Wechsel als (1), so müssten wir wieder rück gehen und die Wurzel in (4,75; 5) suchen**).

Wir finden, ähnlich wie vorher, den neuen Fortschritt:

$$\overset{v}{x}=6{,}236\ \ldots$$

Für $c=x_1=12$ ist:

(12) ... $x^4-32x^3-18x^2+5367x-4036=0$ ... (3 Wechsel

Da kein Zeichenwechsel verloren gegangen, so können wir we gehen.

Es ist $f(12)=-4036<0$, also $r=3$. Die $e=3$ und e entsprechenden Intervalle $(a_s\, a_s')$ sind: $\left(\frac{3}{16},\ \infty\right)$ und $\left(0,\right.$

$\overset{v}{a}=\frac{3}{16};\ \overset{v}{z}=21,\ \ldots;\ \overset{v}{x}=\frac{3}{16}.20\ \ldots=3{,}75.$

---

*) Die nach c transformirte Gleichung bezeichnen wir in bekannter W mit (c), also die ursprüngliche mit (0).

**) Die Einflechtung des Fourier'schen Theorems in unsere Method nicht nötig, aber wie die früheren und die folgenden Beispiele zeigen dur zweckmässig.

Zwischen 12 und 15,75 liegt folglich höchstens eine Wurzel. (12) weiter nach 4 transformirt giebt:

(16) ... $x^4 - 16x^3 - 306x^2 + 3943x + 15352 = 0$ ... (2 Wechsel).

In

$$(12;\ 16)$$

ist also genau eine Wurzel enthalten.

Beispiel I^c.

Die 3te Wurzel von (0) zu trennen.

In obiger Weise fortgefahren, findet man in

$$(16;\ 32)$$

keine Wurzel. Es ist:

(32) ... $x^4 + 48x^3 + 462x^2 - 1753x + 104 = 0$ ... (2 Wechsel)

$f(32) = 104 > 0$, also $r = n = 4$.

$$
\begin{array}{rccc}
e = & 4 & 3 & 2 \\
s = & 0 & 1 & 2 \\
C_s = & 1 & \frac{1}{12} & \frac{1}{77} \\
A_s = & 1 & \frac{1}{12}.a & \frac{1}{77}a^2.
\end{array}
$$

Der Verlauf des kleinsten dieser Werte $A = k_s$ ist:

$$0 \quad {}_{k_2} \quad a_{1,2} \quad {}_{k_3} \quad a_{0,1} \quad {}_{k_4} \quad \infty,$$

wo $a_{0,1} = 12$; $a_{1,2} = \frac{77}{12} = 6{,}4166\ \ldots$ $(a_{0,2} = \sqrt{77} = 8{,}775\ \ldots)$

$\overset{v}{a}_0 = a_0 = 12$ (da $e = r > 2$)

$\overset{v}{a}_1 =$ dem mittl. der Werte $\frac{77}{12}$, 12 und $\overset{m}{a}_{1,4}$

$= \frac{77}{12}$ (nicht $= 12$)

$\overset{v}{a}_2 = \frac{77}{12}$ (hier ist $e = 2 < r$)

$$a = \overset{v}{a} = \frac{77}{12}.$$

Wir können $e = 2$ oder $= 3$ wählen, das Resultat ist dasselbe.

$$e = 2,\ k = \binom{4}{2}\frac{a^2}{462} = \frac{a^2}{77};\ \ p = \frac{a^2}{77}\cdot\frac{104}{a^4} = \frac{104}{77a^2} = \frac{104.144}{(77)^3}$$

$$x = \overset{\mathfrak{v}}{x} = 0{,}07\,.\,\frac{77}{12} = c^a 0{,}45.$$

Da $f(32{,}4) < 0$, dagegen $f(32, > 0$, so befindet sich die 3te Wurzel

in $(32;\ 32{,}4)$,

die 4te Wurzel in $(32{,}4;\ \infty)$.

Beispiel II.

(§ 10. Bspl. I. § 2. Bspl. IIa, (3)).

$$x^6 + 6x^5 + 9x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 0.x + 5 = 0.$$

Man findet $r = 6$; für $x = 0$ sind die Intervalle (a_s, a_s') mit den zugehörigen $A = k_s$:

$$\begin{matrix} 0 & & 0{,}6 & & 1 & & \infty \\ & k_4 & & k_5 & & k_6 & \end{matrix}$$

$$\overset{\mathfrak{v}}{a} = 0{,}6;\quad \overset{\mathfrak{v}}{z} = 1{,}82;\quad \overset{\mathfrak{v}}{x} = 0{,}492 < 0{,}5$$

während wir nach der Methode in § 10 den ersten Fortschritt $= 0{,}4$, den zweiten $= 0{,}1$, zusammen $0{,}5$ fanden.

Beispiel III.

$$f(x) = x^{14} - 2x^{11} + x^{10} + 3x^9 + 5x^6 - 3x^4 + x^2 + 1 = 0\,^*).$$

Es sei x so zu bestimmen, dass zwischen 0 und x höchstens eine Wurzel liegt.

$n = 14$; $r = 14$; $k =$ kleinster der Werte:

$A_0 = C_0 a^0$, $A_4 = C_4 a^4$, $A_5 = C_5 a^5$, $A_8 = C_8 a^8$, $A_{12} = C_{12} a^{12}$,

wo

$$C_0 = 1\quad C_4 = \binom{14}{4}\quad C_5 = \frac{\binom{14}{5}}{3}\quad C_8 = \frac{\binom{14}{6}}{5}\quad C_{12} = \binom{14}{2}$$

$$a_{0,4} = \sqrt[4]{\frac{1}{\binom{14}{4}}}\ a_{0,5} = \sqrt[5]{\frac{3}{\binom{14}{5}}}\ a_{0,8} = \sqrt[8]{\frac{5}{\binom{14}{6}}}\ a_{0,12} = \sqrt[12]{\frac{1}{\binom{14}{2}}}$$

---

*) Die Aufl. d. höheren neuen Glg. von P. C. Jelinek, S. J., Leipzig 1865, S. 32 und ausführl. Lehrb. d. höh. Math. von A. Burg, Wien 183[illegible] Bd. I, S. 164.

Der grösste dieser Werte ist:

$$a_0 = a_{0,12} = \frac{1}{\sqrt[12]{91}}.$$

Der Verlauf von $A = k_s$ ist also:

$$\begin{matrix} 0 & & a_0 & & \infty \\ & k_2 & & k_{14} & \end{matrix}$$

$$\dot{s} = a_0 = \frac{1}{\sqrt[12]{91}}, \quad p = \frac{1}{a_0^{14}} = 91^{\frac{7}{6}} = \varphi_{14}^{(s)}, \quad s = 1{,}3569, \quad a = 0{,}68667$$

$s - \dot{s} = 0{,}245$ und da $f(0{,}245) > 0$, so liegt zwischen

$$0 \text{ und } x = 0{,}245$$

keine Wurzel.

§ 17.

Lösung des Problems in § 16 für gewisse Kategorien der Gleichung (c)

(für welche entweder 1) $e = 2$ oder $= r$ oder 2) $e = 2$ und $= r$).

Fall	Vorzeichen von $c_0 c_1 .. c_n$	Anzahl der Wechsel	$a = \overset{v}{a}\ (>0)$	$z = \overset{v}{z}\ (>1)$	$x = \overset{v}{x}$
1	+ − .... − ± +	2	0	∞	$\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}\cdot\frac{c_n}{c_0}}$
2	+ − .... − + ± + + + − +	2 oder 4	$\sqrt[n-2]{\frac{c_{n-2}}{\binom{n}{2}c_0}}$	$\varphi_n(z) = \frac{c_n}{c_0}\cdot\frac{1}{a^n}$	$a(z-1)$
3	+ .... + − + −	3	beliebig	beliebig	$\sqrt[2]{\frac{c_n}{c_{n-2}}}$
4	+ .. + − + .. + ± − + ... + − + ± −	3	0	∞	$\sqrt[r]{\frac{1}{r-1}\frac{c_n}{c_{n-r}}}$
5	+ .. + − + .. + − ± − + ... + − − + −	3 oder 5 3	$\sqrt[r-2]{\frac{c_{n-2}}{\binom{r}{2}c_{n-r}}}$	$\varphi_r(z) = \frac{c_n}{c_{n-r}}\cdot\frac{1}{a^r}$	$a(z-1)$

Durch die Punkte seien Zeichen angedeutet gleich denen, zw
welche jene stehen. Diese hier durch Punkte getrennten gl
Zeichen können auch zusammenfallen. Wir erhalten so für di

kubischen Gleichungen

sämmtliche Formen mit 2 und 3 Wechseln:

+ − + + ad 1); + − − + ad 1); + + − + ad 2) und + −
ad 3).

(Für die Formen mit keinen oder einen Wechsel ist $\overset{v}{x} = \overset{v}{x}_{max}$

Es bedeutet in obiger Zusammenstellung:

r = Exponent des ersten neg. Gliedes von (c)

$\varphi_r^{(z)} = (r-1)z^r - r z^{r-1} + 1.$

Beispiele.

ad 1. 1) Beispiel I[b], (16): $x = \overset{v}{x} = \sqrt[4]{\frac{15352}{3}} = 8{,}45.$

Die Gleichung (0) hat also zwischen 16 und 24,45 höchstens eine Wurzel und da $f(24{,}45) > 0$ so keine solche.

2) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 135x + 769 = 0$ (2 Wechsel)

$$c = x_1 = 0; \quad x = \overset{v}{x} = \sqrt[4]{\frac{769}{3}} = \sqrt[4]{256{,}33} = 4, \ldots$$

Die nach 4 Transformirte ist: $x^4 + 14x^3 + 69x^2 + x + 309 = 0$ (keine Wechsel)

Es folgt also einerseits: In (0; 4) liegt höchstens eine Wurzel und da $f(4) = 309 > 0$ sowie $f(0) = 769 > 0$ so keine; andrerseits: In (4; ∞) liegt keine Wurzel; beides zusammen gefasst: die Gleichung hat keine positive Wurzel; die in (0; 4) „angezeigten" beiden Wurzeln sind imaginär.

ad 2. 1) Beispiel I[a].

2) $100x^5 - 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 0{,}77x + 1 = 0$ (4 Wechsel)

$$c = x_1 = 0; \; a = \frac{1}{10}, \; \varphi_5(z) = 10^3, \; \log \varphi_5(z) = 3; \; x = \overset{v}{x} = 0{,}23$$

Die nach 0,2 Transformirte hat keine Wechsel, also sind in (0; 0,2): 4 imaginäre Wurzeln angezeigt.

ad 3. $4x^3 - 240x^2 + 3996x - 14937 = 0$ *)

$$c = x_1 = 0; \; \overset{v}{x} = \sqrt{\frac{14937}{240}} = 7{,}88, \; f(7) > 0, \text{ also enthält}$$

(0; 7) eine und nur eine Wurzel.

ad 4. 1) $x^4 - 30x^3 + 700x^2 + 15132x - 1804827 = 0$ **)

*) Schnuse, Braunschweig 1850, S. 201. **) ebenda S. 285.

$$c = x_1 = 0;\; x = \overset{\mathfrak{b}}{x} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1804827}{30}} = 31{,}1;\; f(31) < 0.$$

Also hat die Gleichung in (0; 31) keine Wurzel.

2) Beispiel I^b (5) in § 16.

ad 5. Beispiel I^b (12).

Wir sind bei der vorliegenden Trennungs-Methode wieder auf die Lösung von Gleichungen der Form

$$\varphi_r(z) = p$$

angewiesen, oder genauer auf die Bestimmung von

$$z > 1, \quad \text{so dass} \quad \varphi_r(z) \leqq p,$$

während früher, als es nur darauf ankam von einem Werte x_1 zu einem grösseren $x_1 + x$ fortzuschreiten, unbekümmert um die Grösse des Fortschritts:

z beliebig > 1 gewählt und dann a berechnet werden konnte.

XII.

Zur bequemen Auffindung der Funktionen kleiner Winkel, aus Tafeln von 5 Decimalstellen.

Von

L. Graf *von Pfeil*
in Gnadenfrei.

In Band 42 des Archivs erschien S. 305 u. ff. ein Aufsatz von mir, betreffend die Anwendung der Sekanten zur Auffindung der Sinus, Tangenten und Bogen kleiner Winkel, aus Tafeln von 5 Decimalstellen.

Indem ich auf die in jenem Aufsatz enthaltenen Entwickelungen Bezug nehme, will ich der Benutzung der Maskelyn'schen Regeln, und damit dem Gebrauch der Sekanten eine allgemeinere, und wie ich glaube, praktischere Anwendung geben, als es bis jetzt geschehen ist.

Es lassen sich nämlich bei 5stelligen Tafeln die Funktionen aus den Winkeln, und diese aus jenen mittelst Verzehnfachung der Winkel durch nur einmaliges Nachschlagen leichter und bequemer finden, als es auf irgend eine andere Weise möglich ist, insofern die Tafeln darauf eingerichtet sind.

Bekanntlich lauten die Maskelyn'schen Regeln für kleine Winkel

$$\sin x = x\sqrt[3]{\cos x} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang} x = \frac{x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}.$$

oder logarithmisch:

$$\log\sin x = \log x + \tfrac{1}{3}\log\cos x \quad \text{und} \quad \log\operatorname{tang} x = \log x - \tfrac{2}{3}\log\cos x,$$

oder bequemer:

$$\log\sin x = \log x - \tfrac{1}{3}\log\sec x \quad \text{und} \quad \log\operatorname{tang} x = \log x + \tfrac{2}{3}\log\sec x.$$

Die gewöhnliche Anwendung dieser Regeln, welche auch bei 7-stelligen Tafeln gebraucht wird, und unterhalb der Zahlenlogarithmen bei S und T sich findet, ist in folgenden Formeln ausgedrückt (Bremiker, 6stellige Tafeln, Einleitung S. 27):

$$\log\sin x = \log x + \tfrac{1}{3}\log\cos x - 5{,}3144251,$$

und

$$\log\operatorname{tang} x = \log x - \tfrac{2}{3}\log\cos x - 5{,}3144251.$$

Bequemer für die Anwendung bei 5stelligen Tafeln würden nun die folgenden Formeln sein, bei denen, wie gesagt, stets ein nur einmaliges Nachschlagen, und die Addition weniger Ziffern genügte, wenn die Tafeln dafür eingerichtet wären; und zwar, wenn der Logarithmus gesucht wird:

$$\log\sin 10x = \log\sin^n x + \tfrac{1}{3}\log\sec 10^n x - n - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\log\sec 10^n x}{10^{2n}} \quad \ldots \text{A.}$$

und

$$\log\operatorname{tang} x = \log\sin 10^n x + \tfrac{1}{3}\log\sec 10^n x - n + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\log\sec 10^n x}{10^{2n}} \quad \ldots \text{B.}$$

Wenn dagegen zum Logarithmus der Winkel gesucht wird, je nachdem $\log\sin x$ oder $\log\operatorname{tang} x$ gegeben war:

$$\log\operatorname{tang} 10^n x = \log\sin x + n + \tfrac{2}{3}\log\sec 10^n x + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\log\sec 10^n x}{10^{2n}} \quad \ldots \text{C.}$$

oder

$$\log\operatorname{tang} 10^n x = \log\operatorname{tang} x + n + \tfrac{2}{3}\log\sec 10^n x - \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\log\sec 10^n x}{10^{2n}} \quad \ldots \text{D.}$$ [1]

Das Verfahren beruht, wie man sieht, auf einer Verzehnfachung des Winkels und auf einer Umwandlung und Zurückverwandlung der Sinus und Tangenten in Bogen. In Formel A. und B. geben die beiden ersten Glieder den Logarithmus des Bogens des verzehnfachten Winkels. Davon n Einheiten in der Nennziffer abgezogen, giebt den Logarithmus des Bogens des einfachen Winkels. Das vierte Glied endlich verwandelt diesen Bogen in seinen Sinus oder seine Tangente.

---

1) Die Formeln A, B, C, D sind so gestellt, dass ein negativer Werth von $\log\sec 10^n x$ vermieden wird, dagegen ist $\frac{1}{10^{2n}}$ dieses Werthes nur eine sehr kleine, oft verschwindende Ziffer.

In C und D giebt das erste und letzte Glied den Logarithmus des Bogens des einfachen Winkels, die Erhöhung der Nennziffer um n Einheiten giebt den Bogen des verzehnfachten Winkels, und die Addition des dritten Gliedes verwandelt diesen Bogen in seine Tangente, wie dieses noch näher gezeigt werden soll.

In Worten ausgedrückt ist das Verfahren das folgende.

A und B. Wenn der Winkel gegeben ist, und die Funktion gesucht wird.

1) Man verzehnfacht den Winkel, bis er (als leicht zu merkende Grenze) zwischen 2000″ und 20000″, also zwischen 33′ 20″ und 5° 33′ 20″ fällt. Man könnte als Grenze auch 1800″ und 18000″, also $\frac{1}{2}$° und 5° wählen [2]).
2) Man sucht logsin des verzehnfachten Winkels.
3) Man addirt logsec des verzehnfachten Winkels.
4) Man vermindert die Kennziffer um soviel Einheiten, wie oft man den Winkel mit 10 multiplicirt hatte.
5) A. Wird der Sinus gesucht, so addirt man noch $-\frac{1}{3}\frac{\log\sec 10x}{100}$, wenn man den Winkel mit 10 multiplicirt hatte.

---

2) Die Grenzen sind willkührlich, des leichteren Merkens wegen, gewählt. Sie reichen in 5stelligen Tafeln, **wenn in den beiden ersten Graden die Funktionen von 10″ zu 10″ angegeben sind**, viel weiter, und zwar von 0° 17′ 30″ bis 8° 37′ 43″. (s. den citirten Aufsatz § 12, Anmerkung).

Es werden nämlich über 17′ 30″ die Sekunden und ihre Bruchtheile aus den Differenzen von 10″ zu 10″ noch richtig bestimmt, weil deren Veränderungen nur in der letzten Ziffer liegen und 5 nicht übersteigen. Es lässt sich darum durch Interpolation leicht der richtige Faktor für die Sekunden wählen, z. Bsp.:

$$\log\sin 0^0\,17'\,42{,}6'' = \log\text{tang}.$$

	log tang = log sin 17′ 40″	=	7,71088
40,8 × 2,6 = 106	*pp* 2,6″	=	106
	log tang = log sin	=	7,71194
	Genauer log sin	=	7,7119428
	log tang	=	7,7119485.

Man sieht, dass hier noch ein Schwanken in der 5ten Decimale stattfindet (vergl. Bsp. 16).

Dieses verschwindet bei grösseren Winkeln und insbesondere bei 30′ und mehr, z. Bsp.

5) B. Wird die Tangente gesucht, so addirt man in gleichem Falle noch $+\frac{2}{3}\frac{\log\sec 10x}{100}$.

Hatte man den Winkel mit 100, mit 1000 multiplicirt, so verschwindet bei 5stelligen Logarithmen $\frac{2}{3}\frac{\log\sec 100x}{1000}$, bei 7-stelligen $\frac{2}{3}\frac{\log\sec 1000x}{1000000}$.

C und D. War die Funktion gegeben, und wird der Winkel gesucht, so findet man den verzehnfachten Winkel auf folgende Art:

1) Man erhöht die Kennziffer auf 8, sodass der Winkel zwischen $0^0\,34'\,30''$ und $5^0\,42'\,30''$, also zwischen 2070 und 20550″ fällt *).
2) Man geht mit der, so veränderten Funktion, gleichviel, ob $\sin x$ oder $\operatorname{tang} x$ gegeben war, in die Tangentenspalte ein, sucht $\frac{2}{3}\log\sec$ neben der zunächst höheren Tangente und addirt es.

Zu C. War $\sin x$ gegeben, so addirt man, falls die Kennziffer um eine Einheit vermehrt wurde, noch $\frac{1}{3}\frac{\log\sec 10x}{100}$.

Zu D. War $\operatorname{tang} x$ gegeben, so addirt man in gleichem Falle $-\frac{2}{3}\frac{\log\sec 10x}{100}$.

$$\log\sin 0^0\,30'\,17{,}4'' = 7{,}94502$$

$$\begin{aligned} &\log\sin\ 30'\,10'' = 7{,}94325\\ 23{,}9\times 7{,}4 = 177 \quad &pp\ \ 7{,}4'' = 177\\ &\log\sin\ 30'\,17{,}4'' = 7{,}94502\end{aligned}$$

Der genauere Werth ist $= 7{,}9450198$.

$$\log\operatorname{tang} 0^0\,30'\,17{,}4'' = 7{,}94504$$

$$\begin{aligned} &\log\operatorname{tang}\ 30'\,17'' = 7{,}94326\\ &24{,}0\times 7{,}4'' = 178\\ &\log\operatorname{tang}\ 30'\,17{,}4'' = 7{,}94504\end{aligned}$$

Der genauere Werth ist $= 7{,}9450366$.

Nach der andern Seite gelten die Maskelyn'schen Regeln für 5-stellige Tafeln bis $8^0\,37'\,43''$ weil erst hier der Fehler eine halbe Einheit der 5ten Stelle erreicht. Bei $5^0\,42'\,30''$ erreicht der Fehler noch nicht eine Einheit der 6ten Stelle.

(Vergl. den citirten Aufsatz aus Archiv, Band 42, § 4).

*) S. Anmerkung 2.

War dagegen die Kennziffer um mehrere Einheiten vermehrt worden, so giebt in 5stelligen Tafeln $\frac{2}{3}\frac{\log\sec 100x}{10000}$ keine bedeutende Ziffer mehr. Ebenso verschwindet bei 7stelligen Tafeln $\frac{2}{3}\frac{\log\sec 1000x}{1000000}$.

Ich gebe zur Erläuterung der Formeln sogleich einige Beispiele, und zwar, der besseren Uebersicht wegen, auch mit 7stelligen Logarithmen. Bei 7stelligen Logarithmen sind die Maskelyn'schen Regeln bis zu $2^0\,44'\,10''$ giltig, weil sie erst hier einen Fehler von einer halben Einheit der 7ten Stelle geben.

Beispiel 1. a) Gesucht log sin und log tang von $0^0\,15'\,12{,}23'' = 912{,}23''$.

$10^n x = 10x = 9122{,}3'' = 2^0\,32'\,2{,}3''$	$\log\sin 2^0\,32'\,0'' = 8{,}6454282$
	$pp \quad 2{,}3'' = \quad 1093{,}6$
$\frac{1}{3}\log\sec 10^n x$	$\frac{1}{3}\log\sec \quad = \quad 1416{,}0$
$n = 1$	$-n = \quad -1$
$-\frac{1}{3}\cdot\frac{\log\sec 10^n x}{10^{2n}}$	$-\frac{1}{3}\cdot\frac{\log\sec 10x}{100} = - \quad 14{,}2$
$\log\sin\ 15'\,12{,}23''$	$= 7{,}6456777$
$+\frac{2}{3}\cdot\frac{\log\sec 10^n x}{10^{2n}}$	$+\frac{2}{3}\cdot\frac{\log\sec 10x}{100} = +\ 28{,}3$
$\log\tan\!g\ 15'\,12{,}23''$	$= 7{,}6456820.$

Die Funktionen würden durch nur **einmaliges Nachschlagen** bei $2^0\,32'\,2{,}3''$ gefunden werden [3]).

Dasselbe Beispiel mit 5stelligen Logarithmen.

Beispiel 1. b) $x = 15'\,12{,}23'' = 912{,}23''$.

---

3) Durch die Zahlenlogarithmen gerechnet:

$x = 15'\,12{,}23'' = 912{,}23''$ (Nachschlagen bei 91223)	$\log = 2{,}9601044$
(Nachschlagen bei 912)	$S = 4{,}6855734$
	$T = 4{,}6855776$
$\log\sin x$	$= 7{,}6456778$
$\log\tan\!g\, x$	$= 7{,}6456820.$

Durch **zweimaliges** Nachschlagen erhalten.

$10^n x = 10x = 9122{,}3'' = 2^0\,32'\,2{,}3''$	
	$\log\sin 2^0\,32' = 8{,}64543$
	$pp\ 2{,}3'' = 10{,}9$
	$\frac{1}{3}\log\sec = 14{,}2$
	$-n = -1$
	$-\frac{1}{3}\cdot\frac{\log\sec}{100} = -0{,}1$
$\log\sin\ 15'\,12{,}23''$	$= 7{,}64568$
	$+\frac{2}{3}\cdot\frac{\log\sec}{100} = +0{,}3$
$\log\tan g\ 15'\,12{,}23''$	$= 7{,}64568.$

Beispiel 2. a) Gegeben $\log\sin x = 7{,}6456777$, gesucht x.

$\log\sin x$	$= 7{,}6456777$
$n = 1$	$= 1$
$\frac{2}{3}.\log\sec 10^n x = \frac{2}{3}.\log\sec 10x$	$=\quad 2833$
$\frac{1}{3}.\frac{\log\sec 10^n x}{10^{2n}} = \frac{1}{3}.\frac{\log\sec 10x}{100}$	$=\quad 14.$
$\log\tan g\,10^n x\ (= 10x) = \log\tan g\ 2^0\,32'\,2{,}3''$	$= 8{,}6459624.$

Bsp. 3 (vergl. 1. a)). Gegeben $\log\tan g x = 7{,}6456820$, gesucht x.

$\log\tan g x$	$= 7{,}6456820$
$n = 1$	$+1$
$\frac{2}{3}\log\sec 10x$	$=\quad 2833$
$-\frac{2}{3}\cdot\frac{\log\sec 10^n x}{10^{2n}} = -\frac{2}{3}\,\frac{\log\sec 10x}{100}$	$=\quad -28$
$\log\tan g\,10^n x = \log\tan g\,10x = \log\tan g\ 2^0\,32'\,2{,}3''$	$= 8{,}6459625.$

Aus beiden Werthen folgt $x = 15'\,12{,}23''$.

Dieselben Beispiele mit 5 stelligen Logarithmen.

Beispiel 3 (vergl. 1. b) Gegeben $\log\sin = \log\tan g x$.

$\log\sin x = \log\tan g x$	$= 7{,}64568$
	$+1$
$\frac{2}{3}.\sec 10x$ . . .	28
$\frac{1}{3}.\frac{\sec 10x}{100}$ . . .	00
$\log\tan g\,10x\,(= 2^0\,32'\,2{,}3'')$	$= 8{,}64596$
$\log\tan g\ 2^0\,32'$	$= 8{,}64585$
$\frac{11\times 60}{285} = 2{,}3 \qquad pp\ 2{,}3''$	11

Das Resultat würde ebenfalls durch nur einmaliges Nachschlagen erhalten werden, sowohl bei 7- als bei 5stelligen Logarithmen [4]).

Schon ein Blick auf die vorstehenden Beispiele zeigt, dass die oben unter A, B, C, D erwähnten Formeln bei 5stelligen Tafeln eine sehr leichte Auffindung der Funktionen gewähren, indem sie in allen Fällen ein nur einmaliges Nachschlagen und die Addition weniger Ziffern erfordern. Das erste Glied der Formeln A und B, $\log\sin 10^n x$ wird durch eine blosse Verschiebung des Winkels erhalten: eine sehr leichte Sache, sobald die Tafeln darauf eingerichtet sind. Das 2te Glied in diesen Formeln, $\frac{1}{3}$ bezüglich $\frac{2}{3}\log\sec 10^n x$ kann bis zu 6° einschliesslich in 5stelligen Tafeln höchstens 3 Ziffern erhalten, meistens deren nur zwei. Das 3te Glied n besteht in einer blossen Verminderung oder Vermehrung der Kennziffer um eine oder wenige Einheiten. Das 4te Glied endlich, $\frac{1}{3}$ bezügl. $\frac{2}{3}\frac{\log\sec 10^n x}{10^{2n}}$, so weitläufig es aussieht, steht, wie gesagt, anstatt $\frac{1}{3}$ bezüglich $\frac{2}{3}\log\sec x$, was sogleich gerechtfertigt werden soll. Es bewirkt dieses Glied die Umwandlung des Bogens in den Sinus oder die Tangente und umgekehrt, und enthält in 5stelligen Tafeln höchstens eine Einheit der 5ten Stelle. Dieses Glied wird aus $\frac{1}{3}$, bezüglich $\frac{2}{3}\log\sec 10^n x$ erhalten, indem man die Decimalstellen dieses Gliedes um $2n$ Stellen nach rechts rückt; wie die so eben angeführten Beispiele solches zeigen.

In den Formeln C und D ist nur noch zu erwähnen, dass $\frac{2}{3}\log\sec 10^n x$ unter den bekannten Grössen aufgeführt wird, während $10^n x$, als unbekannt, erst gefunden werden soll. Das Verfahren rechtfertigt sich dadurch, dass die Sekante in den für die Rechnung zu benutzenden Grenzen sich sehr langsam ändert, sodass sie darum, nachdem man den gegebenen $\log\sin x$ oder $\log\operatorname{tang} x$ in der Kennziffer verändert hat, neben diesem Werth ohne Nachtheil aufgesucht werden kann.

---

4) Durch die Zahlenlogarithmen (nach Bremicker S. XXV).

log tang	= 7,6456820
T für 15′ 12″	= 4,6855776
Zugehörige Zahl = 912,23″ = 15′ 12,23″	2,9601044.

Es musste in den Sekundentangenten 7,6455725 als die Tangente von 15′ 12″, dann in den Zahlenlogarithmen T für 15′ 12″ bei 912, zuletzt die Zahl 912,23 bei dem bezüglichen Logarithmen nachgeschlagen werden. Also ein dreimaliges Nachschlagen,

Das Verfahren $\frac{1}{3}\cdot\frac{\log\sec 10^n x}{10^{2n}}$ für $\frac{1}{3}\log\sec x$ zu setzen, rechtfertigt sich durch die Erwägung, dass bei kleinen Winkeln die Differenzen der Sekanten beinahe im Verhältniss der Quadrate der Bogen wachsen.

Es seien nämlich a, b, h die Seiten des Funktions-Dreiecks des kleinen Winkels x (s. d. Fig.).

Es ist dann $\sec x = \frac{h}{b}$ und bezeichnet man die Differenz von h und b mit d, so ist $\sec x = \frac{b+d}{b} = 1+\frac{d}{b}$. Es ist aber $h^2 = (b+d)^2 = b^2+2bd+d^2$ und auch $h^2 = b^2+a^2$, also

$$a^2 = 2bd+d^2.$$

Bei der vorausgesetzten Kleinheit des Winkels verschwindet d^2 neben $2bd$. Es ist darum $a^2 = 2bd$, woraus $d = \frac{a^2}{2b}$ und schliesslich durch Substitution $\sec x = 1+\frac{a^2}{2b^2}$ folgt.

Es stellt hier $\frac{a^2}{2b^2}$ denjenigen Werth vor, um welchen in kleinen Winkeln die Sekante grösser ist als 1. In diesem Werth ist aber $\frac{1}{2b^2}$ eine constante Grösse. Setzt man darum für a verschiedene Werthe, x, $\frac{1}{10}x$, $\frac{1}{100}x \ldots \frac{1}{10^n}x$, so müssen sich die Werthe von $\frac{a^2}{2b^2}$ demgemäss verändern in $\frac{x^2}{2b^2}$, $\frac{1}{100}\cdot\frac{x^2}{2b^2}$, $\frac{1}{10000}\cdot\frac{x^2}{b^2} \cdots \frac{1}{10^{2n}}\,\frac{x^2}{b^2}$.

Das von den Sekanten Erwiesene gilt aber auch von den Logarithmen der Sekanten, weil diese bekanntlich bei geringen Zahlenunterschieden im Verhältniss dieser Unterschiede wachsen und abnehmen.

Als Beispiele mögen folgende Werthe dienen:

10000″ = 2° 46′ 40″	sec = 1,0011764	log sec = 0,0005106
1000″ = 0° 16′ 40″	sec = 1,0000118	log sec = 0,0000051
100″ = 0° 1′ 40″	sec = 1,0000001	log sec = 0,0000000,5
10″ = 0° 0′ 10″	sec = 1,0000000	log sec = 0,0000000

ferner:

20000″ = 5° 33′ 20″	sec = 1,0047194	log sec = 0,0020448
2000″ = 0° 33′ 20″	sec = 1,0000470	log sec = 0,0000204
200″ = 0° 3′ 20″	sec = 1,0000005	log sec = 0,0000002
20″ = 0° 0′ 20″	sec = 1,0000000	log sec = 0,0000000

Man sieht, dass in 7stelligen Logarithmen der Winkel 5° 33′ 20″ die für die Regel giltige Grenze bereits überschreitet, wenn man die Sekanten von 20000″ und von 2000″ vergleicht.

Es würde hiernach zweckmässig sein, 5stellige Tafeln etwa in folgender Art anzuordnen.

1) Es müsste bis zu 5° 60′ die Verwandlung in Sekunden neben den Graden und Minuten stehen.
2) Es müssten bis zu 1° 60′ die Logarithmen der Sinus und Tangenten von 10″ zu 10″ angegeben sein.
3) Von 2° 0′ bis zu 5° 60′ genügen zwar die Minuten für die Rechnung, indess dürfte die Angabe von 10″ zu 10″ bequemer sein.
4) Ebenfalls bis 5° 60′ müsste $\frac{2}{3}$ des Logarithmus der Sekanten angegeben sein, und zwar bis in die 6te Stelle [5]).
5) Von 0° 0′ bis 0° 20′ würden die Differenzen der Sinus und Tangenten besser wegbleiben, um Verwirrung zu vermeiden, weil sie für die Rechnung nicht brauchbar sind.
6) Es könnten bis zu 5° 60′ oder mindestens bis zu 1° 60′ die Logarithmen der Cosinus füglich abgekürzt werden, um Raum zu sparen.
7) Die Spalte $\frac{2}{3}$ sec bleibt besser von den übrigen getrennt, weil sie zwischen diese gestellt, die Harmonie stören würde, indem sie für die untere Bezeichnung der Winkel von 45° bis 90° nicht passt.

Ich will hier ein Musterbild geben, wie derartige Tafeln wohl eingerichtet werden könnten:

---

5) Es müssen $\frac{2}{3}$ der Sekanten angegeben werden, weil sich daraus $\frac{1}{3}$ und die ganze Sekante, als der negative Cosinus leicht niederschreibt.

Die 6te Decimale ist nothwendig, weil sie bei den Sekundendifferenzen berücksichtigt werden kann.

Von 0⁰ 0′ bis zu 1⁰ 60′.

1⁰.

″	$\frac{1}{3}$ sec 0,000	′	″	Sin.	D	Tang.	Dc	Cotang.	Cosin 9,99	″	′
4800	07,8	20	0	8,36678	90	8,36689	91	1,63311	...988	0	40
4810	07,9		10	8,36768	90	8,36780	90	1,63220	...988	50	
4820	07,9		20	8,36858	90	8,36870	90	1,63130	...988	40	
4830	07,9		30	8,36948	90	8,36960	90	1,63040	...988	30	
4840	08,0		40	8,37038	90	8,37050	90	1,62950	...988	20	
4850	08,0		50	8,37128	89	8,37140	89	1,62860	...988	10	
4860	08,0	21	0	8,37217		8,37229		1,62771	...988	0	39
		′	″	Cosin.	D	Cotg.	Dc	Tang.	Sin.	″	1

88⁰

Von 2⁰ 0′ bis 5⁰ 60′
(mit Minutendifferenzen, wenn nicht, wie oben, mit 10″ Differenzen).

4⁰.

″	$\frac{2}{3}$ sec 0,000	′	″	Sin.	D	Tang.	Dc	Cotang.	Cosin 9,99	″	′
15600	82,9	20		8,87829	166	8,87953	167	1,12047	...876		40
15660	83,5	21		8,87995	166	8,88120	167	1,11880	...875		39
15720	84,2	22		8,88101	165	8,88287	166	1,11713	...874		38
15780	84,8	23		8,88326	164	8,88453	165	1,11547	...873		37
15840	85,5	24		8,88490	164	8,88618	165	1,11382	...872		36
15900	86,1	25		8.88654		8,88783		1,11217	...871		35
		′		Cosin.	D	Cotang.	Dc	Tang.	Sin.	″	′

85⁰

Ich gebe sogleich noch einige Beispiele mit Benutzung des vorstehenden Tabellenstücks.

Beispiel 4. Gesucht logsin und logtang von $x = 0^0\,8'\,2{,}46'' = 482{,}46''$.

$10x = 4824{,}6''$ $\quad 1^0\,20'\,20''$	$\log\sin = 8{,}36858$
$= 1^0\,20'\,24{,}6''$ $\quad 4{,}6''$	$pp = \quad 41{,}4$
	$\frac{1}{3}\sec = \quad 3{,}9$
	$-1,$
$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sec}{100} = 0{,}04 \text{ verschwindet}\right).$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sec}{100} = \quad +0{,}1$
$\log\sin x = \log\tan x$	$= 7{,}36903.$ [6])

6) Mit Zahlenlogarithmen gerechnet.

482,46	$\log = 2{,}6834613$
bei 482	$S = 4{,}6855745$
	$T = \quad 5756$
	$\log\sin = 7{,}3690358$
	$\log\tan = 7{,}3690369$

el 5. Gesucht logsin und logtang von $x = 0^0\ 26'\ 21{,}2''$
$10x = 15812'' = 4^0\ 23'\ 32''$.

a) Mit Minutendifferenzen gerechnet.

$4^0\ 23''$	logsin = 8,88326
0 = 87,5 32″	pp = 87,5
	$\frac{1}{3}$sec = 42,5
	— 1,
	$-\frac{1}{3} \cdot \frac{\sec}{100} = -0{,}4$
	$+\frac{2}{3} \cdot \text{loc} = +0{,}8$
$0^0\ 26'\ 21{,}2''$	log sin = 7,88456 log tang = 7,88457. [7]

b) Mit Zehnsekundendifferenzen gerechnet.

$4^0\ 23'\ 30''$	logsin = 8,88408
),6 2″	pp = 5,6
	$\frac{1}{3}$sec = 42,6
	— 1,
	$-\frac{1}{3} \frac{\sec}{100} = -0{,}4$
	$+\frac{2}{3} \cdot \frac{\sec}{100} = +0{,}9$
	logsin = 7,88456 logtang = 7,88457. [7]

h Zahlenlogarithmen gerechnet.

26′ 21,2″ = 1518,2	log = 3,1989868
	S = 4,6855706
	T = 5834
logsin x	= 7,8845574
logtang x	= 7,8845702

Beispiel 6. Gegeben $\log \sin x = \log \operatorname{tang} x = 7{,}36903$, sucht x.

	$1 + \log \sin = 8{,}36903$
	$\frac{2}{3}\ \sec = 7{,}9$
	$\frac{2}{3} \cdot \frac{\sec}{100} = 0{,}1$
$10x = 4824{,}6'' = 1^0\ 20'\ 24{,}6''$	$\log \operatorname{tang} 10x = 8{,}36911$
$x = 482{,}46'' = 0^0\ 8'\ 2{,}46''$. [8]	870
	$pp\ 4{,}6'' = 41$

Beispiel 7. Gegeben $\log \sin x = 7{,}88456$, gesucht x.

a) Mit Minutendifferenzen.

	$1 + \log \sin x = 8{,}88456$
	$\frac{2}{3}\ \sec = 85{,}5$
	$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{\sec}{100} = +0{,}4$
$10x = 15812'' = 4^0\ 23'\ 32''$	$\log \operatorname{tang} 10x = 8{,}88542$
$x = 1581{,}2'' = 0^0\ 26'\ 21{,}2''$	453
$(89 \times 60 : 165 = 32)$	$pp\ 32'' = 89$

Gegeben $\log \operatorname{tang} x = 7{,}88457$, gesucht x.

	$1 + \log \operatorname{tang} x = 8{,}88457$
	$\frac{2}{3}\ \sec =$ 85,[illegible]
	$- \frac{2}{3} \cdot \frac{\sec}{100} =$ −0,[illegible]
Wie oben . . .	$\log \operatorname{tang} 10x = 8{,}88542$
b) Mit Sekundendifferenzen .	 536
$(6 \times 10 : 28 = 2)$ $10x = 4^0\ 23'\ 32''$	$pp\ 2'' = 6$

$x = 0^0\ 26'\ 21{,}2''$ wie in a). [9]

---

8) Durch Zahlenlogarithmen gerechnet.

Nachzuschlagen in den Sekundenlogarithmen

neben 7,36862. Man findet für 8′2″	$\log \sin = 7{,}36903$
in den Zahlenlogarithmen . . .	$S = 4{,}68557$
und schliessl. $0^0\ 8'\ 2{,}46'' = 482{,}46''$	$\log = 2{,}68346$

Es ist ein dreimaliges Nachschlagen nöthig.

9) Durch Zahlenlogarithmen.

	$\log \operatorname{tang} = 7{,}88457$
	$T = 4{,}68558$
$x = 0^0\ 26'\ 21{,}2'' = 1581{,}2''$	$\log = 3{,}19899$

Man sieht aus den Beispielen 7. a) und 7. b), dass das Resultat unverändert ist, ob Minuten- oder Zehnsekundendifferenzen angewendet werden. Nur die Berechnung der Sekunden ist bei Letzteren bequemer und kürzer.

Ich will, der Vollständigkeit wegen, die Rechnung mit den Funktionen einiger sehr kleinen Winkel geben, und zwar zu 7 Stellen, weil bei 5 Stellen das Element $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sec 10^n x}{10^{2n}}$ nicht hinreichend deutlich wird. Die 5stellige Rechnung ergiebt sich durch Abstreichen der beiden letzten Ziffern, welche ich durch ein Comma getrennt habe.

Beispiel 8. Gesucht log sin = log tang 0° 0′ 10″

$10000'' = 2^0\,46'\,40''$ . . . . log sin = 8,68540,47

$\frac{2}{3}\,\frac{\sec}{1000000}$ verschwindet. $\frac{1}{3}$ log sec = 17,02

— 3,

log sin = log tang . . . . = 5,68557,49

Beispiel 9. Gesucht log sin und log tang 0° 1′ 40″ = 100″

$10000'' = 2^0\,46'\,40''$ . . . . log sin = 8,68540,47

$\frac{1}{3}$ sec = 17,02

— 2,

$-\frac{1}{3} \cdot \frac{\sec}{10000}$ — 0,2

$+\frac{2}{3}\,\frac{\sec}{10000}$ + 0,3

log sin = log tang . . . . = 6,68557,49

Es ist hier bei log sin eine Differenz in der 7ten Stelle, welche mehr als deren Hälfte beträgt. Die letzte Ziffer heisst richtiger 8, nicht 9. [10])

Beispiel 10. Gesucht log sin und log tang 0° 16′ 40″ = 1000″

Es ist $10x = 10000''$ log sin = 8,68540,47

$\frac{1}{3}$ sec = 17,02

— 1,

$-\frac{1}{3} \cdot \frac{\sec}{100}$ — 17,0

$+\frac{2}{3} \cdot \frac{\sec}{100}$ + 34,0

0° 16′ 40″ { log sin . . . . = 7,68557,32
log tang . . . = 7,68557,83

---

10) Eine Einheit der 7ten Stelle entspricht bei 1′ 40″ einem verschwindenden Bruchtheil von $\frac{1''}{43648}$.

Um einen Belag zu geben, wie scharf sich die Rechnung nach dem gegebenen Verfahren führen lässt, diene

Beispiel 11. Gesucht log sin = log tang 0° 0′ 10,001″

10001″ = 2° 46′ 41″	log sin = 8,68544,81
	$\frac{1}{3}$ sec = 17,02
	— 3
log sin = log tang 0° 0′ 10,001″ . . .	= 5,68561,83
Es war log sin = log tang 0° 0′ 10,000″ . . .	= 5,68557,49
Differenz für 0,001″ . . .	= 4,34

Man sieht, dass die 5te Decimale bereits eine Differenz von 4 Einheiten enthält.

Beispiel 12. Gegeben log sin x = log tang x = 5,6855749, gesucht x.

$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sec}{1000000} \text{ verschwindet}\right)$

	3 + log sin = 8,68557,49
	$\frac{2}{3}$ sec = 34,04
$1000x$ = 2° 46′ 40″	log tang = 8,68591,53
x = 0° 0′ 10″	

Beispiel 13. Gegeben

	log tang = 6,6855749
	2 + log tang = 8,68557,49
	$\frac{2}{3}$ sec = 34,04
	$-\frac{2}{3} \cdot \frac{\sec}{10000}$ 0,3
$100x$ = 2° 46′ 40″	log tang = 8,68591,53
x = 0° 1′ 40″	

Beispiel 14. Gegegen

	log sin x = 7,6855732
	1 + log sin = 8,68557,32
	$\frac{2}{3}$ sec = 34,04
	$+\frac{1}{3} \cdot \frac{\sec}{100}$ = + 17,0
$10x$ = 2° 46′ 40″	log tang = 8,68591,53
x = 16′ 40″	

Beispiel 15. Gegeben

	log tang x = 7,6855783
	1 + log tang = 8,68557,83
	$\frac{2}{3}$ sec = 34,04
	$-\frac{2}{3} \cdot \frac{\sec}{100}$ = — 0,34
Wie im vorstehenden Beispiel	log tang = 8,68591,53

Beispiel 16. Es folge noch zum Vergleich das Beispiel durch Verzehnfachung gerechnet, welches in der Anmerkung 2) aus den 10" Differenzen unmittelbar gerechnet wurde.

Gesucht log sin und log tang 17' 42,6" = 1062,6"

$10x = 10626" = 2^0\,57'\,6"$ $2^0\,57'$ log sin = 8,71151

$6"$ $m =$ 38,5

$\frac{1}{2}m =$ 19,2

-1

$-\frac{1}{3}\cdot\frac{m}{100} =$ $-0,3$

$+\frac{2}{3}\cdot\frac{m}{100} =$ $+0,6$

---

log sin = 7,71193

log tang = 7,71196

Man sieht, dass diese Rechnungsweise den kleinen Unterschied zwischen Sinus und Tangente herstellt, welcher bei der Rechnung aus der Zehnsekundendifferenz verschwindet.

Alle diese Beispiele könnten durch nur **einmaliges Nachschlagen** gerechnet werden.

Es dürfte für 5stellige Tafeln wohl kaum ein Verfahren aufgefunden werden, welches die Aufgabe, die Functionen sehr kleiner Winkel schnell und genau zu finden, leichter löst, als das hier vorgeschlagene, und es **würde darum eine werthvolle Bereicherung der mathematischen Hülfsmittel sein, wenn sich Jemand die Mühe nehmen wollte, 5stellige Tafeln in der angegebenen Art einzurichten** *).

Es bedürfte dazu in etwa schon vorhandenen Tafeln nur einer Erweiterung der ersten 6 Grade.

In Beziehung auf 7stellige Tafeln enthalte ich mich des Urtheils. Zweckmässig jedoch würde es sein, die Anwendung der Zahlenlogarithmen mittelst S und T weiter auszudehnen, als es jetzt geschieht, (bis 10000" = 2° 46' 40") etwa bis zu 5°, wo sich die Zehnsekundendifferenzen bequem anwenden lassen; indem das Ermitteln aus den

*) Ich sprach diesen Wunsch bereits in der Anmerkung zu § 12. des mehrfach gedachten Aufsatzes im Archiv, Band 42, aus.

Sekundenlogarithmen sehr weitläufig ist. Es würde eine solche Ausdehnung eine kleine negative Correktur nöthig machen, da die Maskelynschen Regeln nur bis etwa 10000″ (genauer bis 2° 44′ 10″ = 9850″) einen Fehler geben, welcher kleiner ist, als die Hälfte der 8ten Decimale. Ueber diese Grenze hinaus würden jene Regeln den Bogen, also aus S und T ein wenig zu gross geben.

Diese Correktur erreicht bei 5° 0′ erst einen Wert von 05,611 der siebenten Decimalstelle. Der Werth ändert sich sehr langsam, da der Fehler bei 4° 51′ 30″ schon 04,999 der 7ten Decimale beträgt. (Vergl. § 9. des mehrfach citirten Aufsatzes im Archiv, Band 42.). Es kommen also hier auf 8′ 30″ Aenderung des Winkels nur 00,612 der 7ten Decimale *).

---

*) Die Rechnung nach der gewöhnlichen Form der Maskelynschen Regeln

$$\log\sin x = \log x + \tfrac{1}{3}\log\cos x - 5{,}3144251$$

und

$$\log\mathrm{tang}\, x = \log x - \tfrac{2}{3}\log\cos x - 5{,}3144251$$

scheint wohl für den gewöhnlichen Gebrauch völlig werthlos. Ich gebe als Beleg für diese Behauptung das Beispiel, welches Bremicker in seinen 6stelligen Logarithmen S. 27. anführt, jedoch mit 7stelligen Logarithmen.

Es werden gesucht logsin und logtang von 1° 20′ 45,207″, so hat man

$\log x$(1° 20′ 45,207″)	= 3,6853123	. . . .	A.
	5,3144251	. . . .	B.
$\log\cos x$	= 9,999 802	−10	C.
$\frac{1}{3}\log\cos x$	= 9,9999601	−10	D.
$\log x - 5{,}31\ldots$	= 8,3708872	. . . .	E.
$\frac{2}{3}\log\cos x$	= 9,9999202	−10	F.
$\log\sin x$	= 8,3708473	. . . .	G.
$\log\mathrm{tang}\, x$	= 8,3709679	. . . .	H.

Man muss bei A., B. und C. also dreimal nachschlagen, dazu bei B. die decadische Ergänzung nehmen, bei C. durch 3 dividiren um D. zu finden, B. von A. abziehen, D. verdoppeln für F., zuletzt G. durch Addition von D. und E., H. durch Subtraction aus F. und E. auffinden; alles dieses mit Zahlen von 8 Ziffern.

Auch hier würde folgende Abänderung der Formeln bequemer sein; vorausgesetzt, dass die Tafeln für kleine Winkel die $\frac{2}{3}$ der Sekantenlogarithmen enthielten.

$$\log \sin x = \log x - \tfrac{1}{3} \log \sec x + \log 1''$$
$$\log \operatorname{tang} x = \log x + \tfrac{2}{3} \log \sec x + \log 1''$$

Dasselbe Beispiel. Gesucht log sin und log tang von $1^0\,20'\,45{,}207''$.

$$\begin{array}{lcr}
\log x (1^0\,20'\,45{,}207'') & = & 3{,}6853123 \\
\log 1'' & = & 4{,}6855749 \\
-\tfrac{1}{3} \sec x & = & -399 \\
+\tfrac{2}{3} \sec x & = & +798 \\
\hline
\log \sin x & = & 8{,}3708473 \\
\log \operatorname{tang} x & = & 8{,}3709670
\end{array}$$

Oder wenn die Funktion gegeben ist und der Winkel gesucht wird

$$\log x = \log \sin x + \tfrac{1}{3} \log \sec x - \log 1''$$

und

$$\log x = \log \operatorname{tang} x - \tfrac{2}{3} \log \sec x - \log 1''$$

$$\begin{array}{lcr}
\text{Gegeben } \log \sin x & = & 8{,}3708473 \\
-\log \operatorname{arc} 1'' & = & 5{,}3144251 \\
+\tfrac{1}{3} \sec & = & +399 \\
\hline
\log x (= 1^0\,20'\,45'',207 = 4845'',207 & = & 3{,}6853123 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcr}
\text{Gegeben } \log \operatorname{tang} x & = & 8{,}3709670 \\
-\log \operatorname{arc} 1'' & = & 5{,}3144251 \\
+\tfrac{2}{3} \sec & = & -798 \\
\hline
\text{Wie oben } \log x & = & 3{,}6853123
\end{array}$$

Es ist ebenfalls zweimal nachzuschlagen, bei 8,37... in der Sinus- (beziiglich der Tangenten-) spalte, um sec x zu finden, und bei 3,68... in den Zahlenlogarithmen. Die Rechnung ist jedoch ersichtlich kürzer.



XIII.

Ueber den Spieker'schen Punkt.

Von

Emil Hain.

I.

P sei ein Symmetriepunkt des Dreieckes ABC, seine Normale auf $BC = a$ werde mit p_a bezeichnet. Ist A' die Mitte von BC, also $A'B'C'$ das Mittendreieck von ABC; so hat auch das Dreieck $A'B'C'$ einen Punkt, dessen Beziehungen für dasselbe dieselben sind, wie die von P für das Urdreieck. Im Allgemeinen fallen diese beiden Punkte nicht zusammen, wir nennen also den dem Punkte P entsprechenden P'. Die Normale von P' auf $B'C'$ ist dann $\frac{1}{2}p_a$. Der Punkt P' wird aber für das Urdreieck ein anderer Symmetriepunkt p_a'. Und wenn h_a die Höhe auf a bezeichnet, so gibt die Figur:

$$p_a' = \frac{h_a - p_a}{2}$$

woraus sich zugleich ergibt, dass Urdreieck und Mittendreieck blos einen gemeinsamen Symmetriepunkt besitzen. Ist also $P \equiv P'$, so muss $p_a' = p_a$ sein, d. h.

$$p_a = \frac{h_a - p_a}{2}, \quad 3p_a = \frac{2F}{a}$$

Dieser gemeinsame Symmetriepunkt ist also der Schwerpunkt. Für P als das Um- und Inkreiscentrum ist P' schon untersucht worden, im ersten Fall von Feuerbach, im zweiten später von Spieker (Archiv LI). Wir wollen also den Punkt P' für P als das Inkreiscentrum den Spieker'schen Punkt nennen und ihn mit K bezeichnen. Es erfolgt zunächst:

$$p_a' = \frac{h_a - \varrho}{2} = \frac{\varrho}{2} \cdot \frac{b+c}{a}$$

wo ϱ der Inkreisradius des Urdreieckes. Die Coordinaten von K — das Urdreieck zum Fundamentaldreieck gewält — sind dann:

$$bc(b+c).$$

II.

Das Fusspunktdreieck der Ecktransversalen des Spieker'schen Punktes hat zum Flächeninhalt den Ausdruck:

$$\frac{2\Pi(a+b)}{\Pi(2a+b+c)} \cdot F$$

AK treffe BC in A_1. Die Coordinaten von K und A sind bzhw. $bc(b+c)$, $ca(c+a)$, $ab(a+b)$ und 1, 0, 0.

Somit ist

$$AK \equiv b(a+b)x_b - c(a+c)x_c = 0.$$

Es ist aber auch

$$BC \equiv x_a = 0.$$

Sind nun x_{aa}, x_{ab}, x_{ac} die Normalen von A_1 auf abc, so folgt aus den Gleichungen für AK und BC

$$x_{aa} = 0, \quad x_{ab} = \lambda_a c(a+c), \quad x_{ac} = \lambda_a b(a+b)$$

wo

$$\lambda_a = \frac{2F}{bc(2a+b+c)}.$$

Wir erhalten dann:

$$\triangle A_1 B_1 C_1 =$$

$$\frac{abc}{8F^2} \cdot \lambda_a \lambda_b \lambda_c \begin{vmatrix} 0 & c(a+c) & b(a+b) \\ c(b+c) & 0 & a(a+b) \\ b(b+c) & a(a+c) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2\Pi(a+b)}{\Pi(2a+b+c)} \cdot F.$$

III.

Das Fusspunktdreieck der vom Spieker'schen Punkt auf die Seiten gefällten Perpendikel hat zum Flächeninhalt den Ausdruk:

$$\frac{\varrho^2(\Sigma a^2\,\Sigma ab+\Sigma a^4)}{4a^2b^2c^2}\cdot F$$

A_2 sei der Fusspunkt der Normalen von K auf BC, $\angle ACB=\gamma$, dann ist:

$$KA_2=\frac{\varrho}{2}\cdot\frac{b+c}{a}$$

$$KB_2=\frac{\varrho}{2}\cdot\frac{c+a}{b}$$

$$\triangle KA_2B_2=\frac{b+c}{a}\cdot\frac{c+a}{b}\cdot\frac{\varrho^2\sin\gamma}{8}$$

$$=\frac{(b+c)(c+a)}{4a^2b^2}\cdot\varrho^2F$$

Es ist also:

$$\triangle A_2B_2C_2=\frac{\varrho^2F}{4a^2b^2c^2}\cdot\Sigma c^2(b+c)(a+c)$$

$$=\frac{\varrho^2F}{4a^2b^2c^2}\,\Sigma c^2(ab+bc+ca+c^2)$$

$$=\frac{\varrho^2F}{4a^2b^2c^2}\,\Sigma(a^2\,\Sigma ab+a^4).$$

V.

Die Abstände der Ecken eines Dreieckes von der Harmonikalen des Spicker'schen Punktes verhalten sich wie die reciproken Summen je zweier Seiten des Urdreieckes.

Die KA trifft BC in A_1. Die $B_1 C_1$ treffen die BC in Punkten einer Geraden, der Harmonikalen von K. Die Gleichung der Harmonikalen des Punktes ξ_a ist $\Sigma \frac{x_a}{\xi_a} = 0$. Der Abstand eines Punktes, dessen Normale auf a mit p_a bezeichnet wird, von der Geraden:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

hat zum Ausdruck:

$$\frac{a_1 p_a + b_1 p_b + c_1 p_c}{N}$$

wo $N^2 = \Sigma a_1^2 - 2\Sigma a_1 b_1 \cos\gamma$.

Es ist also die Gleichung der Harmonikalen von K:

$$\Sigma a(a+b)(a+c)x_a = 0.$$

Für A ist:

$$p_a = \frac{2F}{a}, \quad p_b = p_c = 0.$$

Der Abstand a' des Punktes A von den Harmonikalen von K ist also:

$$\frac{2F(a+b)(a+c)}{N} = \frac{2F\Pi(a+b)}{N} \cdot \frac{1}{b+c}.$$

Somit ist:

$$a' : b' : c' = \frac{1}{b+c} : \frac{1}{c+a} : \frac{1}{a+b}.$$

VI.

Die Entfernung des Spieker'schen Punktes von seiner Harmonikalen ist zu bestimmen.

Nach V. erhalten wir dafür $\frac{\Sigma a_1 p_a}{N}$. Hier ist

$$p_a = \frac{b+c}{a} \cdot \frac{\varrho}{2}$$

also

$$a_1 p_a = (a+b)(b+c)(c+a) \cdot \frac{\varrho}{2}$$

$$\Sigma a_1 p_a = 3\pi(a+b) \cdot \frac{\varrho}{2}.$$

Nun ist

$$N^2 = \Sigma a_1^2 - 2\,\Sigma a_1 b_1 \cos\gamma.$$

Die Entwicklung gibt:

$$\Sigma a_1^2 = \Sigma a^2 (a+b)^2 (a+c)^2 =$$
$$\Sigma a^6 + 2\,\Sigma a^3\,\Sigma ab\,(a+b) - \Sigma a^4 (b^2+c^2)$$
$$+ 4abc\,\Sigma a^3. + 3a^2b^2c^2.$$

Ferner:

$$\Sigma a_1 b_1 \cos\gamma = \Sigma ab\,(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)\cos\gamma$$
$$= \Pi(a+b)\,\Sigma ab\,(a+b)\cos\gamma.$$

Es ist aber:

$$\Pi(a+b) = 2abc + \Sigma ab\,(a+b)$$
$$\Sigma ab(a+b)\cos\gamma = \Sigma a^3$$

also

$$\Sigma a_1 b_1 \cos\gamma = 2abc\,\Sigma a^3 + \Sigma a^3\,\Sigma ab\,(a+b).$$

Es reducirt sich demnach N^2 auf den Ausdruck:

$$\Sigma a^6 + 3a^2b^2c^2 - \Sigma a^4 (b^2+c^2).$$

Die Entfernung des Spieker'schen Punktes von seiner Harmon
ist also:

$$\frac{3\,\Pi(a+b)}{\sqrt{\Sigma a^6 + 3a^2b^2c^2 - \Sigma a^4(b^2+c^2)}} \cdot \frac{\varrho}{2}.$$

VII.

Die Verbindungsgeraden der Ecken eines Dre
mit den Berührungspunkten des Spieker'schen Kr
schneiden sich in einem Punkt.

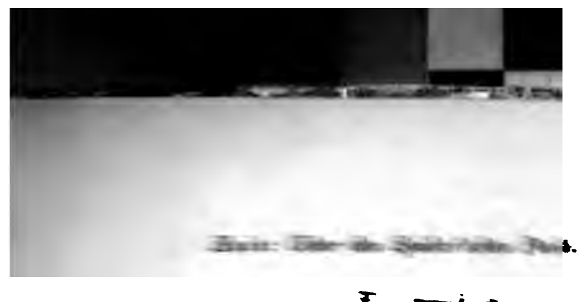
Ist A' die Mitte von BC und berührt den Inkreis des M
dreiecks die Seite $B'C'$ in A_1, so ist:

$$A'B_1 = A'C_1 = \frac{s-a}{2}$$

$$B'C_1 = B'A_1 = \frac{s-b}{2}$$

$$C'A_1 = C'B_1 = \frac{s-c}{2}.$$

Mit x_{aa}, x_{ab}, x_{ac} seien die Normalen von A_1 auf abc beze
Das Verhältniss der von A_1 und C' auf AC gezogenen Norma
$A_1B' : C'B'$. Nun ist aber die Normale von C' auf AC glei
halben Höhe von B auf AC. Es ist also:



$$[illegible] : \frac{F}{i} = \frac{r-i}{s} : \frac{[illegible]}{s}$$

$$[illegible] : = \frac{(r-b)F}{ai}$$

$$[illegible] : = \frac{(r-b)F}{ar}$$

[illegible]

$$[illegible] = 2F$$

[illegible]

$$[illegible] = \frac{F}{a}.$$

Die Coordinaten von A_1 sind also:

$$1, \quad \frac{s-b}{b}, \quad \frac{s-c}{c}.$$

Somit ist:

$$AA_1 \equiv \quad b(s-c)x_2 - c(s-b)x_3$$
$$BB_1 \equiv - a(s-c)x_1 - c(s-a)x_3$$

Hieraus findet man die Coordinaten des Schnittpunktes beider Geraden, sie sind:

$$bc(s-a), \quad ca(s-b), \quad ab(s-c).$$

Die AA_1 schneiden sich also in einem Punkte, dem Symmetriepunkt Q; seine Normale auf a ist $2\varrho . \frac{s-a}{a}$; er ist zugleich der Punkt, der in der Verbindungsgerade des Punktes A mit jenem Punkt der BC liegt, in welchem diese Seite von dem zugehörigen äusseren Berührungskreis berührt wird.

Ist J das Inkreiscentrum, S der Schwerpunkt des Urdreieckes, so kann man nachweisen, dass die Punkte $JSKQ$ harmonisch in der Geraden:

$$\Sigma a(b-c)x_a = 0$$

liegen.

Wien, Februar 1875.



XIV.

Ueber den Schwerpunkt des Dreiecks.

Von

Emil Hain.

I.

Werden die Mitten der Seiten eines Dreiecks mit den Ge ecken verbunden, so schneiden sich diese in einem Punkt, den zigen Symmetriepunkt, der dem Urdreieck und seinem Mittendre zugleich angehört. Ist a die Seite BC des Dreiecks ABC un die Mitte von BC, so schneiden sich die AA' in diesem Punkt, wir mit S bezeichnen wollen. Er ist zugleich der Punkt, der d seine Ecktransversalen das Dreieck in drei gleiche Dreiecke Die Normale von S auf a ist $\frac{2}{3}\frac{F}{a}$, wo $F = \triangle ABC$. Somit bc, ca, ab die Coordinaten von S, wenn das Urdreieck zum Fu mentaldreieck gewählt wird oder kürzer: der Schwerpunkt ist Symmetriepunkt bc. Die Harmonikale des Punktes ξ_a hat die (chung

$$\Sigma \frac{x_a}{\xi_a} = 0$$

Für $\xi_a = bc$ wird somit die Harmonikale die unendliche Gerade Dreieckebene. Es kann also auch S als der Symmetriepunkt del werden, dessen Harmonikale im Unendlichen liegt.

II.

Schneidet die Normale von P auf a diese Seite in A_1, so l man das Dreieck $A_1B_1C_1$ das Normalenfusspunktdreieck des Pun P nennen.

Zunächst ist:

$$\triangle A_1B_1C_1 = \frac{\Sigma a p_a p_c}{4r}$$

o p_a die Normale von P auf a und r den Umkreisradius des Ur-reiecks bezeichnet.

Für $P \equiv S$ ist also:

$$\triangle A_1B_1C_1 = \frac{\Sigma a^2}{36r^2} \cdot F$$

Da $B_1C_1 = \frac{a s_a}{3r}$, wo

$$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

sind die Seiten des Normalenfusspunktdreiecks des Schwerpunkts n Rechtecken aus den Seiten des Urdreiecks und dessen Seiten-lbirenden proportional.

Es ist:

$$\overline{BA_1}^2 = \overline{BS}^2 - \overline{SA_1}^2$$

$$\overline{BA_1}^2 - \overline{CA_1}^2 = \overline{BS}^2 - \overline{CS}^2 = \frac{4}{9}(s_b^2 - s_c^2) = \frac{c^2-b^2}{3}$$

n ist:

$$BA_1 + A_1C = a$$

lso

$$BA_1 - CA_1 = \frac{c^2-b^2}{3a}$$

raus

$$BA_1 = \frac{3a^2+c^2-b^2}{6a}$$

$$CA_1 = \frac{3a^2+b^2-c^2}{6a}$$

Die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und ABC liegen nur collinear, wenn

$$\Pi BA_1 = \Pi CA_1$$

d. i. wenn

$$\Pi(3a^2+c^2-b^2) = \Pi(3a^2+b^2-c^2)$$

oder

$$\Pi(a^2-b^2) = 0$$

raus folgt, dass nur in einem gleichschenkligen Dreieck die Colli-nität der beiden Dreiecke besteht. Das Normalenfusspunktdreieck Schwerpunkts eines ungleichseitigen Dreiecks liegt nie mit dem-n collinear.

III.

Das Rechteck aus der Entfernung des Inkreiscentr von einer Seitenhalbirenden und aus der letzteren se ist die Hälfte von dem Rechtecke aus dem Inkreisra und der Differenz der beiden andern Dreiecksseiten.

Die Entfernung eines Punktes ξ_a von der Geraden

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

wird durch die Formel

$$\frac{a_1 \xi_a + b_1 \xi_b + c_1 \xi_c}{N_1}$$

ausgedrückt, wo

$$N_1^2 = \Sigma a_1^2 - 2\Sigma a_1 b_1 \cos\gamma$$

wenn

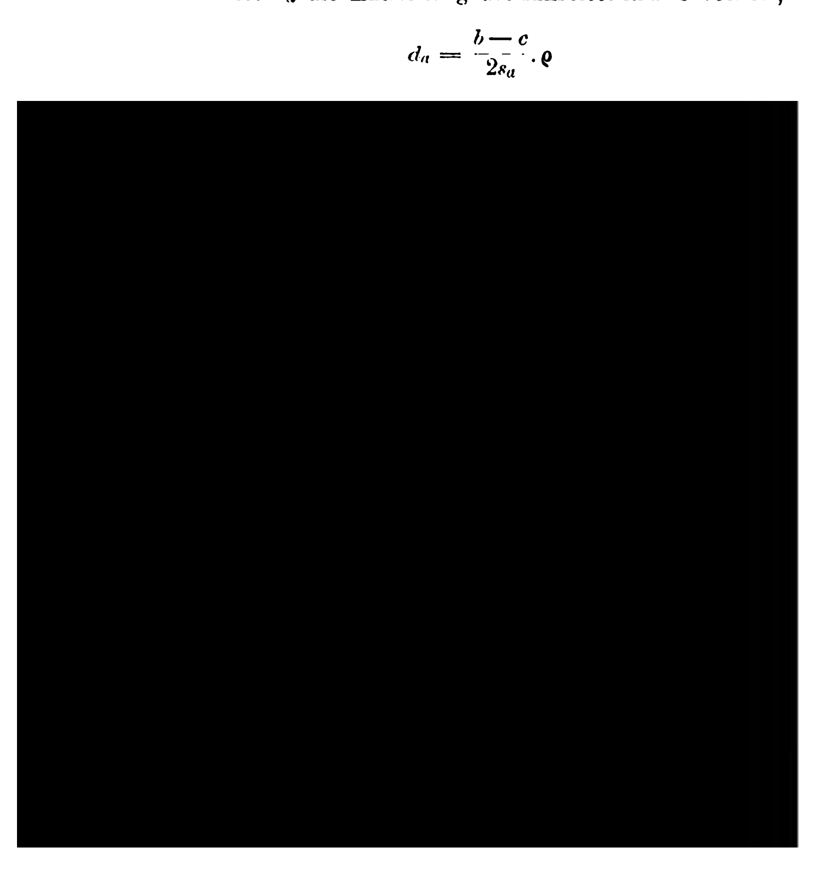
$$\angle CAB = \alpha$$

Für $SA \equiv b x_b - c x_c$ ist

$$N_1 = 2 s_a$$

und bezeichnet d_a die Entfernung des Inkreiscentrums von SA, s

$$d_a = \frac{b-c}{2 s_a} \cdot \varrho$$



[illegible]

[illegible]

[illegible]

V.

Die Polare des Punktes [illegible] in Bezug auf den Umkreis des Fundamentaldreiecks ABC hat die Gleichung

[illegible]

[illegible] die Gleichung der Umkreispolare von S. [illegible] man den Schnittpunkt dieser [illegible] mit der Harmonikalen des Inkreiscentrums, der Geraden [illegible], so hat man als Coordinaten dieses Schnittpunktes

[illegible]

Ist $bc = a^2$, so liegt dieser Punkt auf BC, d. h.

Ist in einem Dreieck eine Seite die mittlere Proportionale zwischen den andern Seiten, so schneiden sich auf der ersten Seite die Umkreispolare des Schwerpunktes und die Harmonikale des Inkreiscentrums in einem Punkt.

VI.

In den Mitten der Dreieckseiten werden auf die Seitenhalbirenden Senkrechte gefällt. Diese Normalen bilden ein Dreieck, dessen Flächeninhalt zu bestimmen sei.

Die Mitte von BC sei $A' \equiv 0, c, b$. $\angle CAB = \alpha$.

Die Gleichung der vom Punkt ξ_a auf die Gerade

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

gefällten Normalen ist:

$$\begin{vmatrix} x_a & \xi_a & a_1 - b_1 \cos\gamma - c_1 \cos\beta \\ x_b & \xi_b & -a_1 \cos\gamma + b_1 - c_1 \cos\alpha \\ x_c & \xi_c & -a_1 \cos\beta - b_1 \cos\alpha + c_1 \end{vmatrix} = 0$$

[illegible]

$$SA \equiv b x_b - c x_c$$

so ist die Gleichung der in A' auf SA Senkrechten:

$$4as_a^2x_a+b(b^2-c^2)x_b-c(b^2-c^2)x_c=0$$

Das Dreieck, welches die Geraden

$$\Sigma a_1x_a=\Sigma a_2x_a=\Sigma a_3x_a=0$$

bilden, hat zum Flächeninhalt den Ausdruck:

$$\frac{abcF\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a & b & c\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\\ a & b & c\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_3 & b_3 & c_3\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a & b & c\end{vmatrix}}$$

Die Determinante des Zählers wird in unserm Fall:

$$3abc[6a^2b^2c^2+\Sigma a^2b^2(a^2+b^2)-\Sigma a^6]$$

Jede der Determinanten des Nenners reducirt sich auf:

$$48abcF^2$$

Somit ist der Flächeninhalt des zu bestimmenden Dreiecks gleich

$$\frac{[6a^2b^2c^2+\Sigma a^2b^2(a^2+b^2)-\Sigma a^6]^2}{12288F^5}$$

VII.

P sei ein Punkt in der Ebene des Fundamentaldreiecks, p_a se[i die] Normale auf a. Der Schwerpunkt des Dreiecks BPC sei S_a. [Das] Dreieck $S_aS_bS_c$ ist zu bestimmen.

Ist A' die Mitte von BC, so hat man zunächst:

$$\frac{\triangle PA'B'}{\triangle PS_aS_b}=\frac{9}{4}=\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle S_aS_bS_c}$$

$$\triangle S_aS_bS_c=\frac{F}{9}.$$

Die Coordinaten von S_a sind:

$$p_a,\quad \frac{2F}{b}+p_b,\quad \frac{2F}{c}+p_c$$

somit:

$$AS_a\equiv b(2F+cp_c)x_b-c(2F+bp_b)x_c=0$$

eieck $S_a S_b S_c$ liegt mit dem Urdreieck collinear; denn die hneiden sich in dem Symmetriepunkt $bc(2F + ap_a)$. Somit ht jedem Punkt P ein Punkt P'. Man findet:

$$PP' \equiv \Sigma a(bp_b - cp_c)x_a = 0$$

Heichung leistet auch der Punkt bc Genüge, somit liegen die P, P', S in einer Geraden. Fällt P mit S zusammen, so

$$P' \equiv P.$$

n, den 14. Februar 1875.

XV.

Ueber Symmetriepunkte des Dreiecks.

Von

Emil Hain.

I.

Mit $x_a x_b x_c$ seien die Coordinaten eines Punktes X bezeichnet und zwar die von ihrem gemeinschaftlichen Factor befreiten Ausdrücke für die Längen der Normalen von X auf die Seiten a, b, c des zum Fundamentaldreieck gewälten Dreiecks ABC. Wir wollen den Punkt mit den Coordinaten $x_a x_b x_c$ kurz mit x_a bezeichnen, wenn x_b und x_c bloss durch cyklische Vertauschung von abc aus x_a hervorgehen. X heisst dann ein Symmetriepunkt des Fundamentaldreiecks, wenn x_a eine nach b und c symmetrische Function ist.

Sind $x_a x_b x_c$ die laufenden Coordinaten einer geraden Linie und ist ihre Gleichung:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

so wollen wir diese Gerade kurz mit a_1 bezeichnen, wenn b_1 und c_1 durch cyklische Vertauschung der abc aus a_1 erhalten werden. Ist dann a_1 eine nach b und c symmetrische Function, so nennen wir die Gerade a_1 eine Symmetriegerade des Dreiecks ABC.

Was die Einteilung der Symmetriepunkte des Dreiecks betrifft, so erscheint sie am einfachsten durch den Grad der Dimension bestimmt, auf welche x_a reducirt ist. So nennen wir also z. B. den Symmetriepunkt

$$\varphi a^m + \psi b^m + \psi c^m$$

wo φ, ψ constante von abc unabhängige Grössen sind, einen Symmetriepunkt der m. Ordnung.

Nach dieser Eintheilung ist das Inkreiscentrum ein und zugleich der einzige Symmetriepunkt nullter Ordnung.

Der Grebe'sche Punkt a gehört der 1. Ordnung an, der Schwerpunkt 1 der 2., das Umkreiscentrum $a(b^2+c^2-a^2)$ der 3. Ordnung.

II.

Alle Symmetriepunkte erster Ordnung liegen in einer Geraden.

Die Verbindungsgerade zweier Punkte ξ, ξ' ist die Gerade $\xi\xi' - \xi'\xi$. Der Punkt $\varphi a + \psi b + \psi c$ und das Inkreiscentrum liegen also in der Geraden:

$$\begin{vmatrix} \varphi b+\psi c+\psi a, & 1 \\ \varphi c+\psi a+\psi b, & 1 \end{vmatrix} = (\varphi-\psi)(b-c) \equiv b-c$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist. Zugleich erhellt, dass φ und ψ nicht bloss Constanten, sondern auch gleichgradige symmetrische Functionen der Seiten sein können. So enthält die Gerade $b-c$ nicht bloss alle Symmetriepunkte der ersten Ordnung, sondern auch höherer Ordnung wie z. B. das Inkreiscentrum, den Punkt $a\Sigma ab + (b+c)\Sigma a^2$ u. s. w.

Von den Symmetriepunkten der ersten Ordnung ist nur ein einziger bisjetzt näher untersucht worden, nämlich der Punkt a und zwar von Grebe. Man construirt über der Seite BC nach aussen (oder nach innen) das Quadrat BCB_aC_a. Die B_aC_a bilden ein mit dem Urdreieck gleichstimmig ähnliches Dreieck. Der Punkt der Homologie ist dann der Grebe'sche Punkt.

III.

Die allgemeine Form eines Symmetriepunktes zweiter Ordnung ist:

$$\varphi a^2 + \psi b^2 + \psi c^2 + \varphi' bc + \psi' ca + \psi' ab$$

wo $\varphi, \varphi', \psi, \psi'$ constant. Es zerfallen diese Symmetriepunkte in verschiedene Classen, wovon wir folgende speciell hervorheben.

$$\varphi a^2 + \psi b^2 + \psi c^2$$
$$\varphi bc + \psi ca + \psi ab.$$

Alle Symmetriepunkte der Form $\varphi a^2 + \psi b^2 + \psi c^2$ liegen in einer Geraden.

Die Verbindungsgerade der Punkte $\varphi a^2 + \psi b^2 + \psi c^2$ und a^2 ist die Gerade

$$\begin{vmatrix} \varphi b^2 + \psi c^2 + \psi a^2, & b^2 \\ \varphi c^2 + \psi a^2 + \psi b^2, & c^2 \end{vmatrix} = \psi(c^2 - b^2)\,\Sigma a^2.$$

Alle Punkte der Form $\varphi a^2 + \psi b^2 + \psi c^2$ liegen in der Geraden $b^2 - c^2$.

Für φ und ψ gelten dieselben Bemerkungen wie in II. Zugleich geht die Gerade $b^2 - c^2$ auch durch den Punkt 1.

Auch alle Punkte der Form $\varphi bc + \psi ca + \psi ab$ liegen in einer Geraden.

Die Verbindungsgerade der Punkte $\varphi bc + \psi ca + \psi ab$ und bc ist:

$$\begin{vmatrix} \varphi ca + \psi ab + \psi bc, & ca \\ \varphi ab + \psi bc + \psi ca, & ab \end{vmatrix} = a\psi(b - c)\,\Sigma ab$$

Alle Punkte der Form $\varphi bc + \psi ca + \psi ab$ liegen also in der Geraden $a(b - c)$.

Nennen wir die Punkte

$$\varphi a^2 + \psi b^2 + \psi c^2$$
$$\varphi bc + \psi ca + \psi ab$$

Symmetriepunkte 1. Ordnung bezhw. 1. und 2. Classe, so ergibt sich der Satz:

Durch das Inkreiscentrum gehen die drei Geraden aller Symmetriepunkte der 1. Ordnung und der 2. und 3. Classe der 2. Ordnung.

IV.

Die Punkte $f \pm ga$ liegen in der Geraden $b - c$. Es ist nämlich:

$$\Sigma(b - c)(f + ga) = f\,\Sigma(b - c) + g\,\Sigma a(b - c) = 0$$

Hier bedeuten f, g beliebige symmetrische Functionen von a, b, c. Nur muss die Dimension von g um 1 kleiner sein als die von f.

Die Polare des Punktes ξ_a in Bezug auf den Umkreis des Fundamentaldreiecks ist die Gerade $b\xi_c + c\xi_b$, somit ist die Umkreispolare von $f \pm ga$ die Gerade $f(b + c) \pm 2gbc$. Der Schnittpunkt dieser Geraden ist:

$$\begin{vmatrix} f(c + a) + 2gca, & f(c + a) - 2gca \\ f(a + b) + 2gab, & f(a + b) - 2gab \end{vmatrix} = 4a^2 fg(c - b).$$

Die Umkreispolaren aller Punkte $f \pm g$[illegible] schneiden sich somit im Punkt $a^2(b-c)$, welcher [illegible] der Umkreispol der Geraden [illegible]. Dieser Symmetriepunkt wird somit construirt, wenn man die Polaren des Inkreiscentrums und des [illegible] Punktes in Bezug auf den Umkreis des Fundamentaldreiecks zieht. Ihr Schnittpunkt ist dann ein Symmetriepunkt 2. Ordnung, nämlich $a^2(b-c)$.

V.

Die Punkte $f \pm ga^2$ liegen in der Geraden b^2-c^2. Es ist nämlich:

$$\Sigma(b^2-c^2)(f \pm ga^2) = f\Sigma(b^2-c^2) \pm g\Sigma a^2(b^2-c^2) = 0.$$

Die Umkreispolaren der Punkte $f \pm ga^2$ sind $(b+c)(f \pm gbc)$. Ihr Schnittpunkt ist:

$$(a+b)(a+c)\begin{vmatrix} f+gca, & f-gca \\ f+gab, & f-gab \end{vmatrix} = 2afg(b-c)(a+b)(a+c).$$

Der Umkreispol der Geraden b^2-c^2 ist also $a(b-c)(a+b)(a+c)$, ein Symmetriepunkt der 4. Ordnung. Die Punkte $f+gbc$ liegen in der Geraden, in welcher die Symmetriepunkte 1. Ordnung 2. Classe liegen. Es ist nämlich:

$$\Sigma a(b-c)(f+gbc) = f\Sigma a(b-c) + gabc\Sigma(b-c) = 0.$$

Die Umkreispolaren der Punkte $f \pm gbc$ sind die Geraden

$$f(b+c) \pm ga(b^2+c^2).$$

Ihr Schnittpunkt ist:

$$\begin{vmatrix} f(c+a)+gb(c^2+a^2), & f(c+a)-gb(c^2+a^2) \\ f(a+b)+gc(a^2+b^2), & f(a+b)-gc(a^2+b^2) \end{vmatrix}$$

$$= -2fg\begin{vmatrix} b(c^2+a^2), & c+a \\ c(a^2+b^2), & a+b \end{vmatrix}$$

$$= -2a(b-c)fg(2as-bc)$$

wo

$$2s = a+b+c$$

Der Symmetriepunkt $a(b-c)(2as-bc)$ ist somit der Umkreispol der Geraden $a(b-c)$. Man construirt das Inkreiscentrum und den Schwerpunkt, da beide Punkte nach III. in der Geraden $a(b-c)$ liegen. Man wält nun zwei beliebige Punkte dieser Geraden und zieht ihre Polaren in Bezug auf den Umkreis. Ihr Schnittpunkt ist dann dieser Symmetriepunkt 4. Ordnung.

Wien, den 14. Februar 1875.



XVI.

Beiträge zur Lehre vom Tetraeder und von den Ecken.

Von
Herrn *C. Hellwig*,
Professor in Erfurt.

Die Eigenschaft des Tetraders, welche Herr Dostor in Nr. XXI. des 56. Bandes des Archivs bewiesen hat, pflegt man insofern anders, wie dort geschehen, auszudrücken, als man die Inhalte der Grenzdreiecke mit den Sinus der gegenüberliegenden Ecken selbst, nicht mit denjenigen der Supplementar-Ecken proportional sein lässt. Diese Abänderung erscheint nicht zweckmässig. Ahmt man nämlich die Herleitung des Herrn Dostor an den Functionen der ebenen Trigonometrie nach, so gelangt man schliesslich zu der Gleichung

$$-a^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & \cos B \\ \cos B & -1 \end{vmatrix} + b^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & \cos A \\ \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

worin die Factoren von $-a^2$ und b^2 demnach $\sin B^2$ und $\sin A^2$ sind. Man würde bei dieser Art der Betrachtung von dem Cosinus ausgehen und den Sinus alsdann durch die Gleichung $\sin A^2 = 1 - \cos A^2$ definiren, ein Gedanke, den ich in meiner Abhandlung: Die Tetraedrometrie und Trigonometrie (Archiv Bd. 55. Litt. Bericht) ausgesprochen und der auch Herrn Dostor bei seiner Beweisführung geleitet hat. Um den obigen Satz vom Tetraeder darzustellen, bedient sich Herr Junghan im 34. Bande des Archivs des Zeichens Π für die Eckenfunction und ich habe in der genannten Schrift dasselbe beibehalten. Ich glaube aber, dass es von Vorteil ist, für dieselbe nicht nur den Namen Sinus zu gebrauchen, wie dies schon Herr

Junghan getan hat, sondern sich auch beim Schreiben der Formeln des Zeichens für den Sinus zu bedienen, wie Herr Dostor tut. Es möchte sich aber empfehlen, nicht das Zeichen sin, sondern zur Unterscheidung von dem gewöhnlichen Sinus das Zeichen Sin anzuwenden. Ferner würde ich vorschlagen, die von Herrn Junghan mit P bezeichnete Function, weil sie für diejenige Ecke, welche durch die Normalen auf den Seitenebenen der ursprünglichen Ecke bestimmt wird, dieselbe Bedeutung hat, wie die Function Π für die letztere, als Cosinus der Ecke anzusehen und mit Cos zu bezeichnen. Hierdurch gewinnen die für Ecken geltenden Formeln grosse Aehnlichkeit mit denjenigen, welche sich auf Winkel in der Ebene beziehen. Dies will ich im Folgenden nachzuweisen versuchen, indem ich die von Herrn Dostor in Nr. XXII. des 56. Teils und schon früher von Herrn Junghan (s. o.) hergeleiteten Gleichungen auf anderem Wege — ohne das Hülfsmittel der Coordinaten — entwickele.

Ich bezeichne die Kanten einer dreikantigen Ecke mit a, b und c, die durch sie bedingten Winkel mit ab, ac und bc und die Neigungswinkel zwischen den Seitenebenen an den Kanten a, b und c bezüglich mit bac, abc und acb. Bekanntlich verhält sich

$$\sin ab : \sin bc = \sin acb : \sin bac$$

oder es ist

$$\sin ab \,.\, \sin bac = \sin bc \,.\, \sin acb \tag{1}$$

Ferner hat man:

$$\operatorname{Cos} abc = \tfrac{1}{2} \sin ab \,.\, \sin ac \,.\, \sin bac \tag{2}$$

wenn das hinter dem Zeichen Cos stehende abc die durch die Kanten a, b und c bestimmte Ecke bedeutet. Denkt man sich jetzt in der Ebene ac zwischen den Kanten durch den Scheitel der Ecke die Gerade y gezogen, so wird hierdurch $\angle ac$ in $\angle ay$ und $\angle cy$ zerlegt. Wenn man daher in (2) $\angle ac$ durch diese Teile ersetzt, entwickelt und dann (1) beachtet, so ergiebt sich:

$$2 \,.\operatorname{Cos} abc = \sin ab \,.\, \sin ay \,.\, \sin bac \,.\, \cos cy + \sin bc \,.\, \sin cy \,.\, \sin acb \,.\, \cos ay.$$

Weil das erste Glied der rechten Seite dieser Gleichung abgesehen von dem Factor $\cos cy$ mit $2 \,.\operatorname{Cos} aby$ und das zweite unter Weglassung des Factors $\cos ay$ mit $2 \,.\operatorname{Cos} bcy$ übereinkommt, so entsteht hieraus:

$$\operatorname{Cos} abc = \operatorname{Cos} aby \,.\, \cos cy + \operatorname{Cos} bcy \,.\, \cos ay \tag{3}$$

eine Formel, welche entschiedene Aehnlichkeit mit der für $\cos(A+B)$ geltenden erkennen lässt, da ja aby und bcy die Teilecken von abc sind.

Auf entsprechende Weise leitet man, indem man von $\sin ay = \sin(ac - cy)$, oder von $\sin cy = \sin(ac - ay)$ ausgeht, die beiden folgenden Gleichungen her:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} aby &= \operatorname{Cos} abc \,.\, \cos yc - \operatorname{Cos} byc \,.\, \cos ac \quad \text{und} \\ \operatorname{Cos} cby &= \operatorname{Cos} cba \,.\, \cos ya - \operatorname{Cos} bya \,.\, \cos ca \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wir wollen uns jetzt in der Ebene by zwischen den Kanten und y eine neue durch den Scheitel der Ecke gehende Gerade denken. Dann gelten in den Ecken axy und cxy die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \cos ayx &= \frac{\cos ax - \cos ay \,.\, \cos xy}{\sin ay \,.\, \sin xy} \quad \text{und} \\ \cos cyx &= \frac{\cos cx - \cos cy \,.\, \cos xy}{\sin cy \,.\, \sin xy} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Weil aber die Summe der beiden Winkel ayx und cyx 180^0 beträgt, so entsteht hieraus

$$\frac{\cos ax - \cos ay \,.\, \cos xy}{\cos cy \,.\, \cos xy - \cos cx} = \frac{\sin ay}{\sin cy} \tag{6}$$

Ferner verhält sich

$$\begin{aligned} \sin ay : \sin ab &= \sin aby : \sin ayb \quad \text{und} \\ \sin cy : \sin bc &= \sin cby : \sin byc, \end{aligned}$$

woraus man, da $\sin ayb = \sin byc$ ist, folgert:

$$\frac{\sin ay}{\sin cy} = \frac{\sin ab \,.\, \sin aby}{\sin bc \,.\, \sin cby}.$$

Fügt man im Zähler und Nenner des Bruches auf der rechten Seite dieser Gleichung den Factor $\sin bx$ hinzu, so wird der Zähler zu $2 \,.\, \operatorname{Cos} abx$ und der Nenner zu $2 \,.\, \operatorname{Cos} bcx$, und man hat daher:

$$\frac{\operatorname{Cos} abx}{\operatorname{Cos} bcx} = \frac{\sin ay}{\sin cy}. \tag{7}$$

Die Gleichsetzung der linken Seiten in (6) und (7) führt nun nach leichten Umänderungen zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Cos} abx \,.\, \cos cx + \operatorname{Cos} bcx \,.\, \cos ax \\ &= \operatorname{Cos} abx \,.\, \cos cy \,.\, \cos xy + \operatorname{Cos} bcx \,.\, \cos ay \,.\, \cos xy \end{aligned} \tag{8}$$

Nach der Relation (3) lassen sich bilden die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos} bay &= \operatorname{Cos} bax \,.\, \cos yx + \operatorname{Cos} ayx \,.\, \cos bx \\ \operatorname{Cos} bcy &= \operatorname{Cos} bcx \,.\, \cos yx + \operatorname{Cos} cyx \,.\, \cos bx \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und

$$\operatorname{Cos} axc = \operatorname{Cos} axy \,.\, \cos cy + \operatorname{Cos} xcy \,.\, \cos ay \tag{10}$$

Man substituire hierauf die Werte (9) in (3) und fasse das erste und dritte Glied, sowie das zweite und vierte Glied des Resultates zu-

sammen; man erkennt dann in der ersten Summe die rechte Seite der Gleichung (8) und in der zweiten die mit $\cos bx$ multiplicirte rechte Seite der Gleichung (10). Somit ergiebt sich die von Herrn Dostor unter (V) aufgeführte Gleichung, und zwar in einer Gestalt, welche sie den Formeln der Trigonometrie ähnlich macht; also

$$\operatorname{Cos} abc = \operatorname{Cos} abx . \cos cx + \operatorname{Cos} acx . \cos bx + \operatorname{Cos} bcx . \cos ax \qquad (11)$$

Hierin sind abx, acx und bcx die Teilecken von abc.

Hätte man $\operatorname{Cos} abx$ entwickeln wollen, so würde man dies zunächst nach Analogie der Gleichungen (4) durch $\operatorname{Cos} aby$ und $\operatorname{Cos} axy$ haben bestimmen müssen, ebenso $\operatorname{Cos} axy$ durch $\operatorname{Cos} acx$ und $\operatorname{Cos} cxy$ und $\operatorname{Cos} bcx$ durch $\operatorname{Cos} bcy$ und $\operatorname{Cos} cxy$; an die Stelle der Hülfsgleichungen (6) und (7) wären zu setzen

$$\frac{\cos bc - \cos yc . \cos by}{\cos xc - \cos yc . \cos xy} = \frac{\sin by}{\sin xy} \qquad (12)$$

und

$$\frac{\operatorname{Cos} abc}{\operatorname{Cos} axc} = \frac{\sin by}{\sin xy}, \qquad (13)$$

durch deren Benutzung man schliesslich zu dem Resultat gelangt:

$$\operatorname{Cos} abx = \operatorname{Cos} abc . \cos xc - \operatorname{Cos} axc . \cos bc - \operatorname{Cos} bxc . \cos ac \qquad (14)$$

Dabei erscheint abx als Unterschied zwischen der ganzen Ecke abc und den Teilecken axc und bxc. Hiernach kann man ohne Weiteres auch die Werte für $\operatorname{Cos} acx$ und $\operatorname{Cos} bcx$ bilden.

An die vorstehenden Betrachtungen lassen sich mit Leichtigkeit die entsprechenden Bestimmungen über die Sinus der Ecken anschliessen. Denkt man sich nämlich, dass die drei Ebenen α, β, γ eine Ecke bilden und eine vierte durch den Scheitel derselben gelegte ξ dieselben schneidet, dass ferner auf diesen Ebenen im Scheitel der Ecke Normalen errichtet seien, welche mit a, b, c und x bezeichnet werden mögen; so bestimmen a, b und c eine Ecke, die Supplementar-Ecke der ursprünglichen, welche zur letzteren die Beziehungen hat, dass den Grössen $\operatorname{Cos} abc$, $\operatorname{Cos} abx$ u. s. w. entsprechen $\operatorname{Sin} \alpha\beta\gamma$, $\operatorname{Sin} \alpha\beta\xi$ u. s. w. und den Functionen $\cos ax$, $\cos bx$ u. s. w. die Werte $-\cos\alpha\xi$, $-\cos\beta\xi$ u. s. w. Weil nun von der Supplementar-Ecke die Gleichungen (11) und (14) gelten, so kann man also bei der ursprünglichen folgende Relationen bilden:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin} \alpha\beta\gamma &= -\operatorname{Sin} \alpha\beta\xi . \cos\gamma\xi - \operatorname{Sin} \alpha\gamma\xi . \cos\beta\xi - \operatorname{Sin} \beta\gamma\xi . \cos\alpha\xi \\ \operatorname{Sin} \alpha\beta\xi &= -\operatorname{Sin} \alpha\beta\gamma . \cos\xi\gamma + \operatorname{Sin} \alpha\xi\gamma . \cos\beta\gamma + \operatorname{Sin} \beta\xi\gamma . \cos\alpha\gamma \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Dem Vorstehenden will ich eine Bemerkung hinzufügen über die Herleitung der im 56. Teil Nr. V. und im 57. Teil Nr. V. bewiesenen

Formel für das Volumen des Tetraeders, nämlich dass wohl die e
fachste Art der Bestimmung diejenige ist, welche ich in meiner ob
erwähnten Arbeit über Tetraedrometrie mitgeteilt habe. Es ist wei
nichts nötig, als das durch das Grunddreieck des Tetraeders bedin
Parallelogramm zu construiren und die vierte Ecke desselben mit
Spitze des Tetraeders zu verbinden. Hierdurch entsteht ein dem
sprünglichen gleiches neues Tetraeder, an welchem das gesuc
Volumen gefunden werden kann. Die eine Seitenfläche desselben
ein Dreieck, in welchem zwei Seiten — gleich zwei Gegenkante
und $\mathfrak{a}_1$ des Tetraeders — den von den letzteren bedingten Winke
einschliessen, so dass dessen Inhalt $\frac{1}{2}\mathfrak{a}.\mathfrak{a}_1.\sin A$ ist. Die Ebene die
Dreiecks hat aber von der gegenüberliegenden Ecke denselben
stand e, wie jene Kanten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ von einander, womit nun die
Rede stehende Volumenbestimmung erwiesen ist.

Endlich möchte ich noch einen Satz aufführen, welcher als e
einfache Folgerung aus einer ebenfalls in meiner mehrfach erwähn
Abhandlung über das Tetraeder enthaltenen Eigenschaft dieses K
pers hervorgeht (Seite 19 oben). Derselbe erscheint als Analo
zu der Eigenschaft des Kreises, dass die zu demselben Bog
gehörigen Peripheriewinkel gleiche Grösse besitzen,
und lautet:

Alle diejenigen dreikantigen Ecken, deren Schei
auf einer Calotte einer Kugel liegen und deren Kan
durch drei beliebige Punkte des Kreises der Grundebe
der Calotte gehen, haben einerlei Modulus.

Unter dem Modulus einer Ecke wird hier das Verhältniss zwisc
dem Sinus und Cosinus der Ecke, oder zwischen dem Sinus ei
Flächenwinkels und dem Sinus des gegenüberliegenden Linienwin
verstanden. Die Punkte des Grundkreises, welche in dem Satze
wähnt sind, können bei jeder Ecke andere sein.

Erfurt, den 24. Februar 1875.

XVII.

Grenzwertrechnung nebst Grundzügen der Theorie der Lateralcurven.

Von

Herrn Prof. Dr. *F. E. Thieme*,

emerit. Gymnasialoberlehrer.

---

§ 1. Wenn man die Summe $1+2+3\ldots n$ bezeichnet mit $\overset{x=1}{\underset{x=n}{S}} x$ so ist

$$\overset{x=1}{\underset{x=n}{S}} x = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{daher} \quad \overset{x=1}{\underset{x=n}{S}} \frac{x}{n^2} = \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Je grösser man n setzt, desto mehr nähert sich die Summe dem Werte $\frac{1}{2}$, man bezeichnet diesen Grenzwert mit Lim und es ist daher:

$$\text{Lim} \overset{x=1}{\underset{x=n}{S}} \frac{x}{n^2} = \tfrac{1}{2}.$$

Hieraus folgt nun leicht

$$\text{Lim} \overset{x=1}{\underset{x=m}{S}} \frac{x}{n^2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^2,$$

wo m zwar auch unendlich gross, aber $\frac{m}{n}$ einen endlichen Wert hat; auch ist

$$\overset{x=m}{\underset{x=n}{S}} \frac{x}{n^2} = \frac{1-\frac{m^2}{n^2}}{2}.$$

Für derartige Grenzwerte kann man einen besonderen Algorithmus angeben, wodurch eine der Integralrechnung ähnliche Rechnung ent-

steht, welche Quadratur-, Cubatur-, Schwerpunkts-, Gewichts-, Trägheitsmomentan-Aufgaben mit Leichtigkeit löst und doch im Bereiche der Schüler höherer Anstalten (Gymnasien, Realschulen, Gewerbeschulen u. s. w.) liegt.

§ 2. Es ist nach dem binomischen Lehrsatze:

$$(x-1)^{p+1} = x^{p+1} - (p+1)x^p + \frac{(p+1)p}{2}x^{p-1} - \frac{(p+1)p.(p-1)}{2.3}x^{p-2} + \ldots$$

Bezeichnet man mit $\underset{x=n}{\overset{x=1}{S}}\, x^p$ die Summe $1^p + 2^p + 3^p \ldots + n^p$, so ergiebt sich:

$$\underset{x=n}{\overset{x=1}{S}}\,(x-1)^{p+1} = \underset{x=n}{\overset{x=1}{S}}\,x^{p+1} - (p+1)\underset{x=n}{\overset{x=1}{S}}\,x^p + \frac{(p+1)p}{2}\,S\,x^{p-1} - \ldots$$

Nun ist aber

$$\underset{x=n}{\overset{x=1}{S}}\,x^{p+1} = \underset{x=n}{\overset{x=1}{S}}\,(x-1)^{p+1} + n^{p+1}$$

Trägt man diesen Wert ein und transformirt, so ergiebt sich:

$$\underset{x=n}{\overset{x=1}{S}}\,x^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{p}{2}\underset{x=n}{\overset{x=1}{S}}\,x^{p-1} - \frac{p.(p-1)}{2.3}\,S\,x^{p-2} + \ldots$$

§ 3. Man kann dem Satze des vorigen Paragraphen noch eine weitere Ausdehnung geben, indem man dieselben Schlüsse anwendet auf $S x^{\frac{p}{q}}$, woraus sich ergiebt:

$$\operatorname{Lim} \overset{x=1}{\underset{x=n}{S}} \frac{x^{\frac{p}{q}}}{n^{\frac{p}{q}+1}} = \frac{q}{p+q},$$

Der Grenzwert der Potenzensumme der Reihe der Zahlen, sei es mit ganzen oder gebrochenen (daher auch für irrationale) Exponenten, ist das Reciproke des Exponenten des Nenners.

Es folgen leicht auch folgende Sätze:

$$\operatorname{Lim} \overset{x=1}{\underset{x=m}{S}} \frac{x^{\frac{p}{q}}}{n^{\frac{p}{q}+1}} = \frac{q}{p+q}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p}{q}+1}$$

und

$$\operatorname{Lim} \overset{x=m}{\underset{x=n}{S}} \frac{x^{\frac{p}{q}}}{n^{\frac{p}{q}+1}} = \frac{q}{p+q}\left[1-\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p}{q}+1}\right]$$

§ 4. Es sei AMB (Fig. 1.) der Quadrant eines Kreises; man teile den Halbmesser MA in n gleiche Teile und es sei $MC = \frac{x}{n} r$; CE sei ein Teil, also $\frac{1}{n} r$. Man ziehe CD und EF senkrecht auf MA, FDG und $HJK \parallel MA$ und verbinde M mit D. Es ist $EFDC > EHDC > EHJC$; der Unterschied wird immer kleiner, je grösser n, je kleiner also EC wird, so dass er kleiner werden kann als jede angebbare Grösse; da nun $CD = r\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}$ ist, so kann man setzen $EHDC = \frac{1}{n} r^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}$. Setzt man nun $x = 1, 2, 3 \ldots n$, so ergiebt sich, wenn man auf den Grenzwert übergeht: Quadrant

$$AMB = r^2 \operatorname{Lim} \overset{x=1}{\underset{x=n}{S}} \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}}{n};$$

der Quadrant ist aber auch $\frac{1}{4} r^2 \pi$, folglich:

$$\operatorname{Lim} \overset{x=1}{\underset{x=n}{S}} \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}}{n} = \frac{1}{4}\pi.$$

Hätte man die Summe nur von $x = 1$ bis $x = m$ genommen, so dass $MC = \frac{m}{n} r$ ist, so hätte man die Figur $MBDC$ d. i.

$$\tfrac{1}{2} \frac{m}{n} r^2 \sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2}} + \tfrac{1}{2} r^2 \operatorname{Arc\,sin} \frac{m}{n}$$

erhalten, daher

$$\operatorname{Lim} \overset{x=1}{\underset{x=m}{S}} \frac{\sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}}{n} = \tfrac{1}{2} \frac{m}{n} \sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2}} + \tfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,sin} \frac{m}{n}.$$

§ 5. Bei hinreichender Grösse von n kann man den Bogen $HD = S_x$ als gerade Linie, also $\triangle HDJ$ als ein rechtwinkliges, dem Dreiecke CDM ähnliches betrachten und es ist:

$$S_x : \frac{1}{n} r = r : r \sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}},$$

folglich:

$$S_x = \frac{r}{n \sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}}.$$

Setzt man $r = 1$ und nimmt den Grenzwert der Summe, so ergiebt

$$\sin\frac{x}{n}90^{0\,2} + \cos\frac{x}{n}90^{0\,2} = 1$$

und

$$\underset{x=n}{\overset{x=1}{S}} \sin\frac{x}{n}90^{0\,2} = S\cos\frac{n-x}{n}90^{0\,2};$$

addirt man auf beiden Seiten

$$\underset{x=n}{\overset{x=1}{S}} \sin\frac{x}{n}90^{0\,2},$$

so ergiebt sich

$$2\underset{x=n}{\overset{x=1}{S}} \sin\frac{x}{n}90^{0\,2} = n+1$$

und

$$\operatorname{Lim}\underset{x=n}{\overset{x=1}{S}} \frac{\sin\frac{x}{n}90^{0\,2}}{n} = \tfrac{1}{2}.$$

§ 7. Gegen eine einen Meter lange Bande wird eine Kugel zweimal hintereinander gerollt, man soll die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass der Abstand der Anschlagpunkte unter drei Decimeter fällt.

Man teile den Meter in n gleiche Teile, bezeichne den ersten Teil mit 1, den zweiten mit 2, den $m$ten mit m u. s. w.; der Abstand der Anschlagpunkte betrage nicht über $m-1$ Teile. Da man hier zwei Reihen von Elementen hat, so sind Variationen zu zwei mit Wiederholungen anzuwenden, n Elemente sind, also ist die Anzahl der möglichen Fälle n^2. Die günstigen Fälle sind, wenn A die Ordnung der Variation und B die Anzahl derselben bezeichnet:

A 1, 2, 3, ... m, $m+1$, ... $n-m$, $n-m+1$, $n-m+2$, ... $n-1$, n

B m, $m+1$, $m+2$ ... $2m-1$ $2m-1$ ... $2m-1$, $2m-1$, $2m-2$
$m+1$, m.

Die Anzahl der günstigen Fälle ist daher

$$(3m-1)m+(n-2m)(2m-1).$$

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand der Anfallpunkte kleiner als $\frac{m}{n}$ ist:

$$\left(\frac{3m}{n}-\frac{1}{n}\right)\frac{m}{n}+\left(1-\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{2m}{n}-\frac{1}{n}\right);$$

geht man auf den Grenzwert über, so ergiebt sich:

$$\frac{3m^2}{n^2}+\frac{2m}{n}-\frac{4m^2}{n^2}=\frac{2m}{n}-\frac{m^2}{n^2}.$$

Setzt man $\frac{m}{n} = 0{,}3$, so ergiebt sich als Wahrscheinlichkeit, da[ss] der Abstand der Anschlagpunkte nicht grösser als 3 Decimeter i[st] 0,51; die Wahrscheinlichkeit also, dass derselbe grösser ist 0,49 *).

§ 8. Man nehme ein Parallelogramm eines dreiseitigen Prism[as] als Grundfläche g an; von einem Punkte der dazu parallelen Kan[te] fälle man eine Senkrechte h auf die Grundfläche, teile dieselbe in [n] gleiche Teile und lege durch die Teilpunkte Ebnen, parallel z[ur] Grundfläche, so sind die Durchschnittsfiguren Parallelogramme, welc[he] sich zur Grundfläche, wie die senkrechten Abstände von der Spit[ze] verhalten; also in dem Abstande $\frac{x}{n}h$ von der parallelen Kante ist d[ie] Durchschnittsfigur $\frac{x}{n}g$. Auf jede Durchschnittsfigur stelle man e[in] senkrechtes Parallelenpipedum von der Höhe $\frac{1}{n}h$, dann ist die Summ[e] aller, auf diese Art entstandene Parallelepipeda

$$gh \overset{x=1}{\underset{x=n}{S}} \frac{x}{n^2}.$$

Je grösser man n setzt, desto mehr schliessen sich die Parallelep[ipede] an und sie fallen damit zusammen, wenn man $n = \infty$ setzt, das h[eisst] der Rauminhalt des dreiseitigen Prismas ist

$$gh \operatorname{Lim} \overset{x=1}{\underset{x=n}{S}} = \tfrac{1}{2}gh,$$

d. h. halb so gross als das Parallelepipedum, das mit ihm gle[ich] grosse Parallelogrammengrundfläche und gleiche Höhe hat.

Nimmt man aber die Summation nur vor von $x = m$ bis $x =$ [n], so ergiebt sich der Prismastutz $= \tfrac{1}{2}gh\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right) = h\left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{\left(g+\frac{m}{n}g\right)}{2}$, nun aber ist $h\left(1-\frac{m}{n}\right)$ die Höhe des Stutzes h_1, g das unte[re], $\frac{m}{n}g$ das obere Parallelogramm g_1, daher der Rauminhalt des Stutze[s] $h_1\left(\frac{g+g_1}{2}\right)$

---

*) Vergl. Cournots Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung § 14.

Um die Höhe des Schwerpunkts des Prismas über der Grundfläche zu finden, bestimme man die Summe der Momente in Beziehung auf dieselbe; der Abstand des Parallelepipedums $\frac{x}{n^2}gh$ von der Grundfläche ist $\left(1 - \frac{x}{n}\right)h$, daher das Moment $gh^2\left[\frac{x}{n} - \frac{x^2}{n^2}\right]$; von dem ganzen Prisma ist die Momentarsumme

$$gh^2 \operatorname{Lim} S\left[\frac{x}{n^2} - \frac{x^2}{n^3}\right] = gh^2[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}] = \tfrac{1}{6}gh^2;$$

da aber der Rauminhalt des Prismas $\frac{1}{2}gh$ ist, so beträgt die Höhe des Schwerpunkts $\frac{\frac{1}{6}gh^2}{\frac{1}{2}gh} = \frac{1}{3}h.$

Das Prisma bestehe aus einer Masse, welche an der Basis d_1, an der parallelen Kante d_2 ist (d. h. die Gewichtseinheit wiege d_1, d_2) und der Uebergang von d_1 auf d_2 folge progressiv, so dass die Dichtigkeit des Parallelepipedums $\frac{x}{m}gh$ ist $d_1 - \frac{x}{n}(d_1 - d_2)$, so ist das Gewicht dieses Elementarkörpers

$$ghd_1 \frac{x}{n^2} - gh(d_1 - d_2)\frac{x^2}{n^3};$$

nimmt man den Grenzwert der Summe, so ergiebt sich:

$$\tfrac{1}{2}ghd_1 - \tfrac{1}{3}ghd_1 + \tfrac{1}{3}ghd_2 = \tfrac{1}{6}ghd_1 + \tfrac{1}{3}ghd_2 = \tfrac{1}{6}gh(d_1 + 2d_2).$$

Um den Schwerpunkt zu finden, suchte man zunächst das Moment des Parallelepipedums $\frac{x}{n^2}gh$, dasselbe ist:

$$gh\frac{x}{n^2}\left(1 - \frac{x}{n}\right)h\left(d_1 - \frac{x}{n}(d_1 - d_2)\right)$$
$$= gh^2\left[\left(\frac{x}{n^2} - \frac{2x^2}{n^3} + \frac{x^3}{n^4}\right)d_1 + \left(\frac{x^2}{n^3} - \frac{x^3}{n^4}\right)d_2\right];$$

nimmt man den Grenzwert der Summe, so ist das Moment des Prismas:

$$gh^2[(\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4})d_1 + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4})d_2],$$

d. i. $\frac{1}{12}gh^2(d_1 + d_2)$; da das Gewicht des Prismas $\frac{1}{6}gh(d_1 + 2d_2)$, so ist die Höhe des Schwerpunktes über der Grundfläche:

$$\frac{\frac{1}{12}gh^2(d_1 + d_2)}{\frac{1}{6}gh(d_1 + 2d_2)} = \tfrac{1}{4}h\left(1 + \frac{\frac{1}{2}d_1}{\frac{1}{2}d_1 + d_2}\right) = \tfrac{1}{4}h\left(1 + \frac{d_1}{d_1 + 2d_2}\right),$$

§ 9. Man fälle von der Spitze einer Pyramide eine Senkrechte auf die Grundfläche g, teile die Höhe in n gleiche Teile und le[gt] durch jeden Teilpunkt eine zur Grundfläche parallele Ebene, die x[te] Durchschnittsfigur (von der Spitze an gerechnet) ist $\frac{x^2}{n^2}g$; auf je[de] Durchschnittsfigur stelle man ein Prisma, welches die Höhe $\frac{1}{n}h$ h[at], so beträgt die Summe aller n Prismen $gh \underset{x=n}{\overset{x=1}{S}} \frac{x^2}{n^3}$; der Grenzwert gie[bt] den Rauminhalt der Pyramide $\frac{1}{3}gh$.

Hätte man die Summation von $x = m$ bis $x = n$ gemacht, ergäbe sich der Rauminhalt des Pyramidenstutzes $\frac{1}{3}gh\left(1-\frac{m^3}{n^3}\right)$ $\frac{1}{3}h\left(1-\frac{m}{n}\right)g\left(1+\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}\right)$; $h\left(1-\frac{m}{n}\right)=h_1$ ist die Höhe des Pyr[a]midenstutzes; bezeichnet g_1 die obere Fläche, so ist

$$g_1 = \frac{m^2}{n^2}g, \quad \sqrt{g_1} = \frac{m}{n}\sqrt{g}, \quad \sqrt{gg_1} = \frac{m}{n}g,$$

daher der Rauminhalt des Stutzes $\frac{1}{3}h_1(g+\sqrt{gg_1}+g_1)$ wie bekannt.

Die ganze Pyramide bestehe aus einem Stoffe, von welchem d[ie] Cubikeinheit an der Basis d_1, an der Spitze d_2 wiege; verändert si[ch] die Dichtigkeit progressive, so ist sie in dem Abstande $\frac{x}{n}h$ von d[er] Spitze $d_1 - \frac{x}{n}(d_1 - d_2)$, daher das Gewicht des betreffenden Prism[as] $gh\left(\frac{x^2}{n^3}d_1 - \frac{x^3}{n^4}(d_1 - d_2)\right)$ Der Grenzwert der Summe

$$\tfrac{1}{3}ghd_1 - \tfrac{1}{4}gh(d_1 - d_2) = \tfrac{1}{12}gh(d_1 + 3d_2)$$

giebt das Gewicht der Pyramide.

Um die Höhe des Schwerpunktes über der Grundfläche zu finde[n], suche man das Moment des Gewichtes des $x$ten Prismas, dessen A[b]stand von der Grundfläche $\left(1-\frac{x}{n}\right)h$ ist;

$$gh^2\left[\left(\frac{x^2}{n^3}d_1 - \frac{x^3}{n^4}d_1 + \frac{x^3}{n^4}d_2\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right].$$

$$= gh^2\begin{bmatrix} \frac{x^2}{n^3}d_1 - \frac{x^3}{n^4}d_1 + \frac{x^3}{n^4}d_2 \\ - \frac{x^3}{n^4}d_1 + \frac{x^4}{n^5}d^2 \\ + \frac{x^4}{n^5}d_1 \end{bmatrix}$$

Daher das Moment der Pyramide

$$gh^2\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)d_1+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)d_2\right]=\frac{1}{60}gh^2(2d_1+3d_2),$$

das Gewicht der Pyramide war aber

$$\frac{1}{12}gh(d_1+3d_2),$$

daher die Höhe des Schwerpunktes:

$$\frac{1}{5}h\left[1+\frac{d_1}{d_1+3d_2}\right].$$

Setzt man $d_2=d_1$, so ergiebt sich der bekannte Ausdruck $\frac{1}{4}h$.

§ 10. Es stelle Fig. 2. eine Kugel dar; AMB sei ein Hauptkreis; in dem Mittelpunkte MC senkrecht auf der Ebene desselben; man teile diesen Halbmesser in n gleiche Teile; DF sei der $x$te Teil; durch die Teilpunkte lege man Ebenen, parallel zum Kreise AMB; man kann dann $EGLK$ als einen Kegelstutz auffassen; $HJ=r_x$ sei der mittlere Halbmesser, so ist die Oberfläche dieses Kegelstutzes, wenn man EG mit s_x bezeichnet, $2s_xr_x\pi$. Fällt man in der Ebene ACB, GN senkrecht auf ED, so ist

$$\triangle EGN \sim \triangle MJH,$$

daher:

$$s_x : \frac{1}{n}r = r : r_x,$$

folglich:

$$s_xr_x=\frac{1}{n}r^2 \quad \text{und} \quad 2s_xr_x\pi=\frac{2r^2\pi}{n};$$

nimmt man den Grenzwert der Summe, so erhält man als Oberfläche der Halbkugel $2r^2\pi$, der ganzen $4r^2\pi$.

Addirt man aber nur m Brüche, so dass $\frac{m}{n}$ einen endlichen Wert hat, so erhält man als Oberfläche $2\frac{m}{n}r^2\pi$. Bezeichnet h die Höhe der Kugelhaube, so ist die Oberfläche der Kugelzone, da $\frac{m}{n}r=r-h$ ist, $2r(r-h)\pi$, folglich der Kugelhaube $2rh\pi$.

Stellt man auf jeden Durchschnittskreis einen Cylinder von der Höhe $\frac{1}{n}r$, so ist der $x$te

$$r^3\pi\left(\frac{1}{n}-\frac{x^2}{n^3}\right).$$

Nimmt man hiervon den Grenzwert der Summe, so ergiebt sich

$$r^3\pi\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}r^2\pi,$$

daher der Rauminhalt der ganzen Kugel $\frac{4}{3}r^3\pi$. Addirt man aber nu
die m ersten Teile zusammen, so erhält man:

$$r^3\pi\left(\frac{m}{n}-\frac{1}{3}\frac{m^3}{n^3}\right).$$

Setzt man $\frac{m}{n}r=r-h$, so erhält man

$$\pi(r^3-r^2h-\tfrac{1}{3}r^3+r^2h-rh^2+3r^3)=\pi(\tfrac{2}{3}r^3-rh^2+\tfrac{1}{3}h^3);$$

zieht man dies von der Halbkugel $\frac{2}{3}r^3\pi$ ab, so bleibt Kugelsegme
$=rh^2\pi-\frac{1}{3}h^3\pi$, wo h die Höhe des Segmentes darstellt.

Man teile den Halbmesser der Kugel in n gleiche Teile und le
durch die Teilpunkte concentrische Kugeloberflächen, dann ist d
Rauminhalt der $x$ten Kugelschale

$$\frac{4}{3}\left[\frac{(x+1)^3}{n^3}-\frac{x^3}{n^3}\right]r^3\pi=\left(\frac{4x^2}{n^3}+\frac{4x}{n^3}+\frac{1}{n^3}\right)r^3\pi.$$

Bei der Summation würde das zweite und dritte Glied ausfallen u
man erhält als Rauminhalt $\frac{4x^2}{n^3}r^3\pi$ d. h. die dünne Kugelschale i
gleich der betreffenden Kugeloberfläche multiplicirt mit der Stär
der Schale. Die Dichtigkeit der Kugel nehme von dem Mittelpunkt
wo sie d_1 ist, nach der Oberfläche, wo sie d_2 ist, progressive ab,
hat die $x$te Kugelschale die Dichtigkeit $d_1-\frac{x}{n}(d_1-d_2)$, daher d
Gewicht

$$\frac{4x^2}{n^3}r^3\pi\left[d_1-\frac{x}{n}(d_1-d_2)\right]=r^3\pi\left[\frac{4x^2}{n^3}d_1-\frac{4x^3}{n^4}d_1+\frac{4x^3}{n^4}d_2\right].$$

Nimmt man den Grenzwert der Summe, so ergiebt sich als Gewic
der Kugel $\frac{1}{3}r^3\pi(d_1+3d_2)$.

Man kann der vorigen Aufgabe noch eine Ausdehnung gebe
indem man annimmt, eine Kugel, deren Halbmesser r ist, sei v
einem concentrischen Ringe von der Höhe h umgeben, welchen ei
Masse erfüllt, deren Dichtigkeit von der Oberfläche der Kugel bis z
äusseren Oberfläche des Ringes gleichförmig von d bis 0 abnimm
Teilt man h in n gleiche Teile und legt durch dieselben Kugelobe
flächen, so ist die Dichtigkeit des $x$ten Ringes $\left(1-\frac{x}{n}\right)d$, daher d
Gewicht desselben

$$4\left(r+\frac{xh}{n}\right)^2\frac{1}{n}h\left(1-\frac{x}{n}\right)d\pi=\frac{4}{n}r^2hd\pi+\frac{8x}{n^2}rh^2d\pi+\frac{4x^2}{n^3}h^3d\pi$$

$$-\frac{4x}{n^2}r^2hd\pi-\frac{8x^2}{n^3}rh^2d\pi-\frac{4x^3}{n^4}h^3d\pi.$$

Nimmt man hiervon den Grenzwert der Summe, so ergiebt sich als Gewicht des Ringes:

$$2r^2hd\pi+\tfrac{4}{3}rh^2d\pi+\tfrac{1}{3}h^3d\pi=\tfrac{1}{3}d\pi(h^3+4rh^2+6r^2h).$$

Dieses Gewicht sei so gross als das Gewicht eines dieselbe Kugel umgebenden Ringes, der mit einem gleichförmigen dk dichten Stoffe erfüllt ist und die Stärke i hat, so beträgt das Gewicht:

$$\tfrac{4}{3}[(r+i)^3-r^3]dk\pi=(4r^2i+4ri^2+\tfrac{4}{3}i^3)dk\pi;$$

setzt man dieses Gewicht gleich dem gefundenen, so ergiebt sich:

$$\tfrac{1}{3}[h^3+4rh^2+6r^2h]=(4r^2i+4ri^2+\tfrac{4}{3}i^3)k.$$

Multiplicirt man mit 3, dividirt durch r^3 und setzt $\frac{h}{r}=x$, so ist:

$$x^3+4x^2+6x=\frac{12ik}{r}+\frac{12i^2k}{r^2}+\frac{4}{3}\frac{i^3k}{r^3},$$

Wendet man dies auf die Atmosphäre der Erde an, so ist $r=859{,}5$ Meilen, $i=2\frac{1}{3}$ Fuss, $k=10624$ (das specifische Gewicht des Quecksilbers, das der Luft gleich 1 gesetzt), die Meile $=22842$ Fuss. Hieraus ergiebt sich die Gleichung:

$$x^3+4x^2+6x=0{,}0151518.$$

Die erste Derivation dieser Gleichung hat zwei imaginäre Wurzeln, daher dieselbe nur eine reelle Wurzel hat, diese ist:

$$x=\frac{h}{r}=0{,}0025211,$$

daher

$$h=859{,}5\times0{,}0025211=2{,}1669 \text{ Meilen},$$

d. h. wenn die Atmosphäre von der Oberfläche der Erde gleichförmig abnähme, so müsste sie eine Höhe von 2,1669 Meilen haben.

Dieses Resultat wird durch eine einfache Betrachtung wenigstens annähernd bestätigt. Ein Cylinder, dessen Grundflächenhalbmesser x Fuss und dessen Höhe h Fuss ist, enthält eine Masse, deren Dichtigkeit von unten, wo sie d ist, nach oben, wo sie verschwindet, gleichförmig abnimmt; das Gewicht beträgt $\frac{1}{2}r^2hd\pi$. Ein anderer Cylinder von derselben Grundfläche, aber einer Höhe von $2\frac{1}{3}$ Fuss,

sei mit einer Masse von gleichförmiger Dichtigkeit gleich 1062
so ist:

$\frac{1}{2}r^2 h d\pi = r^2 . 2\frac{1}{3} . 10624 d\pi$, d. i. $h = 49579$ Fuss $= 2{,}17$ Meilen.

§ 11. Es stelle Fig. 3. das halbe Segment einer Parabel d
deren Gleichung $y^2 = px$ ist. Es sei $AB = a$, $BC = b$, daher $b^2 =$
Man teile AB in n gleiche Teile und es sei

$$AD = \frac{x}{n} a, \quad DE = \frac{1}{n} a;$$

errichtet man die Ordinaten DG und EF, so ist

$$DG = b_x = b\sqrt{\frac{x}{n}}$$

und das verschwindend kleine Rechteck

$$DEFG = \frac{ab\sqrt{\frac{x}{n}}}{n}$$

Nimmt man den Grenzwert der Summe, so ist (§ 3.) $ABC =$

Verändert sich die Dichtigkeit der Parabel von A bis B prop
tional der Abscisse, so dass sie bei DG $d_1 - \frac{x}{n}(d_1 - d_2)$ ist, so
trägt das Gewicht des betreffenden Streifens

$$\frac{ab\sqrt{\frac{x}{n}}}{n}\left[d_1 - \frac{x}{n}(d_1 - d_2)\right],$$

daher das Gewicht des halben

$$\frac{2}{3} abd_1 - \frac{2}{5} ab(d_1 - d_2) = \frac{2}{15} ab(2d_1 + 3d_2).$$

Sollen die horizontalen Schichten ihre Dichtigkeit proporti
der Höhe sich ändern, so teile man b in n gleiche Teile, dann
die Dichtigkeit in der Höhe $\frac{x}{n} b : d_1 - \frac{x}{n}(d_1 - d_2)$. Ein horizont
Streifen ist, wenn die zu $\frac{x}{n} b$ zugehörige Abscisse a_0 ist, $\frac{1}{n}(a - a$
Es ist aber

$$pa_x = \frac{x^2}{n^2} b^2 \quad \text{oder} \quad a_n = \frac{x^2}{n^2} a,$$

daher das Gewicht des Streifens

$$ab\left(\frac{1}{n}-\frac{x^2}{n^2}\right)\left[d_1-\frac{x}{n}(d_1-d_2)\right]$$

d. i.

$$abd_1\left(\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}-\frac{x^2}{n^3}+\frac{x^3}{n^4}\right)+abd_2\left(\frac{x}{n^2}-\frac{x^3}{n^4}\right).$$

Nimmt man den Grenzwert der Summe, so findet man

$$\frac{1}{12}ab(5d_1+3d_2).$$

Um den Abstand des Schwerpunktes des halben Parabelsegmentes von der Abscissenachse zu finden, bestimme man das Moment des Streifens *DEFG* in Beziehung auf die Abscissenachse, es ist $\frac{1}{2n}ab_x b_x$; es ist aber

$$b_x^2=\frac{x}{n}pa$$

d. i.

$$b_x^2=\frac{x}{n}b^2,$$

daher das Moment $\frac{1}{2}ab^2\frac{x}{n^2}$. Der Grenzwert der Summe ist $\frac{1}{4}ab^2$; durch die Fläche $\frac{2}{3}ab$ dividirt, giebt den Abstand des Schwerpunktes von der Abscissenachse $\frac{3}{8}b$. *)

Um den Abstand des Schwerpunktes von der Ordinatenachse zu bestimmen, hat man das Moment jenes Streifens

$$\frac{1}{n}ab_x.\frac{x}{n}a$$

d. i.

$$\frac{a^2b\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}{n},$$

davon ist der Grenzwert der Summe $\frac{2}{5}a^2b$, daher der Abstand von der Ordinatenachse $\frac{3}{5}a$, daher von der Ordinate *BC* $\frac{2}{5}a$.

§ 12. Dreht man das halbe Parabelsegment *ABC* (Fig. 3.) um *AB* als Achse herum, so ist der Cylinder, den *DEFG* beschreibt, $\frac{1}{n}ab_x^2\pi$; nun ist aber

$$b_x^2=\frac{x}{n}pa=\frac{x}{n}b^2,$$

*) Brandes, Lehrbuch der Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung. Thl. 2. S. 204 u. f.

daher der Rauminhalt des Rotationskörpers

$$\operatorname{Lim} ab^2\pi S\frac{x}{n^2} = \tfrac{1}{2}ab^2\pi.$$

Setzt man a negativ und für $b: b\sqrt{-1}$, so erhält man denselben Wert, so dass die über dem negativen Teile der Abscissenachse befindliche Curve bei dem Umdrehen denselben Rotationskörper erzeugt.

Man drehe das Segment um die Ordinatenachse herum, so ist der von EF erzeugte Cylinder $\frac{(x+1)^2}{n^2}a^2b_x\pi$ der von DG erzeugte $\frac{x^2}{n^2}a^2b_x\pi$ (b kann gleich b_x gesetzt werden), folglich der Cylinderring $\frac{2xa^2}{n^2}b\pi$; es ist aber $b_x = b\sqrt{\frac{x}{n}}$, daher jener Ring $2a^2b\frac{x^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}}$, daher der Körper $\frac{4}{5}a^2b$.

Setzt man a negativ und für $b: b\sqrt{-1}$, so erhält man einen imaginären Ausdruck. Dies erklärt sich dadurch, dass man annimmt, auf dem negativen Teile der Abscissenachse befindet sich eine gleiche Parabel, deren Ebene jedoch auf der Ebene der reellen senkrecht steht.

Diese Erklärung wird durch die Theorie der imaginären oder lateralen Grössen in ein helles Licht gesetzt*). Es sei YAX die Fundamentalebene, AX die Abscissen-, AY die Ordinatenachse; Y_1AX sei eine zweite Ebene, Lateralebene; $Y_1AY = \varphi$ der Flächenwinkel beider, daher AY_1 die Ordinaten- und AX die Abscissenachse; dem y in der Fundamentalebene entspricht dann $y(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(i = \sqrt{-1})$ in der Lateralebene. AX heisse die Lateralachse.

Stellt nun $x = f(y)$ eine Curve in der Fundamentalebene vor, so wird derselben in der Lateralebene, die Abscissenache als Lateralachse genommen, die Curve $x = fy(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ entsprechen.

Diese Curve heisst die Lateralcurve. Für $\angle\varphi = 90^0$ wird die Lateralcurve $x = f(y\sqrt{-1})$, in dem obigen Falle also $\frac{-y^2}{p} = x$ oder $-y^2 = px$, daher für den negativen Teil der Abscissenachse $y^2 = px$. Daraus folgt: D i e L a t e r a l c u r v e d e r P a r a b e l i s t w i e d e r e i n e P a r a b e l.

Die Gleichung der Ellipse ist $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$. Nimmt man

---

*) Cournot, Elementarlehrbuch der Theorie der Functionen, deutsch von Dr. Schnuse, § 76. Anmerk.

als Lateralachse und geht auf die Lateralcurve über, so ergiebt sich $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ d. i. die Gleichung der Hyperbel: Die Lateralcurve der Ellipse ist die Hyperbel und umgekehrt.

Von dem Kreise $y^2 + x^2 = r_1^2$ wird daher die Lateralcurve $x^2 - y^2 = r_1^2$ d. i. eine gleichseitige Hyperbel sein. Nimmt r ab, so nähern sich die Scheitel der beiden Hyperbeläste dem Schnittpunkte der Asymptoten, und wird $r = 0$, so sind in dem Punkt der Fundamentalebene zwei Geraden, wovon die eine unter einem Winkel von 45⁰, die andere unter einem Winkel von 135⁰ gegen den positiven Teil der Abscissenachse geneigt ist. Die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ stellt daher zwei unter einem Winkel von 45⁰ und 135⁰ sich schneidende Geraden dar, deren Ebene auf der Fundamentalebene senkrecht steht.

Die Gleichung $y^3 + x^3 = 0$ lässt sich in drei Factoren zerlegen:

$$(y \cos \tfrac{1}{3}\pi + iy \sin \tfrac{1}{3}\pi - x)(y + x)(y \cos \tfrac{5}{3}\pi + iy \sin \tfrac{5}{3}\pi - x),$$

sie stellt demnach eine Gerade in der Fundamentalebene dar, die unter einem Winkel von 135⁰ gegen die Abscissenachse geneigt ist und zwei unter einem Winkel von 45⁰ und 135⁰ gegen die Abscissenachse geneigte Gerade in einer unter 60⁰ gegen die Fundamentalebene geneigten Ebene.

Hierdurch erklären sich nun auch die imaginären Differentialquotienten. Es ist nämlich:

$$(x + h)^3 - x^3 = h(h + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}ix\sqrt{3})(h + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}ix\sqrt{3}).$$

Den gewöhnlichen Differentialquotienten erhält man, wenn man mit h dividirt und dann auf beiden Seiten $h = 0$ setzt; man kann aber auch mit $h + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}ix$ dividiren, dann diese Grösse gleich Null setzen, so erhält man auch einen Differentialquotienten:

$$\text{Lim} \frac{(x+h)^3}{h + \tfrac{3}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}ix\sqrt{3}} = 3x^2\left(-\tfrac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 3x^2(\cos \tfrac{2}{3}\pi + i \sin \tfrac{2}{3}\pi)$$
$$= 3(x(\cos \tfrac{1}{3}\pi + i \sin \tfrac{1}{3}\pi))^2.$$

Es ist dies demnach die Tangente des Winkels der geometrischen Tangente an der Lateralcurve in der Ebene von 60⁰.

Es sei $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ eine Curve der Fundamentalebene, so ist, wenn man die Ordinatenachse als Lateralachse der Lateralebene nimmt, welche unter einem Winkel von 60⁰ gegen die Fundamentalebene geneigt ist, die Lateralcurve:

$$y = x^3(\cos \tfrac{1}{3}\pi + i \sin \tfrac{1}{3}\pi)^3 + ax^2(\cos \tfrac{2}{3}\pi + i \sin \tfrac{2}{3}\pi) + bx(\cos \tfrac{1}{3}\pi + i \sin \tfrac{1}{3}\pi) + c,$$

daher

$$\frac{\partial y}{\partial x(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi)} = 3x^2(\cos\tfrac{1}{3}\pi + i\sin\tfrac{1}{3}\pi)^2 + 2ax(\cos\tfrac{1}{3}\pi + i\sin\tfrac{1}{3}\pi) —$$

Setzt man a und $b = 0$, so erhält man den obigen Ausdruck.

§ 13. Der allgemeine Ausdruck einer parabolischen Curve

$$y^q = p^{q-r} x^r,$$

ist daher a eine Abscisse und b die zugehörige Ordinate, so ist:

$$b^q = p^{q-r} a^r.$$

Teilt man a in n gleiche Teile, so ist:

$$b_x{}^q = \frac{x^r}{n^r} p^{q-r} a^r = \frac{x^r}{n^r} b^q$$

d. i.

$$b_x = b \frac{x^{\frac{r}{q}}}{n^{\frac{r}{q}}},$$

das Elementarrechteck $DEFG$ (Fig. 3.) daher

$$ab \frac{x^{\frac{r}{q}}}{n^{\frac{r+q}{q}}},$$

daher der Flächeninhalt des halben Segmentes:

$$\frac{q}{r+q} ab.$$

Um den Abstand des Schwerpunktes des halben Segmentes von der Abscissenachse zu suchen, bestimmt man das Moment in Beziehung auf diese Achse:

$$\tfrac{1}{2} b_x{}^2 \cdot \frac{1}{n} a = \tfrac{1}{2} ab^2 \frac{x^{\frac{2r}{q}}}{n^{\frac{2r+q}{q}}},$$

daher das Gesammtmoment

$$\frac{q}{2(2r+q)} ab^2;$$

dividirt durch den Flächeninhalt giebt den Abstand des Schwerpunkts von der Abscissenachse

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{r+q}{2r+q} b.$$

Das Moment des Elementarrechtecks in Beziehung auf die Ordinatenachse ist

$$bx\frac{x}{n^2}a^2$$

i.

$$ba^2\frac{x^{\frac{r+q}{q}}}{n^{\frac{r+2q}{q}}},$$

aber das Gesammtmoment

$$\frac{q}{(r+2q)}a^2b$$

und der Abstand des Schwerpunktes von der Ordinatenachse

$$\frac{r+q}{(r+2q)}a.$$

Man drehe die Curve um die Abscissenachse, so beschreibt b_x n Cylinder

$$\frac{1}{n}ab_x^2\pi$$

i.

$$ab^2\frac{x^{\frac{2r}{q}}\pi}{n^{\frac{2r+q}{q}}},$$

aber der Rotationskörper

$$\frac{q}{2r+q}ab^2\pi.$$

Es nehme die Dichtigkeit des Paraboloids vom Scheitel, wo sie d_1, b, wo sie d_2 ist, progressive ab, so ist die Dichtigkeit des Cylinrs $\frac{1}{n}ab_x^2\pi:d_1-\frac{x}{n}(d_1-d_2)$, daher das Gewicht desselben:

$$ab^2\frac{x^{\frac{2r}{q}}\pi}{n^{\frac{2r+q}{q}}}d_1-ab^2\pi\frac{x^{\frac{2r+q}{q}}}{n^{\frac{2r+2q}{q}}}(d_1-d_2),$$

das Gewicht des Rotationskörpers:

$$\frac{q}{2r+q}ab^2\pi d_1-\frac{q}{2(r+q)}ab^2\pi(d_1-d_2)=\frac{ab^2\pi}{2(r+q)(2r+q)}[qd_1+(2r+q)d_2].$$

Man bestimme den Abstand des Schwerpunktes dieses Körpers von der Ordinatenachse, so ist das Moment des Elementarcylinders

$$a^2b^2\pi\frac{x^{\frac{2r+q}{q}}}{n^{\frac{2r+2q}{q}}}d_1-a^2b^2\pi\frac{x^{\frac{2r+2q}{q}}}{n^{\frac{2r+3q}{q}}},$$

daher die Momentensumme

$$\frac{1}{2}\frac{q}{r+q}a^2b^2\pi d_1 - \frac{q}{2r+3q}a^2b^2\pi(d_1 - d_2),$$

d. i.

$$\frac{q}{2(r+q)(2r+3q)}a^2b^2\pi[q d_1 + (2r+2q)d_2],$$

dividirt man dies durch das Gewicht des Körpers, so erhä Abstand des Schwerpunktes vom Scheitel:

$$\frac{2r+q}{2r+3q}a\left[1+\frac{q d_2}{q d_1 + (2r+q)d_2}\right].$$

Setzt man $r = 1$, $q = 2$, $d_1 = d_2 = r$, so findet man $\frac{2}{3}a$.

§ 14. Es sei in Fig. 5. M der Mittelpunkt eines Kreis Halbmesser r ist; AB eine Gerade, um welche der Kreis herumgedreht wird; der Abstand MC des Mittelpunktes von sei R. Man teile den Halbmesser r in n gleiche Teile u $\frac{x}{n}r$; DG sei $\frac{1}{n}r$; man ziehe DE und GF senkrecht auf A dann

$$DE = R + r\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}$$

und

$$DGE = R - r\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}$$

Es soll 1. die Oberfläche, 2. der Rauminhalt des Rotati gesucht werden. Bezeichnet man $FE = JH$ mit s_x, so ist

$$s_x = \frac{r}{n\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}}.$$

Die von $DEFG$ erzeugte Oberfläche ist

$$2s_x\pi\left(R + r\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}} + R - r\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}\right) = 2Rs_x$$

d. i.

$$\frac{4Rr\pi}{n\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}};$$

---

*) Brandes S. 206.

Grenzwert der Summe ist die von dem Halbkreise erzeugte Oberhe $4Rr\pi^2$ (§ 5.); der ganze Kreis erzeugt daher die Oberfläche $r\pi^2$. *)

Der von $EFJH$ erzeugte Rotationskörper hat den Rauminhalt:

$$\left(R+r\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}\right)^2\pi-\frac{1}{n}r\left(R-r\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}\right)\pi=4Rr^2\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}}{n}\pi.$$

Grenzwert der Summe (§ 4.) ist $Rr^2\pi^2$, daher der von dem zen Kreise erzeugte Körper $2Rr^2\pi^2$.

Setzt man $R=r$, so wird AB Tangente und es ergiebt sich: Oberfläche des Rotationskörpers, der durch Umdrehung eines ises um eine Tangente erzeugt wird, ist so gross als ein Quadrat, ches den Umfang des Kreises zur Seite hat; der Rauminhalt, so ss als ein Cylinder, der den Kreis selbst zur Grundfläche und den fang des Kreises zur Höhe hat.

§ 15. Das Trägheitsmoment einer Geraden einer Figur in Beung auf eine Gerade als Drehungsachse eines Körpers ist die me der Producte jedes Elementes eines Gebildes in das Quadrat senkrechten Abstandes des Elementes von der D ehungsachse.

Es sei $ABCD$ (Fig. 6.) ein Rechteck; zur Grundlinie $AB=g$ llel sei die Drehungsachse PQ; der senkrechte Abstand derselben AB ist $EF=a$, und $FG=h$ die Höhe des Rechtecks; man dieselbe von F an in n gleiche Teile, $MU=HJ=\frac{1}{n}h$ sei der Teil, so dass

$$EM=a+\frac{x}{n}h,$$

r das Trägheitsmoment von $HKLJ$

$$\frac{1}{n}gh\left(a+\frac{x}{n}h\right)^2=\frac{1}{n}a^2gh+\frac{2x}{n^2}agh^2+\frac{x^2}{n^3}gh^3.$$

mt man den Grenzwert der Summe, so ergiebt sich als Trägheitsent von $ABCD$:

$$T=a^2gh+agh^2+\tfrac{1}{3}gh^3,$$

das Trägheitsmoment eines Rechtecks in Beziehung auf eine zur ndlinie g parallele Drehungsachse ist:

$$T=gh(a^2+ah+\tfrac{1}{3}h^2) \quad \text{. . . . . (A)}$$

*) Cournot, Elementarlehrbuch der Theorie der Functionen, § 349 u. 350.

§ 16. Es sei die Drehungsachse von $ABCD$ in E senkrecl auf der Ebene des Rechtecks und $AJ = JB = \frac{1}{2}g$. Offenbar stel jede von E nach einem Punkte des Rechtecks gezogene Gerade senk recht auf der Drehungsachse. Man teile wiederum die Höhe h i n gleiche Teile, MU ist $\frac{1}{n}h$ und $FM = \frac{x}{n}h$. Dagegen $HM = \frac{1}{2}g$ tei man von M an in q gleiche Teile, $NR = \frac{1}{2q}g$ und $MN = \frac{y}{q}g$. D Element $NRST$ ist dann $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q}gh$ und ($EF = a$ gesetzt)

$$EN^2 = \left(a + \frac{x}{n}h\right)^2 + \frac{y^2}{4q^2}g^2,$$

daher das Trägheitsmoment des Elementes:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{q}gh\left[\left(a + \frac{x}{n}h\right)^2 + \frac{y^2}{4q^2}g^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\,\frac{1}{q}a^2gh + \frac{x}{n^2}\,\frac{1}{q}agh^2 + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{n^3q}gh^3 + \frac{1}{8}\,\frac{1}{n}\,\frac{y^2}{q^3}g^3h.$$

Nimmt man die Summe von $y = 1$ bis $y = q = \infty$, so ergiebt s das Trägheitsmoment des Streifens $HJUM$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{n}a^2gh + \frac{x}{n^2}agh^2 + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{n^3}gh^3 + \frac{1}{24}\,\frac{1}{n}g^3h,$$

daher des Streifens $HKLJ$

$$\frac{1}{n}a^2gh + \frac{2x}{n^2}agh^2 + \frac{x^2}{n^3}gh^3 + \frac{1}{12}\,\frac{1}{n}g^3h.$$

Die Summe von $x = 1$ bis $x = n = \infty$ giebt das Trägh moment des Rechtecks:

$$a^2gh + agh^2 + \tfrac{1}{3}gh^3 + \frac{1}{12}g^3h.$$

Das Trägheitsmoment eines Rechtecks in Beziehung auf e senkrecht in einem Abstande a über der Mitte der Grundlinie der Ebene stehende Drehungsachse ist:

$$T = gh\left[a^2 + ah + \tfrac{1}{3}h^2 + \frac{1}{12}g^2\right] \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

§ 17. Die Drehungsachse des Dreiecks ABC (Fig. 7.) sei Grundlinie BC (g). Die Höhe AD teile man in n gleiche Teile u es sei $AJ = \frac{x}{n}h$, $JK = \frac{1}{n}h$, so ist nach § 15. Gl. (A) das Trägh

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

[illegible] Trägheitsmoment [illegible] Dreiecks [illegible] in Beziehung auf die [illegible]

$$T = \frac{1}{[illegible]} a^4 \qquad [illegible]$$

§ [illegible] Das Trägheitsmoment des gleichschenkligen Dreiecks [illegible] die durch die Spitze A desselben gehende Gerade [illegible] $BD = [illegible]$, $AC = [illegible]$, $BC = [illegible]$ [illegible] senkrecht auf [illegible] BF und CE senkrecht auf AD. Nach § [illegible] ist das [illegible]heitsmoment des Dreiecks ABC in Beziehung auf AD:

$$\frac{1}{12} AD (CE^3 - BF^3),$$

[illegible] man von dem Trägheitsmomente des Dreiecks ABC das Trägheitsmoment des Dreiecks ADB abzieht.

Nun ist aber

$$AD = \frac{h}{\sin\alpha}, \quad CE = (l+g)\sin\alpha, \quad BF = l\sin\alpha,$$

[illegible]r das Trägheitsmoment

$$= \frac{1}{12} h((l+g)^3 - l^3)\sin\alpha^2 = \tfrac{1}{4} h l^2 g \sin\alpha^2 + \tfrac{1}{4} h l g^2 \sin\alpha^2 + \frac{1}{12} h g^3 \sin\alpha^2.$$

[illegible]t ferner

$$h = (l + \tfrac{1}{2} g)\operatorname{tg}\alpha,$$

[illegible]ch

$$l = h \operatorname{cotg}\alpha - \tfrac{1}{2} g;$$

[illegible] man diesen Wert in T ein, so ergiebt sich:

$$T = \frac{1}{12} gh[\tfrac{1}{4}g^2 \sin\alpha^2 + 3h^2 \cos\alpha^2].$$

Oder wenn man $\angle DAG$ mit β bezeichnet:

$$T = \frac{1}{12} gh[\tfrac{1}{4}g^2 \cos\beta^2 + 3h^2 \sin\beta^2].$$

Das Trägheitsmoment eines gleichschenkligen Dreiecks in Beziehung auf eine durch die Spitze desselben gehende Drehungsachse welche mit der Höhenlinie des Dreiecks den Winkel β bildet, ist:

$$T = \frac{1}{12} gh[\tfrac{1}{4}g^2 \cos\beta^2 + 3h^2 \sin\beta^2] \quad \ldots\ldots \text{(D}$$

§ 19. Es sei die Drehungsachse des Kreises um M (Fig. 2. der Durchmesser AB; man errichte MC senkrecht auf AB und teil den rechten Winkel AMC in n gleiche Teile, so dass $\angle AME = \frac{x}{n} 90$ ist; jeden Halbmesser, wie ME, kann man als ein Dreieck betrachten durch dessen Spitze M die Drehungsachse geht, daher Gl. (D) anwendbar; es ist aber $g = \frac{1}{2n} r\pi$, daher

$$g^2 = \frac{1}{4n^2} r^2\pi^2, \quad h = r, \quad \beta = \frac{x}{n} 90^0;$$

g^2 wird offenbar gegen h^2 verschwinden, daher erhält man

$$\frac{1}{2n} r^2\pi + r^2 \sin\frac{x}{n} 90^{02}.$$

Nach § 6. aber ist

$$\operatorname{Lim} \overset{x=1}{\underset{x=n}{S}} \frac{\sin\frac{x}{n} 90^{02}}{n} = \tfrac{1}{2}$$

daher, das Trägheitsmoment eines Kreises in Beziehung auf eine Durchmesser als Drehungsachse ist:

$$T = \tfrac{1}{4} r^4 \pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(E}$$

Man kann das Trägheitsmoment des Kreises auch noch durch Anwendung der Gl. (A) bestimmen $T = gh(a^2 + ah + h^2)$. Hier ist

$$g = 2r\sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}, \quad h = \frac{1}{n} r, \quad a = \frac{x}{n} r,$$

es wird daher ah und h^2 gegen a verschwinden und man erhält

$$\frac{2r^4 x^2}{n^3}\sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}},$$

daher für den Halbkreis:

$$T = 2r^4 \operatorname{Lim} \overset{x=1}{\underset{x=n}{S}} \frac{x^2}{n^3} \sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}},$$

folglich für den ganzen Kreis:

$$T = 4r^4 \operatorname{Lim} \overset{x=1}{\underset{x=n}{S}} \frac{x^2}{n^3} \sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}} = \tfrac{1}{4} r^4 \pi,$$

folglich:

$$\operatorname{Lim} \overset{x=1}{\underset{x=n}{S}} \frac{x^2}{n^3} \sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}} = \frac{1}{16}\pi. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(F)}$$

§. 20. In Fig. 7. stehe in A die Drehungsachse senkrecht auf der Ebene des gleichschenkligen Dreiecks; wendet man auf $EFGH$ Gl. (B) an, so ist:

$$g = \frac{x}{n} g, \quad h = \frac{1}{n} h, \quad a = \frac{x}{n} h$$

und es ergiebt sich als Trägheitsmoment von $EFGH$

$$\frac{x}{n^2} gh \left(\frac{x^2}{n^2} h^2 + \frac{x}{n^2} h^2 + \frac{1}{3n^2} h^2 + \frac{1x^2}{12n^2} g^2 \right).$$

Die beiden mittlern Posten verschwinden gegen die übrigen und es bleibt

$$\frac{x^3}{n^4} gh^3 + \frac{1}{12} \frac{x^3}{n^4} g^3 h,$$

nimmt man den Grenzwert, so findet man:

$$\tfrac{1}{4} gh^3 + \frac{1}{48} g^3 h$$

Daraus folgt:

Das Trägheitsmoment eines gleichschenkligen Dreiecks ist, wenn die Drehungsachse senkrecht auf dem Dreiecke in der Spitze steht:

$$T = \tfrac{1}{4} gh \left[h^2 + \frac{1}{12} g^2 \right]. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(G)}$$

§ 21. Die Drehungsachse stehe senkrecht in dem Mittelpunkte des Kreises Fig. 9. Man teile die Peripherie in n gleiche Teile, verbinde die Teilpunkte mit dem Mittelpunkte, so kann man jeden Teil als ein Dreieck betrachten und daher Gl. (G) anwenden, g ist hier $\frac{2}{n} r\pi$, $h = r$, es wird daher g gegen h^2 verschwinden und man erhält als Trägheitsmoment eines Teiles

$$\frac{1}{2n} r^4 \pi;$$

nimmt man den Grenzwert der Summe, so ergiebt sich:

Das Trägheitsmoment eines Kreises, in dessen Mittelpun[kt die] Achse senkrecht steht, ist:

$$\tfrac{1}{2} r^4 \pi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

§ 21. Um das Trägheitsmoment der Parabel Fig. 3. zu [finden,] wenn die Achse AB die Drehungsachse ist, teile man die O[rdinate] $BC = b$, welcher die Abscisse $AB = a$ entspricht, in n gleiche[...] es sei $BK = \frac{x}{n} b$ und $JK = \frac{1}{n} b$; man ziehe JM und KL [parallel] zur Achse und fälle darauf NOP senkrecht, so ist das Trä[gheits-]moment $JKNO$, wenn $AP = a_x$ ist:

$$a \, . \, \frac{1}{n} b \frac{x^2}{n^2} b^2 - a_x . \frac{1}{n} b^3 \frac{x^2}{n^2} \; (\S\ 15);$$

da aber

$$a_x = \frac{x^2}{n^2} \frac{b^2}{p} = \frac{x^2}{n^2} a$$

so ergiebt sich als Trägheitsmoment jenes Streifens

$$\frac{x^2}{n^3} ab^3 - \frac{x^4}{n^5} ab^3$$

Nimmt man den Grenzwert, so ergiebt sich für dasselbe Pa[rabel-]segment

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) ab^3 = \frac{2}{15} ab^3,$$

daher: Das Trägheitsmoment des Parabelsegments, wenn die Pa[rabel-]achse die Drehungsachse, ist $\frac{4}{15} ab^3$.

Steht aber die Drehungsachse in der Ebene der Parabel [senk-]recht auf der Abscissenachse, ist also die Ordinatenachse, so [erhält] man durch Anwendung von (A) das Trägheitsmoment des St[reifens] $DEFG$

$$\frac{1}{n} ab_x \frac{x^2}{n^2} a^2,$$

oder da

$$b_x = b \sqrt{\frac{x}{n}}, \quad \frac{x^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{7}{2}}} a^3 b = \frac{2}{7} a^3 b$$

und auf den untern Teil ausgedehnt, erhält man: Das Trä[gheits-]moment des Parabelsegments in Beziehung auf die Ordinatenac[hse]

Es stehe die [illegible] im Scheitel [illegible] zu der Ebene der Parabel, so [illegible] $g = 2b$, $h = \frac{1}{n} a$, $a = \frac{x}{n} c$ [illegible]. [illegible] das Trägheitsmoment eines Streifens

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

so ergiebt sich:

$$[illegible]$$

Nimmt man hiervon den Grenzwert, so erhält man

$$\frac{4}{3} ab^3 - \frac{4}{15} ab^3 = 4ab \left([illegible] \right)$$

Das Trägheitsmoment der Parabel in Beziehung auf eine im Scheitel auf der Parabelebene senkrecht stehende Achse ist so gross als die Summe der Trägheitsmomente in Beziehung auf die Abscissen- und Ordinatenachse.

§ 22. Es sei $ADBE$ (Fig. [illegible]) eine Ellipse, deren Gleichung ist

$$a^2 z^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2$$

Man teile CA d. i. a in n gleiche Teile, und es sei

$$CK = \frac{x}{n} a,$$

daher

$$a^2 z^2 = a^2 b^2 \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

also

$$z = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}};$$

Es sei $\frac{1}{n} a$, man errichte senkrecht GKF und HLJ, nehme DE als Drehungsachse, und wende in Beziehung auf $GFJH$ Gl. (A) § 15. an, so ist

$$g = 2b \sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}, \quad h = \frac{1}{n} a \quad \text{und} \quad a = \frac{x}{n} c$$

daher das Trägheitsmoment des betreffenden Streifens:

$$2b\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n^2}a\frac{x^2}{n^2}a^2$$

(die beiden andern Teile von (A) fallen weg), d. i.

$$2a^3b\frac{x^2}{n^3}\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}.$$

Geht man auf den Grenzwert über und dehnt das Resultat auf d[ie] ganze Ellipse aus, so erhält man, da

$$\text{Lim}\frac{x^3}{a^3}\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}=\frac{1}{16}\pi$$

(Gl. (F) § 19): $\frac{1}{4}a^3b$ d. h.: Das Trägheitsmoment der Ellipse in Be[-]ziehung auf die kleine Achse als Drehungsaxe ist $\frac{1}{4}a^3b$.

Eben so wird man erhalten, dass das Trägheitsmoment in Be[-]ziehung auf die grosse Achse $\frac{1}{4}ab^3$ ist.

Wenn die Drehungsachse in dem Mittelpunkte der Ellipse senk[-]recht auf der Ebne der Ellipse steht, so hat man, um das Trägheit[s-]moment von *FGHJ* zu bestimmen, die Gl. (B) § 16. anzuwenden; e[s] ist dann

$$g=2b\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}},\quad h=\frac{1}{n}a\quad\text{und}\quad a=\frac{x}{n}a,$$

daher das Trägheitsmoment des Streifens:

$$2b\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}\frac{1}{n}a\frac{x^2}{n^2}a^2+\frac{2}{3n}ab^3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

d. i.

$$2a^3b\frac{x^2}{n^3}\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}+\frac{2}{3}ab^3\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}}{n}-\frac{2}{3}ab^3\frac{x^2}{n^3}\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}$$

Geht man auf dem Grenzwert über, so ist das Trägheitsmome[nt] der halben Ellipse

$$\frac{1}{8}a^3b+\frac{1}{6}ab^3-\frac{1}{24}ab^3=\frac{1}{8}a^3b+\frac{1}{8}ab^3,$$

daher für die ganze Ellipse $\frac{1}{4}ab(a^2+b^2)$: Das Trägheitsmoment d[er] Ellipse in Beziehung auf eine in dem Mittelpunkte senkrecht stehend[e] Achse ist so gross als die Summe der Trägheitsmomente in Beziehun[g] auf die beiden Achsen.

[illegible]

das Trägheitsmoment des Ringes von der Stärke [illegible], der Grenzwert $\frac{1}{2}r^4h\pi$ giebt demnach das Trägheitsmoment des Cylinders. Das Volumen desselben ist $M = r^2h\pi$, daher das Trägheitsmoment $\frac{1}{2}Mr^2$.

Verändert sich die Dichtigkeit des Cylinders progressiv vom Mittelpunkte d_1 nach der Oberfläche d_2, so beträgt das Gewicht des Ringes in einem Abstande von $\frac{x}{n}r$:

$$\frac{2x}{n^2}r^2h\pi\left(d_1-\frac{x}{n}(d_1-d_2)\right)=\frac{2x}{n^2}r^2hd_1\pi-\frac{2x^2}{n^3}r^2h(d_1-d_2)\pi.$$

Der Grenzwert hiervon ist

$$r^2hd_1\pi-\tfrac{2}{3}r^2h(d_1-d_2)\pi=\tfrac{1}{3}r^2h\pi(d_1+2d_2)=M.$$

Das Trägheitsmoment des Ringes ist

$$\frac{2x^3}{n^4}r^4h\pi\left[d_1-\frac{x}{n}(d_1-d_2)\right]=\frac{2x^3}{n^4}r^4hd_1\pi-\frac{2x^4}{n^5}r^4h(d_1-d_2)\pi.$$

Der Grenzwert giebt als Trägheitsmoment des betreffenden Cylinders

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)r^4h\pi d_1\pi+\frac{2}{5}r^4h\pi d_2=\frac{1}{10}r^4h\pi\left[d_1+4d_2\right],$$

oder da

$$M = \frac{1}{3} r^2 h\pi (d_1 + 2d_2),$$

das Trägheitsmoment des betreffenden Cylinders:

$$\frac{3}{10} Mr^2 \left[1 + \frac{2d_2}{d_1 + 2d_2}\right].$$

§ 24. Es sei C der Mittelpunkt einer Kugel, welche den H messer $MA = r$ hat; man teile denselben in n gleiche Teile, es $MB = \frac{x}{n} r$ und $BC = \frac{1}{n} r$. Durch jeden Teilpunkt lege man Eb welche auf dem Halbmesser senkrecht stehen, und auf jeden Du schnittskreis einen Cylinder von der Höhe $\frac{1}{n} r$, so ist das Trägh moment des Cylinders $DEFG$:

$$\frac{1}{2n} r^5 \pi \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^2 = \frac{1}{2} r^5 \pi \left(\frac{1}{n} - \frac{2x^2}{n^3} + \frac{x^4}{n^5}\right).$$

Der Grenzwert giebt $\frac{4}{15} r^5 \pi$, auf beide Halbkugeln ausgedehnt er man als Trägheitsmoment der Kugel $\frac{8}{15} r^5 \pi$, oder ist $M = \frac{4}{3} r^3 \pi$, ist das Trägheitsmoment der Kugel $\frac{2}{5} Mr^2$.

Man lege durch die Teilpunkte concentrische Kugeloberfläc so entstehen Kugelschalen von der Stärke $\frac{1}{n} r$. Das Trägheitsmom der $x$ten Kugelschale ist:

$$\frac{8}{15} \frac{(x+1)^5 - x^5}{n^5} r^5 \pi = \frac{8}{15} \frac{5x^4}{n^5} r^5 \pi + \frac{8}{15} \cdot \frac{10x^3}{n^5} r^5 \pi + \frac{8}{15} \frac{10x^2}{n^5} r^5 \pi +$$
$$\frac{8}{15} \frac{5x}{n^5} r^5 \pi + \frac{8}{15} \frac{1}{n^5} r^5 \pi$$

von dieser Summe bleibt nur der erste Teil $\frac{8}{3} \frac{x^4}{n^5} r^5 \pi$. Die Dich keit dieser Kugelschale sei

$$d_1 - \frac{x}{n}(d_1 - d_2),$$

daher das Trägheitsmoment derselben

$$\frac{8}{3} \frac{x^4}{n^5} r^5 d_1 \pi - \frac{8}{3} \frac{x^5}{n^6} (d_1 - d_2) r^5 \pi.$$

Geht man auf den Grenzwert über, so ergiebt sich

$$T = \frac{8}{15} r^5 d_1 \pi - \frac{4}{9} r^5 d_1 \pi + \frac{4}{9} r^5 d_2 \pi = \frac{4}{45} r^5 \pi [d_1 + 5 d_2].$$

Es ist aber nach § 10. das Gewicht der Kugel $M = \frac{1}{3} r^3 \pi [d_1 + 3 d_2]$. Daher das Trägheitsmoment der Kugel, deren Dichtigkeit vom Mittelpunkte (d_1) bis zur Oberfläche (d_2) progressiv sich verändert:

$$T = \frac{4}{15} M r^2 \left[1 + \frac{2 d_2}{d_1 + 3 d_2}\right].$$

§ 25. Die Gleichung eines Ellipsoids ist *):

$$b^2 c^2 y^2 + a^2 c^2 z^2 + a^2 b^2 u^2 = a^2 b^2 c^2.$$

Man teile die Achse c in n gleiche Teile, lege durch jeden Teilpunkt eine Ebne, parallel zur Ebne, yz, so ist die Durchschnittsfigur in der Höhe $u = \frac{x}{n} c$ eine Ellipse von der Gestalt:

$$b^2 c^2 y^2 + a^2 c^2 z^2 = a^2 b^2 c^2 \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \quad \text{d. i.} \quad b^2 y^2 + a^2 z^2 = a^2 b^2 \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

Die eine Achse dieser Ellipse ist $a\sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}$, die andere $b\sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}$. Auf diese Ellipse stelle man einen Cylinder, von der Höhe $\frac{1}{n} c$, so ist der Rauminhalt desselben $abc\pi\left(\frac{1}{n} - \frac{x^2}{n^3}\right)$, daher das halbe Ellipsoid $abc\pi\left[1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{2}{3} abc\pi$, folglich das ganze $\frac{4}{3} abc\pi$.

Verändert sich aber die Dichtigkeit der Masse des Ellipsoids progressiv von $u = 0$ (d_1) bis $u = \pm c (d_2)$, so ist das Gewicht des $x$ten elliptischen Cylinders

$$abc\pi\left(\frac{1}{n} - \frac{x^2}{n^3}\right)\left[d_1 - \frac{x}{n}(d_1 - d_2)\right] =$$

$$abc\pi\left[\frac{1}{n} d_1 - \frac{x}{n^2} d_1 - \frac{x^2}{n^3} d_1 + \frac{x^3}{n^4} d_1 + \frac{x}{n^2} d_2 - \frac{x^3}{n^4} d_2\right].$$

Der Grenzwert hiervon ist:

$$abc\pi[d_1 - \tfrac{1}{2} d_1 - \tfrac{1}{3} d_1 + \tfrac{1}{4} d_1 + \tfrac{1}{2} d_2 - \tfrac{1}{4} d_2] = \frac{1}{12} abc\pi[5 d_1 + 3 d_2],$$

daher das Gewicht des ganzen Ellipsoides $'abc\pi[5 d_1 + 3 d_2]$.

*) Poisson, Traité de Mécanique Paris 1811 Tom II. § 349.

Um das Trägheitsmoment des Ellipsoids in Beziehung auf [d]
Achse c zu bestimmen, suche man das Trägheitsmoment des xt[en]
elliptischen Cylinders, es ist (§ 22):

$$\tfrac{1}{4}abc(a^2+b^2)\pi\frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^2}{2}=\tfrac{1}{4}abc(a^2+b^2)\pi\left[\frac{1}{n}-\frac{2x^2}{n^3}+\frac{x^4}{n^5}\right]$$

Der Grenzwert giebt

$$\tfrac{1}{4}abc(a^2+b^2)\pi\left[1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right]=\frac{8}{60}abc(a^2+b^2)\pi,$$

daher das Trägheitsmoment des ganzen Ellipsoids $\frac{4}{15}abc(a^2+b^2)$[...]

Es war aber der Rauminhalt desselben $\frac{4}{3}abc\pi=M$, daher das Trä[g]-
heitsmoment des Ellipsoids in Beziehung auf die Achse $c\,T_c$ [=]
$\frac{1}{5}M(a^2+b^2)$. Ebenso werden die Trägheitsmomente in Beziehu[ng]
auf die Achsen a und b sein:

$$T_a=\frac{1}{5}M(b^2+c^2),\quad T_b=\frac{1}{5}M(a^2+c^2).$$

Es verändere sich die Dichtigkeit des Ellipsoids auf die ob[en]
angegebene Art, so ist das Trägheitsmoment des $x$ten Cylinders:

$$\tfrac{1}{4}abc(a^2+b^2)\pi\frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^2}{\ldots}\left(d_{\ldots}-\frac{x}{\ldots}(d_{\ldots}-d_{\ldots})\right)$$

XVIII.

Miscellen.

1.

Ueber das Problem der Geradführung eines Punktes.

In der praktischen Mechanik hat es seit lange als ein Problem gegolten, mittelst eines Systems drehbarer Stangen einen Punkt in gerader Linie zu führen. Dem Bedürfniss hat man bisher durch eine Anordnung genügt, welche die Bedingung nur annähernd erfüllt. Nun ist aber schon im Jahr 1864 das Problem in voller Strenge und so einfach, als man es nur wünschen kann, gelöst von Peaucellier in Nouvelles Annales de Mathématiques, 2. sér. t. III. p. 414. Der Verfasser zerlegt es auf höchst sinnreiche Art in 2 Probleme. Das Resultat der Verbindung beider entspricht einem allgemeineren Problem als dem oben genannten. Man kann durch die gleiche Anordnung einen Punkt in einem Kreise von unerreichbarem Mittelpunkt führen, der speciell in eine Gerade übergeht. Es ergiebt sich nämlich folgende Construction (s. die für den folgenden Artikel bestimmte Figur).

Die Punkte E, G sind fest, die Geraden EB, ED, BA, DA, BC, DC und GA haben constante Länge, und zwar

$$EB = ED; \quad BA = DA = BC = DC$$

und drehen sich frei in der Ebene um ihre Endpunkte; dann bewegt sich C für $GA = GE$ in gerader Linie, für $GA \gtrless GE$ im Kreise.

Ich erneuere die Mitteilung dieser Lösung, einesteils weil sie bekannter zu sein verdient, als sie es zu sein scheint, anderntcils weil sie gewiss instructiv für Schüler der Geometrie ist, und dazu auffordert, einfache Beweise dafür zu suchen. Ich vermute, dass sich solche von verschiedenen Seiten angreifen lassen, so dass sie sich wol dauernd als Uebungsaufgabe betrachten lässt. Hoppe.

2.

Beweis des Peaucellier'schen Satzes.

Vier Stangen von der Länge a sind an ihren Endpunkten durch Charniere der Reihe nach verbunden, so dass sie einen Rhombus $ABCD$ bilden. In zwei gegenüberliegenden Eckpunkten B und D ist dieser Rhombus ebenfalls durch Charniere mit zwei Stangen von der Länge b verbunden, deren andere Endpunkte in dem festen Punkte E so an einem Charnier angebracht sind, dass jede sich frei um E, in der Ebene der Figur drehen kann, mit der Beschränkung, dass $BD < 2a$ sein muss. Die Diagonalen des Rhombus schneiden sich in F; die eine derselben, nämlich CA geht, nötigenfalls verlängert, durch E, und es ist $EC.EA = EF^2 - EA^2 = b^2 - a^2$, also constant. Beschreibt man also mit A irgend eine Figur, so beschreibt C eine andere Figur, welche eine Abbildung durch reciproke Radien oder eine inverse Figur der ersteren heisst. Beschreibt insbesondere A einen Kreis um irgend einen festen Punkt G, was bewirkt werde durch eine Stange $GA = c$, welche um den festen Punkt G drehbar und mit dem Eckpunkt A des Rhombus durch ein Charnier verbunden ist, so beschreibt auch C einen Kreis, dessen Mittelpunkt H auf der Geraden $EG = d$ liegt, und der leicht construirt werden kann. Es ergiebt sich $EH = \frac{d(b^2-a^2)}{d^2-c^2}$ und der Radius $HC = \frac{c(b^2-a^2)}{(d^2-c^2)}$. Wenn der Radius des Kreises, den A beschreibt, c gleich d gewählt wird, so geht dieser Kreis durch E und der reciprok entsprechende den C beschreibt, geht über in eine Gerade, senkrecht zu EG. In diesem Falle entspricht also durch die Verbindung der 7 Stangen der Kreisbewegung des Punktes A eine geradlinige des Punktes C. Es ist zu beachten, dass, wenn $b \lesseqgtr a$ ist, sich A und C nur in solchen Teilen ihrer Bahnen reell bewegen können, die innerhalb eines concentrischen Ringes liegen, der begrenzt ist durch Kreise mit dem Mittelpunkt E und den Radien $(b+a)$ und $\pm(b-a)$. Wenn $b = a$ gewählt wird, so wird das Resultat illusorisch, wie leicht zu erkennen ist.

August.

3.

Lehrsatz, eine gewisse Raumcurve sechsten Grades betreffend.

Wenn drei windschiefe Gerade von drei andern geschnitten werden und durch die neun Schnittpunkte eine Fläche dritten Grades (f_3) gelegt ist, die keine jener Ge-

raden ganz in sich enthält, so schneidet die Fläche f_3 das Hyperboloid h_2, welches die sechs Geraden in sich enthält, in einer Raumcurve R_6, der sich unzählig viele derartige Systeme von je sechs Geraden einschreiben lassen; und durch jeden Punkt π der Raumcure R_6 gehen zwei einem solchen Systeme angehörige Gerade.

Beweis. Seien ABC drei windschiefe Gerade, $A_1 B_1 C_1$ drei Transversalen derselben. Man nehme auf R_6 einen beliebigen Punkt π, durch welchen die Generatrices D und D_1 von h_2 gehn. D schneidet R_6 noch in $\varkappa_1$ und λ_1; D_1 schneidet dieselbe Curve noch in $\varkappa$ und λ. Man lege durch $\varkappa_1$ und λ_1 noch die Generatrices der zweiten Schaar von h_2, sie seien $K_1 L_1$, und durch $\varkappa$ und λ die der ersten Schaar K und L. Man projicire nun die ganze Figur von π aus auf eine beliebige Ebene, dann projiciren sich die Geraden D und D_1 in die Punkte δ' und δ_1'; die übrigen Generatrices der ersten Schaar A, B, C, K, L in Gerade durch δ_1' (bezüglich A', B', C', K', L'); die der zweiten Schaar A_1, B_1, C_1, K_1, L_1, in Gerade durch δ' (bezüglich A_1', B_1', C_1', K_1', L_1'); R_6 in eine Curve für 5ten Grades C_5', welche durch die neun Durchschnittspunkte ν' von $A'B'C'$ mit $A_1'B_1'C_1'$ geht und in δ' und δ_1' Doppelpunkte hat mit den Tangenten K_1' L_1' und $K'L'$ (da ja DK_1 Tangentialebene von h_2 in $\varkappa_1$ ist, etc.).

Die 5 Geraden $A'B'C'K_1'L_1'$ bilden nun eine Curve fünften Grades S_5', welche mit C_5' ein Curvenbüschel bestimmt. Jede Curve dieses Büschels geht erstens durch die neun Durchschnittspunkte ν' je einer Geraden $A'B'C'$ mit je einer Geraden $A_1'B_1'C_1'$; zweitens hat jede Curve des Büschels in δ' und in δ_1' Doppelpunkte, deren Aeste unveränderte Tangenten behalten, und endlich drittens geht jedes Glied durch die zweimal zwei Punkte μ', in welchen die Haupttangenten im Doppelpunkt δ', nämlich K_1' und L_1' die Curve C_5' schneiden. Stellt man die Bedingung, dass eine Curve dieses Büschels durch einen beliebigen Punkt der Geraden C_1' geht, so folgt, dass diese Curve aufgelöst sein muss in die drei Geraden $A_1'B_1'C_1'$ und in einen Kegelschnitt, welcher in δ_1' einen Doppelpunkt hat und zu Tangenten im Doppelpunkte die Geraden K' und L'; der also in die beiden Geraden K' und L' zerfällt; folglich geht jede der Geraden K' und L' durch zwei der vier Punkte μ'; also schneiden sich die vier Tangenten in den zwei Doppelpunkten δ' und δ_1' wechselseitig in den vier Punkten μ' der Curve C_5', und jeder Punkt μ' ist die Projection eines Punktes μ der Curve R_6; nun schneidet aber jede der Geraden KL wirklich jede der Geraden K_1 und L_1 in einem Punkte μ, und die Gerade $\pi\mu\mu'$ hat mit f_3 ausser π und μ keinen

Punkt gemein, folglich muss jeder Punkt μ ein Punkt der Raumcurve R_6 sein. Es sind also die sechs Geraden DKL $D_1K_1L_1$ der Raumcurve R_6 in derselben Weise eingeschrieben, wie die Geraden ABC $A_1B_1C_1$ w. z. b. w.

Es möge noch nachgewiesen werden, dass die Raumcurve R_6 tatsächlich existirt d. h. dass sie im allgemeinen nicht in jene sechs Gerade aufgelöst ist. Zu diesem Zwecke denke man sich durch jede der Geraden ABC eine Ebene gelegt, deren jede das Hyperboloid h_2 noch in einer Geraden der zweiten Schaar schneidet, etwa in $D_1E_1F_1$, welche nicht mit $A_1B_1C_1$ zusammenfallen sollen, ebenso durch $A_1B_1C_1$ je eine Ebene $p_1q_1r_1$, deren jede h_1 noch in einer Geraden der ersten Schaar, etwa DEF schneidet, welche nicht mit ABC zusammen fallen.

Dann kann man die drei Ebenen pqr als eine Fläche dritten Grades auffassen, die drei Ebenen $p_1q_1r_1$ als eine zweite, und das Hyperboloid h_2 mit einer willkürlichen Ebene μ als eine dritte. Durch die 27 Durchschnittspunkte dieser drei Flächen wird ein Netz von Flächen dritten Grades bestimmt. Zu jenen siebenundzwanzig Punkten gehören die neun Durchschnittspunkte von ABC mit $A_1B_1C_1$; (ausserdem auch die neun Durchschnittspunkte von DEF mit $D_1E_1F_1$ und neun in der Ebene μ liegende Punkte).

Irgend eine Fläche dieses Netzes hat aber im Allgemeinen mit keiner der Geraden ABC $A_1B_1C_1$ oder DEF $D_1E_1F_1$ einen vierten Punkt gemeinschaftlich, also schneidet eine beliebige Fläche dieses Netzes das Hyperboloid h_2 in einer Raumcurve R_6, welche die besprochene Eigenschaft hat.

Berlin, im August 1875. F. August.

4.

Von den lateralen oder imaginären Geraden.

§ 1. Es sei in der Gleichung:

$$x^2 + Axy + By^2 = 0$$

$4B > A^2$, woraus zugleich folgt, dass B positiv sein muss, so stellt dieselbe zwei imaginäre Gerade dar, deren Gleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} x + yA\,\frac{\left(1 + i\sqrt{\frac{4B}{A^2} - 1}\right)}{2} &= 0 \\ x + yA\,\frac{\left(1 - i\sqrt{\frac{4B}{A^2} - 1}\right)}{2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

Man setze $\frac{1}{2}A = \varrho\cos\varphi$, $\frac{1}{2}A\sqrt{\frac{4B}{A^2}-1} = \varrho\sin\varphi$, so ist $\varrho = \sqrt{B}$, $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{4B}{A^2}-1}$, folglich $\cos\varphi = \frac{A}{2\sqrt{B}}$, $\sin\varphi = \sqrt{1-\frac{A^2}{4B}}$. Die Gleichungen (1) erhalten dadurch die Form:

$$\left.\begin{aligned} x + y\sqrt{B}\left[\frac{A}{2\sqrt{B}} + i\sqrt{1-\frac{A^2}{4B}}\right] = 0 \\ x + y\sqrt{B}\left[\frac{A}{2\sqrt{B}} - i\sqrt{1-\frac{A^2}{4B}}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

oder:

$$x + y\sqrt{B}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 0,$$

$$x + y\sqrt{B}(\cos(360-\varphi) + i\sin(360^0-\varphi));$$

$\cos\varphi + i\sin\varphi$ und $\cos(360-\varphi) + i\sin(360-\varphi)$ sind die Richtungscoefficienten von Ebnen, welche respective unter $\angle\varphi$ und $360-\varphi$ gegen die Fundamentalebne geneigt sind und dieselbe in der Abscissenachse schneiden; jede Gerade ist unter einem Winkel gegen dieselbe geneigt, dessen Tangente $-\frac{1}{\sqrt{B}}$ ist.

§ 2. Die allgemeine Gleichung hat die Form:

$$x^2 + Axy + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \cdot \cdots\cdots \quad (3)$$

Bestimmt man den Wert von x, so erhält man:

$$x + \frac{Ay+C}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-4B)y^2 + 2(AC-2D)y + C - 4E} \cdot \cdot\cdot \quad (4)$$

Sollen dadurch zwei Gerade dargestellt werden, so muss die unter dem Wurzelzeichen stehende Grösse ein vollständiges Quadrat sein, d. h.

$$\sqrt{(A^2-4B)(C^2-4E)} = AC - 2D \cdot \cdots\cdots \quad (5)$$

Entwickelt man Gl. (5), so erhält man die bekannte Bedingungsgleichung:

$$A^2E + BC^2 + D^2 + 4BE - ACD = 0 \cdot \cdots\cdots \quad (6)$$

Soll aber die Gleichung (3) zwei laterale Gerade darstellen, so müssen ausser Gl. (6) auch noch gelten:

$$4B > A^2, \quad 4E > C^2 \cdot \cdots\cdots \quad (7)$$

Dadurch wird Gl. (4):

$$x + \frac{Ay+C}{2} = \pm\frac{1}{2}i\sqrt{(4B-A^2)y^2 - 2(AC-2D)y + 4E - C^2} \cdot \quad (8)$$

Es sei $4B - A^2 = \mu^2$, $4E - C^2 = \nu^2$, so ergeben sich:

$$\mu\nu = AC - 2ED \quad \text{und}$$

$$\left.\begin{aligned} x + y\left(\frac{A + i\mu}{2}\right) + \frac{C + i\nu}{2} = 0 \\ x + y\left(\frac{A - i\mu}{2}\right) + \frac{C - i\nu}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

§ 3. Um die Gl. (9) construirbar zu machen, verändere man die Coordinaten so, dass, wenn y verschwindet, auch x gleich Null wird, zu diesem Ende setze man $x = x_1 + \alpha$, $y = y_1 + \beta$. Trägt man diese Werte in Gl. (3) ein, so ergiebt sich:

$$x_1^2 + Ax_1y_1 + By_1^2 + (2\alpha + A\beta + C)x_1 + (A\alpha + 2B\beta + D)y_1$$
$$+ \alpha^2 + A\alpha\beta + B\beta^2 + C\alpha + D\beta + E = 0 \cdot \quad (10)$$

Um die angegebene Bedingung zu erfüllen, setzt man:

$$\alpha^2 + A\alpha\beta + B\beta^2 + C\alpha + D\beta + E = 0.$$

Aus Gl. (8) folgt:

$$\alpha = -\frac{A\beta + C}{2} \pm \tfrac{1}{2}i(\mu\beta - \nu).$$

$$\left.\begin{aligned}(x-\alpha)+(y-\beta)\sqrt{B}\left[\frac{A}{2\sqrt{B}}+i\sqrt{1-\frac{A^2}{4B}}\right]=0\\(x-\alpha)+(y-\beta)\sqrt{B}\left[\frac{A}{2\sqrt{B}}-i\sqrt{1-\frac{A^2}{4B}}\right]=0\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(12)$$

worin

$$\beta=\sqrt{\frac{4E-C^2}{4B-A^2}},\quad \alpha=-\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}A\sqrt{\frac{4E-C^2}{4A-B^2}}.$$

Die Lage der Lateralebnen und der Geraden in denselben wird daher in der allgemeinen Gleichung nicht verändert, nur der Punkt wird ein anderer, in welchem die lateralen Geraden die Fundamentalebne schneiden.

§ 4. George Salmon giebt in seiner trefflichen „Geometrie der Kegelschnitte, frei bearbeitet von Dr. Fiedler“ 2te Auflage S. 115. die Gleichung:

$$x^2-xy+y^2-x-y+1=0$$

und bestimmt daraus als die beiden Gleichungen der imaginären Geraden:

$$x+\vartheta y+\vartheta^2=0,\quad x+\vartheta^2 y+\vartheta=0,$$

worin ϑ eine imaginäre Kubikwurzel aus 3 giebt. Aus diesen Gleichungen lässt sich keine Construction ableiten. Wendet man aber § 2. und § 3. an, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(x-1)+(y-1)\left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}=0,$$

$$(x-1)+(y-1)\left\{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}=0.$$

Diese Gleichungen kann man auch schreiben:

$$(x-1)-(y-1)\left\{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}=0,$$

$$(x-1)-(y-1)\left\{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\}=0,$$

d. i.

$$(x-1)-(y-1)\{\cos 300^0+i\sin 300^0\}=0,$$

$$(x-1)-(y-1)\{\cos 60^0+i\sin 60^0\}=0;$$

sie stellen demnach zwei laterale Geraden dar, welche die Fundamentalebne in dem Punkte $x=1$ und $y=1$ schneiden. Durch diesen Punkt als Anfangspunkt der Coordinaten lege man eine Gerade

parallel zur Abscissenachse (Lateralachse); durch dieselben Ebenen, wovon die eine mit dem positiven Teile der Fundamentalebene einen Winkel von 300^0, die andere von 60^0 bildet und in jeder eine Gerade, welche mit dem positiven Teile der Abscissenachse einen Winkel von 45^0 machen, so sind dies die gesuchten imaginären Geraden.

F. E. Thieme.

5.

Bemerkung zum Aufsatze des Herrn Dostor über das Trieder.

Im Aufsatze „Le trièdre etc.“ des Herrn Prof. Dostor (Teil 57.) befinden sich auf S. 115. die bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}},$$

$$\sin A = \frac{2}{\sin b\sin c}\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)},$$

wo

$$2p = a+b+c. \quad \text{(In Lehrbüchern steht } s \text{ statt } p\text{)}.$$

Aus diesen Formeln erhält man analoge für die Functionen der Winkel, indem man obige Formeln anwendet auf das Supplementardreieck, dessen Seiten und Winkel a', b', c', A', B', C' den Relationen genügen

$$a' = \pi - A, \quad b' = \pi - B, \quad c' = \pi - C,$$
$$A' = \pi - a, \quad B' = \pi - b, \quad C' = \pi - c,$$

so dass

$$a'+b'+c' = 3\pi - (A+B+C) \quad \text{und}$$
$$A'+B'+C' = 3\pi - (a+b+c).$$

Um nun die Transformation erstgenannter Formeln zu bewerkstelligen, führt man gewöhnlich die Abkürzung ein:

$$2S = A+B+C \quad \text{und}$$
$$2S' = A'+B'+C',$$

wodurch z. B. die Formel

$$\sin\frac{A'}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p'-b')\sin(p'-c')}{\sin b' \sin c'}},$$

wobei

$$2p' = a'+b'+c' = 3\pi-(A+B+C),$$

$$p' = 3\frac{\pi}{2}-S,$$

$$p'-b' = \frac{3\pi}{2}-S-(\pi-B) = \frac{\pi}{2}-(S-B),$$

$$p'-c' = \frac{\pi}{2}-(S-C),$$

übergeht in folgende:

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B \sin C}}.$$

Auf diese Weise erhält man noch:

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}.$$

Der Herr Prof. Dostor führt jedoch die Abkürzung ein:

$$2S = A+B+C-\pi \quad \text{und}$$
$$2S' = A'+B'+C'-\pi,$$

wodurch dieselben Formeln transformirt werden in die Gestalt (VIII) auf S. 118.

Meine Bemerkung bezieht sich nun auf eine solche Abkürzung, durch welche die erzielten Formeln den ursprünglichen ganz conform werden. Setzt man nämlich

$$2S = A+B+C+\pi \quad \text{und}$$
$$2S' = A'+B'+C'+\pi,$$

so werden leicht die Relationen abgeleitet:

$$p' = 2\pi-S,$$
$$p'-a' = \pi-(S-A),$$
$$p'-b' = \pi-(S-B) \quad \text{und}$$
$$p'-c' = \pi-(S-C),$$

wodurch die erstgenannten Formeln angewendet auf das Supplementardreieck in folgende übergehen:

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(S-B)\sin(S-C)}{\sin B \sin C}},$$

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(S-A)\sin S}{\sin B \sin C}} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(S-B)\sin(S-C)}{\sin S \sin(S-A)}}.$$

Auch (IX) auf S. 118. erhält eine ähnliche Gestalt. Da nun diese Formeln aus jenen durch Vertauschung der grossen Buchstaben mit den kleinen und links der Cofunctionen mit den Functionen hervorgehen, so ist meiner Ansicht nach eine elegantere Form dieser Gleichungen gewonnen.

Freilich ist nun

$$\pi < S < 2\pi,$$

allein ich finde auch diese Grenzen bequemer als die bei Dostor, wo

$$\frac{\pi}{2} < S < 3\frac{\pi}{2},$$

indem die Unterschiede $S-A$, $S-B$, $S-C$ in meinen Formeln

XIX.

Untersuchung der Bahn eines Punktes, welcher mit der Kraft $\frac{k}{r^4}$ angezogen oder abgestossen wird, wobei k eine Constante und r die Entfernung vom Kraftcentrum bedeutet.

Von

Herrn *Eduard Kärger*,

Ordentlichem Lehrer an der Realschule erster Ordnung zu Posen.

Der Punkt M, welcher von dem festen Kraftcentrum O mit der
raft $\frac{k}{r^4}$ angezogen oder abgestossen wird, möge im Allgemeinen bei
ginn der Bewegung in irgend einer Richtung eine gewisse Geschwin-
gkeit v_0 erhalten haben. Dann findet die notwendig krummlinige
wegung des Punktes M nur in derjenigen Ebene statt, welche durch
e Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und durch das Kraft-
ntrum O bestimmt ist, da ausserhalb derselben keine Kräfte auf
nkt M wirken. Diese Ebene wollen wir zur Coordinaten-Ebene
r XY wählen und O sei der Anfangspunkt des Coordinatensystems.
e Anfangsentfernung des Punktes M von O sei r_0, womit zugleich
e X Axe zusammenfallen möge. Ferner bilde die Richtung der
nfangsgeschwindigkeit v_0, d. h. die Tangente der Bahncurve in dem
nfangspunkte der Bewegung mit der X Axe den Winkel α_0. Dann
für die Anfangslage:

$$x = r_0, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha_0, \quad \frac{dx}{dt} = -v_0 \cos\alpha_0.$$

Betrachten wir nun zunächst den Fall der Anziehung, so ist in
m Punkte xy der Bahn die im Sinne des Radius wirkende Kraft
$-\frac{k}{r^4}$, und ihre beiden Componenten nach den Axen der X und Y
nd demnach $= -\frac{kx}{r^5}$ resp. $= -\frac{ky}{r^5}$. Wir haben also die allge-
einen Bewegungsgleichungen:



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{r^5}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ky}{r^5}$$

Multiplicire 2) mit x, und 1) mit y, und subtrahire, so kommt:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Nun ist die linke Seite ein vollständiges Differential, nämlich:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)}{dt};$$

folglich kommt durch Integration der Gleichung 3)

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c$$

oder auch

$$x\,dy - y\,dx = c\,dt$$

Setze für x, y, $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ die obigen Anfangswerte ein, so folgt Gleichung 4)

$$c = r_0 v_0 \sin \alpha_0.$$

Multiplicire ferner Gleichung 1) mit $2dx$, 2) mit $2dy$, und ad[illegible] so kommt:

$$2dx\frac{d^2x}{dt^2} + 2dy\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{r^5}(2x\,dx + 2y\,dy).$$

Nun ist:

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

olglich:

$$2x\,dx + 2y\,dy = 2r\,dr,$$

Ferner ist:

$$2dx\frac{d^2x}{dt^2} + 2dy\frac{d^2y}{dt^2} = d\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}$$

$$= d\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right)$$

$$= d\frac{ds^2}{dt^2}$$

$$= d(v^2).$$

[illegible]

oder:

[illegible]

Aus Gleichung [illegible]

[illegible]

oder:

[illegible]

Ferner ist:

[illegible]

Quadrire diese Gleichungen und addire, so kommt:

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

Nun ist

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 = r^2 d[illegible]^2,$$

folglich:

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2 = r^2 d[illegible]^2.$$

Aus Gleichung 10) folgt dann:

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2 = (2mr^{-3} + b)\,dt^2$$
$$= (2mr + br^4)\frac{dt^2}{r^4};$$

folglich nach Gleichung 13):

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2 = (2mr + br^4)\frac{d\varphi^2}{c^2},$$

oder:

$$c^2 dr^2 = d\varphi^2 (br^4 - c^2 r^2 + 2mr);$$

folglich:

$$d\varphi = \frac{c\,dr}{\sqrt{br^4 - c^2r^2 + 2mr}}. \qquad 14)$$

Durch Integration in den Grenzen r_0 und r ergiebt sich dann:

$$\varphi = c\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{br^4 - c^2r^2 + 2mr}}$$
$$= c\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{R}} \qquad 15)$$

wo der Abkürzung wegen $br^4 - c^2r^2 + 2mr = R$ gesetzt ist. Aus Gleichung 13) und 14) folgt ferner:

Setzen wir aus den Gleichungen 6) und 11) für c und b ihre Werte ein, so geht die Gleichung 18) über in:

$$r^3 - \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}} r + \frac{2m}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}} = 0. \qquad 19)$$

Zur Untersuchung dieser Gleichung wollen wir vorerst die vollständige cubische Gleichung:

$$r^3 + dr^2 + er + f = 0$$

betrachten; ihre Wurzeln nennen wir r_1, r_2 und r_3, und bilden aus ihnen folgenden linearen Ausdruck:

$$\tau = r_1 + \xi r_2 + \xi^2 r_3.$$

ξ ist hier eine der conjugirten complexen Wurzeln von $x^3 = 1$, folglich:

$$\xi + \xi^2 = -1.$$

Durch cyklische Vertauschung von r_1, r_2 und r_3 erhalten wir für τ sechs Werte; erheben wir aber dieselben in die 3te Potenz, so ergeben sich nur 2 verschiedene Werte. Diese seien τ^3 und τ_1^3, wo eben:

$$\tau = r_1 + \xi r_2 + \xi^2 r_3$$
$$\tau_1 = r_1 + \xi r_3 + \xi^2 r_2.$$

τ^3 und τ_1^3 sind daher symmetrisch nach den Wurzeln r_1, r_2, r_3, also auch ihre Summe und Product; sie müssen sich also als ganze Functionen der Coefficienten der gegebenen Gleichung darstellen lassen. Führen wir die Rechnung aus, so erhalten wir:

$$\tau^3 + \tau_1^3 = -(2d^3 - 9de + 27f)$$
$$= -q.$$
$$\tau^3 . \tau_1^3 = (d^2 - 3e)^3$$
$$= p^3.$$

Die Resolvente, deren Wurzeln τ^3 und τ_1^3 sind, lautet demnach:

$$z^2 + qz + p^3 = 0,$$

also:

$$z = -\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - 4p^3}.$$

Daraus erhalten wir dann:

$$\tau = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - 4p^3}}$$

$$\tau_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - 4p^3}}$$

Nehmen wir nun für τ einen der drei Wurzelwerte, so ist damit auch τ_1 vollständig bestimmt durch die Gleichung:

$$\tau_1 = \frac{p}{\tau}$$

Wir haben also folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \tau &= r_1 + \xi r_2 + \xi^2 r_3 \\ \tau_1 &= r_1 + \xi^2 r_2 + \xi r_3 \\ -d &= r_1 + r_2 + r_3 \end{aligned}$$

also:

$$3r_1 = -d + \tau + \tau_1$$

$$3r_2 = -d - \frac{\tau + \tau_1}{2} + \frac{\tau - \tau_1}{2} i\sqrt{3}$$

$$3r_3 = -d - \frac{\tau + \tau_1}{2} - \frac{\tau - \tau_1}{2} i\sqrt{3}.$$

Somit haben wir r_1, r_2, r_3 durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausgedrückt, und ist ein Wert für τ fixirt, so sind dadurch alle Wurzeln der gegebenen Gleichung bestimmt. Die Beschaffenheit derselben betrachtend sehen wir, dass es auf den Ausdruck $q^2 - 4p^3$ ankommt. Drücken wir diesen durch die Wurzeln der Gleichung aus, so ist:

$$q^2 - 4p^3 = -27(r_1 - r_2)^2 (r_2 - r_3)^2 (r_3 - r_1)^2 = -27D$$

wo D die Discriminante der Gleichung ist; also:

$$D = -\frac{1}{27}(q^2 - 4p^3).$$

Nach der Beschaffenheit von D haben wir nun in Betreff der Wurzeln folgende 3 Fälle:

Ist $D > 0$, so sind die drei Wurzeln reell und ungleich;
$D < 0$, so sind zwei Wurzeln conjugirt complex und eine reell;
$D = 0$, so sind alle drei Wurzeln reell, und zwar wenn

$p \gtrless 0$, zwei einander gleich;
$p = 0$, alle drei einander gleich.

In unserem Falle ist nun:

$$d = 0; \quad e = -\frac{c^2}{b}; \quad f = \frac{2m}{b};$$

dies eingesetzt, giebt:

$$q = 2d^3 - 9de + 27f$$
$$= 27 \frac{2m}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}}$$
$$p = d^2 - 3e = \frac{3r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}};$$

$$\tau = \sqrt[3]{-\frac{27m}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}} + \sqrt{\frac{27^2 m^2}{(v_0^2 - 2mr_0^{-3})^2} - \frac{27 r_0^6 v_0^6 \sin^6\alpha_0}{(v_0^2 - 2mr_0^{-3})^3}}}$$

$$\tau_1 = \sqrt[3]{-\frac{27m}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}} - \sqrt{\frac{27^2 m^2}{(v_0^2 - 2mr_0^{-3})^2} - \frac{27 r_0^6 v_0^6 \sin^6\alpha_0}{(v_0^2 - 2mr_0^{-3})^3}}};$$

und:

$$r_1 = \frac{\tau + \tau_1}{3}$$

$$r_2 = -\frac{\tau + \tau_1}{6} + \frac{\tau - \tau_1}{6} i\sqrt{3}$$

$$r_3 = -\frac{\tau + \tau_1}{6} - \frac{\tau - \tau_1}{6} i\sqrt{3}.$$

Jetzt können wir R auch schreiben:

$$R = br(r - r_1)(r - r_2)(r - r_3).$$

In Betreff der Beschaffenheit der Wurzeln ist nun D zu untersuchen; zunächst aber folgt unmittelbar aus Gleichung 19):

$$r_1 + r_2 + r_3 = 0,$$
$$r_1 . r_2 . r_3 = -\frac{2m}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}};$$
$$D_1 = -\frac{1}{27}(q^2 - 4p^3)$$
$$= \frac{4}{(v_0^2 - 2mr_0^{-3})^2} \left\{ -27m^2 + \frac{r_0^6 v_0^6 \sin^6\alpha_0}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}} \right\}.$$

So weit nun die Beschaffenheit von D in Frage kommt, ist nur nötig, den zweiten Factor zu untersuchen, den wir kurz mit D_1 bezeichnen wollen, da der erste Factor als ein Quadrat auf das Vorzeichen von D keinen Einfluss hat.

Nach Aufstellung unserer Bewegungsgleichungen findet bei positivem Werte von k Anziehung statt; bei negativen aber Abstossung, denn die Componenten wirken dann im Sinne der positiven Axen. Danach erhalten wir folgende verschiedene Fälle:

I.

$k > 0$; d. h. $m > 0$.

1) $D_1 > 0$; dann sind also alle drei Wurzeln reell und ungleich. Aus der Bedingung folgt, dass $\frac{r_0^6 v_0^6 \sin^6\alpha_0}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}} > 27m^2$, also gewiss positiv ist. Da nun der Zähler des Bruches positiv sein muss, so muss es auch der Nenner sein; also auch $\frac{2m}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}}$ positiv. Das Product der drei reellen Wurzeln ist also negativ. Da ferner ihre Summe gleich Null sein soll, so können nicht alle 3 Wurzeln negativ sein, sondern nur eine: $-r_3$, und die beiden andern r_1 und r_2 müssen positiv sein. Aus demselben Grunde ist dem absoluten Werte nach die negative Wurzel die grösste.

2) $D_1 = 0$; dieser Fall ist ein specieller des ersten Falles. Ist dann:

α) $\frac{3r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}} \gtrless 0$, so sind zwei Wurzeln, also die beiden positiven, r_1 und r_2 gleich, während die dritte negativ und dem absoluten Werte nach doppelt so gross als eine positive Wurzel ist, wie aus Fall I. 1) und der Summe der Wurzeln folgt. Wäre aber:

β) $\frac{3r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}} = 0$, so hätten wir drei gleiche reelle Wurzeln. Dieser Fall aber kann nur eintreten, wenn $r_0 = 0$; $v_0 = 0$; $\alpha_0 = 0$ oder π.

3) $D_1 < 0$; in diesem Falle sind also zwei Wurzeln imaginär: r_2 und r_3, während die dritte r_1 reell ist. Aus $D_1 < 0$ folgt nun $\frac{r_0^6 v_0^6 \sin^6\alpha_0}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}} < 27m^2$; folglich kann der Bruch sowohl negativ wie positiv bis zur Grenze $27m^2$ hinauf sein, d. h. $v_0^2 - 2mr_0^{-3}$ kann positiv oder negativ sein. Ist

α) $v_0^2 - 2mr_0^{-3} > 0$ d. h. $v_0^2 > \frac{2k}{3r_0^3}$, so ist auch $\frac{2m}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}} > 0$; mithin ist das Product der drei Wurzeln negativ. Da nun das Product der beiden conjugirten complexen Wurzeln als Summe zweier Quadrate positiv ist, so muss die reelle Wurzel negativ sein, und zwar sei sie gleich $-r_1$. Ist aber

β) $v_0^2 - 2mr_0^{-3} < 0$ d. h. $v_0^2 < \frac{2k}{3r_0^3}$, so muss, wie aus der vorigen Betrachtung erhellt, die reelle Wurzel positiv sein, und sie sei in diesem Falle gleich r_1 gesetzt. Für den Uebergangsfall, wo also:

γ) $v_0^2 - 2mr_0^{-3} = 0$ d. h. $v_0^2 = \frac{2k}{3r_0^3}$ wird, verschwindet unter der Wurzel das Glied mit r^4, weil eben sein Coefficient b gleich Null wird. Dies deutet an, dass zwei Wurzeln der Gleichung unendlich werden, also müssen es die beiden imaginären sein. R ist dann in Bezug auf r nur noch vom zweiten Grade, das Integral ist also kein elliptisches mehr.

II.

$k < 0$; d. h. $m < 0$.

m ist jetzt negativ, und sei gleich $-m_1$ gesetzt, wo $m_1 > 0$ ist; ferner wird $D_1 = -27m_1^2 + \frac{r_0^6 v_0^6 \sin\alpha_0^6}{v_0^2 + 2m_1 r_0^{-3}}$. Dann ist:

4) $D_1 > 0$; Da jetzt das Product der drei reellen Wurzeln $+\frac{2m_1}{v_0^2 + 2m_1 r_0^{-3}}$, also positiv ist, und ihre Summe gleich Null sein soll, so können nicht alle drei Wurzeln positiv sein, sondern es kann nur eine positive sein: r_3, und die beiden andern, $-r_1$ und $-r_2$, müssen negativ sein. Aus demselben Grunde muss von den drei Wurzeln dem absoluten Werte nach r_3 die grösste sein.

5) $D_1 = 0$; ist ein specieller Fall des vierten, und es ist hier dasselbe zu sagen, wie bei Fall 2). Ist dann:

α) $\frac{3r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0}{v_0^2 + 2m_1 r_0^{-3}} \gtrless 0$, so sind die negativen Wurzeln $-r_2$ und $-r_1$ gleich, während r_3 doppelt so gross ist, als der absolute Wert einer negativen Wurzel. Für

β) $\frac{3r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0}{v_0^2 + 2m_1 r_0^{-3}} = 0$ gilt dasselbe, was bei Fall 2) gesagt ist.

6) $D_1 < 0$; Dann sind also wieder zwei Wurzeln imaginär, und die reelle Wurzel r_3 ist posisiv, weil das Product aller positiv ist.

Sind also für r_0, v_0, und α_0 bestimmte Werte gegeben, und wir denken uns k also auch m veränderlich, von $-\infty$ bis $+\infty$ alle Werte annehmend, so verteilen sich die verschiedenen Fälle folgendermassen:

Wächst k von $-\infty$ bis zu dem negativen Wert, für welchen die Gleichung:

$$k^2(3v_0^2-2kr_0^{-3})=r_0^6v_0^6\sin^6\alpha_0$$

erfüllt wird, so hat Fall 6) statt. Für diesen Grenzwert von k aber, der obiger Gleichung genügt, tritt Fall 5) ein. In dem Intervall von diesem Wert bis 0 findet dann Fall 4) statt. Wird $k=0$, so bewegt sich der Punkt M natürlich geradlinig mit der constanten Anfangsgeschwindigkeit v_0 in der erhaltenen Anfangsrichtung weiter. In dem Intervall von 0 bis zu dem positiven Wert, für welchen die Gleichung:

$$k^2.(3v_0^2-2kr_0^{-3})=r_0^6v_0^6\sin^6\alpha_0$$

erfüllt wird, findet Fall 1) statt. Für diesen Grenzwert aber ist es Fall 2) α). Von diesem Werte für k bis $k=\frac{3v_0^2r_0^3}{2}$ bis $k=+\infty$ findet Fall 3) β) statt.

Wenn im Laufe der Bewegung r den Wert 0 durchläuft, so werden unsere Bewegungsgleichungen 1) und 2) discontinuirlich, und verlieren daher für die Bewegung ihre Giltigkeit. Die Curven, welche wir dann aus den Gleichungen erhalten, geben also nicht mehr die Bahn des bewegten Punktes an, sondern sind nur rein geometrische Gebilde, die dem analytischen Ausdruck als solchem entsprechen und daher nach dieser Seite hin ihre Berechtigung haben. Wir wollen also die resultirenden Curven aus diesem Grunde bei Behandlung der einzelnen Fälle in ihrer ganzen Vollständigkeit bestimmen, indem wir vorläufig von ihrer Giltigkeit für die Bewegung absehen.

Es fragt sich nun zunächst, wie sich der Punkt M bewegen wird, wenn r den Wert 0 annimmt. Es ist

$$v^2=v_0^2+2m(r^{-3}-r_0^{-3});$$

für $r=0$ wird also $v^2=\infty^3$. Für diesen Punkt ist aber die bewegende Kraft gleich ∞^4, sie überwiegt also die unendlich grosse Geschwindigkeit um ∞. Der Punkt M wird also bei Anziehung in dem Kraftcentrum 0 festgehalten werden. Findet Abstossung statt, d. h. ist k also auch m negativ, so wird $v^2=-\infty$; folglich ist v imaginär d. h. der sich bewegende Punkt M kann überhaupt nicht in das Kraftcentrum 0 gelangen, r also auch nicht gleich Null werden. Nimmt aber r die Werte $\pm\infty$ an, indem es aus den positiven Werten in die negativen übergeht, so werden hier die resultirenden Curven selbst discontinuirlich, können also nicht mehr für die Bewegung des Punktes M gelten. Auch in diesem Falle werden unsere Bewegungsgleichungen ungiltig, weil die im Sinne des Radius wirkende Kraft

bei negativen Werten von r nicht mehr $-\frac{k}{r^4}$ sondern $+\frac{k}{r^4}$ ist. Ist also der Punkt M im ∞, d. h. ist $r=\infty$, so geht er dann, wie wir aus der Gleichung $v^2 = v_0^2 - 2m r_0^{-3}$ ersehen, mit constanter Geschwindigkeit in $+\infty$ weiter, die bei positiven Werten von k kleiner, bei negativen aber grösser als die Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist. Die Bewegung ist also dann eine geradlinige und gleichförmige. Diese Bewegung wird natürlich auch stattfinden, wenn $r_0 = \infty$ ist; denn dann ist die Centralkraft gleich Null, also ist die Bewegung des Punktes M nur bestimmt durch v_0.

Die Curven, welche dem analytischen Ausdruck entsprechen, wenn r negative Werte annimmt, haben zwar mit der in dem betreffenden Falle stattfindenden Bewegung nichts mehr zu tun, sind jedoch auch nicht ohne Bedeutung für unsere Aufgabe. Ihren Sinn giebt uns der Grund der Ungiltigkeit unserer Bewegungsgleichungen von selbst an; denn derselbe wird hinfällig, wenn mit r zugleich auch k sein Vorzeichen ändert. Denken wir uns nämlich von da ab, wo r aus $+\infty$ in $-\infty$ übergeht, nicht mehr k sondern $-k$ wirken, so haben unsere Bewegungsgleichungen wieder volle Giltigkeit. D. h. also diese Curven geben uns diejenigen Bahnen, welche der Punkt M bei sonst gleichen Bedingungen aber entgegengesetzt wirkender Centralkraft beschreiben würde. Die negativen Curven des einen Falles werden daher zu positiven in dem entgegengesetzten Falle, wo dieselben Verhältnisse gelten und nur k den entgegengesetzten Wert hat. Entsprechende Fälle sind demnach, wie aus der obigen Zusammenstellung folgt:

Fall 1) und 4)
Fall 2) und 5)
Fall 3) und 6).

Wir haben also nur nötig, die Fälle für positive Werte von k auszuführen, um auch zugleich die Bahnen zu finden, die der Punkt M bei negativem Werte von k beschreibt.

Wir kehren nun zurück zur Betrachtung des elliptischen Differentials aus Gleichung 14):

$$d\varphi = \frac{c\,dr}{\sqrt{br^4 - c^2r^2 + 2mr}}.$$

Je nachdem r mit wachsendem φ zunimmt oder abnimmt, ist hier das positive oder negative Vorzeichen der Wurzel zu nehmen. Ferner folgt daraus:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{c}\sqrt{br^4 - c^2r^2 + 2mr}.$$

Dieser erste Differentialquotient, gleich Null gesetzt, zeigt uns die Maxima und Minima der Function r an. Die rechte Seite wird aber gleich Null für die oben untersuchten Wurzelwerte von r, welche also, wenn sie reellen Werten von φ entsprechen, die Maxima und Minima von r darstellen. Für diese Werte steht dann die Tangente der Curve in diesen Punkten senkrecht auf dem Radius. Wenn also r_0 einer der Maximal- resp. Minimal-Werte sein soll, so muss $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$ sein.

Nennen wir nun den Winkel, welchen die Tangente im Punkte (x, y) der Curve mit der positiven X Axe bildet, α; so ist der Winkel, welchen die Tangente mit dem Radius nach dem Berührungspunkt gezogen bildet, gleich $\alpha - \varphi$. Dann ist:

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg}(\alpha-\varphi) &= \frac{dr}{r\,d\varphi}\\ &= \frac{1}{cr}\sqrt{br^4 - c^2r^2 + 2mr}\\ &= \frac{1}{c}\sqrt{br^2 - c^2 + \frac{2m}{r}}.\end{aligned}$$

Für den Wert $r = 0$ wird die rechte Seite unendlich, also ist $\alpha - \varphi = 0$; d. h. wenn die Curve durch das Kraftcentrum 0 geht, so fällt in diesem Punkte die Richtung der Tangente mit der des Radius zusammen. Dies hätte des Beweises eigentlich gar nicht bedurft; denn der Radius in diesem Punkte ist ja die Verbindung zweier unendlich nahen Punkte der Curve, und dasselbe ist die Tangente darüber hinaus verlängert. Wird aber $r = \infty$, so ist $\operatorname{cotg}(\alpha - \varphi)$ ebenfalls $= \infty$, und $\alpha - \varphi = 0$. Daraus ersehen wir also, dass wenn die Curve in's Unendliche geht, die Tangente an den unendlich entfernten Punkt d. i. die Asymptote der Curve dieselbe Richtung hat, wie der nach diesem Punkte gehende Radius, oder dass die unendlich grossen Radien Asymptoten der Curve sind. Wird r gleich einem der Wurzelwerte von $R = 0$, so wird $\operatorname{cotg}(\alpha - \varphi) = 0$, also $\alpha - \varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3\pi}{2}$, wie wir schon bemerkt haben.

Ehe wir für die verschiedenen Fälle, welche wir in Betreff der Gestaltung der Wurzelwerte von $R = 0$ festgestellt haben, die Bahncurven untersuchen, wollen wir ermitteln, wie sich der Punkt bewegt, wenn die gegebenen Grössen ihre Grenzwerte annehmen. Die Fälle, in denen $k = 0$, $r_0 = 0$ und $r_0 = \infty$ ist, sind bereits in Betracht gezogen, und es leuchtet ein, dass dies bei $k = \infty$ und bei $v_0 = \infty$ nicht

nötig ist; denn in diesen Fällen würde die Bewegung nur von k resp. von v_0 abhängen, also geradlinig sein. Die Grösse α_0 geht nicht selbst in die Gleichungen ein, sondern $\sin\alpha_0$, welche Function nur zwischen -1 und $+1$ liegen kann. Es ist also hier nur in Betracht zu ziehen der Wert $\sin\alpha_0 = 0$ d. h. $\alpha_0 = 0$ oder π. In diesem Falle ist nach den Gleichungen 5) und 14) $d\varphi = 0$, also φ constant, der Punkt M bewegt sich daher in einer geraden Linie, nämlich in der Richtung von r_0, mit der dann die Richtung des Impulses zusammenfällt. Nach Formel 12) ist:

$$v^2 = v_0^2 + 2m(r^{-3} - r_0^{-3}).$$

Es fragt sich nun, ob v für einen Wert von r gleich Null wird; dazu setzen wir:

$$v_0^2 + 2m(r^{-3} - r_0^{-3}) = 0;$$

also:

$$r^3 = \frac{2m}{2m r_0^{-3} - v_0^2}.$$

Dieser reinen cubischen Gleichung entspricht nur ein reeller Wert r_1 und zwei imaginäre r_2 und r_3; also kann v nur für einen Wert von r gleich Null werden.

Bei der geradlinigen Bewegung ist nun

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

also:

$$\frac{dr^2}{dt^2} = v_0^2 + 2m(r^{-3} - r_0^{-3}),$$

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 + 2m(r^{-3} - r_0^{-3})}}$$

$$= \frac{r^2\,dr}{\sqrt{v_0^2 r^4 + 2m r_0^{-3}.(r_0^3 - r^3).r}}$$

$$= \frac{r^2\,dr}{\sqrt{(v_0^2 - 2m r_0^{-3}) r^4 + 2mr}}$$

$$= \frac{r^2\,dr}{\sqrt{b.r.(r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)}}$$

Der Radicand wird hier gleich Null für $r = 0$ und für die Wurzelwerte der oben angeführten reinen cubischen Gleichung. Ist nun bei positivem k der Nenner $2m r_0^{-3} - v_0^2$ des Bruches für r^3 negativ, also b positiv, d. h. $v_0^2 > \frac{2k}{3r_0^3}$, so wird r_1 negativ, und die Quadratwurzel wird in dem Intervall 0 bis r_1 imaginär, also auch t imaginär,

d. h. es giebt keinen Zeitpunkt, also auch keinen reellen Wert für r_1 bei welchem $v = 0$ wird. In diesem Falle wird also bei $\alpha_0 = 0$ die Anfangsgeschwindigkeit v_0 die Anziehung überwinden, und der Punkt geht mit verzögerter Geschwindigkeit in's Unendliche, wo $v^2 = v_0^2 - 2mr^{-3}$, also die Geschwindigkeit constant und kleiner als die Anfangsgeschwindigkeit ist. Bei $\alpha_0 = \pi$ aber nähert sich der Punkt M dem Kraftcentrum 0 mit beschleunigter Geschwindigkeit, bis er mit ihm zusammenfällt und von ihm festgehalten wird.

Ist $v_0^2 = \frac{2k}{3r_0^3}$ also $r_1 = \infty$, so wird der Punkt M bei $\alpha_0 = 0$ erst im Unendlichen die Geschwindigkeit Null erhalten, während er bei $\alpha_0 = \pi$, wie vorher, nach 0 ginge.

Ist aber b negativ, also $v_0^2 < \frac{2k}{3r_0^3}$, so wird r_1 positiv und der Radicand ist dann gleich $-b.r.(r_1 - r).(r - r_2).(r - r_3)$. Die Quadratwurzel ist also in dem Intervall 0 bis r_1 reell; folglich ist auch t reell, d. h. in diesem Intervall giebt es einen reellen Wert für r, bei welchem $v = 0$ wird, nämlich r_1. Wird der Punkt M angezogen, so wird er also bei $\alpha_0 = 0$ von der Anfangslage $r = r_0$ bis zu dem Punkte gehen, der von 0 um r_1 entfernt ist; hier wird seine Geschwindigkeit gleich Null und nun kehrt er wieder zurück mit beschleunigter Geschwindigkeit, hat bei der Entfernung r_0 wieder die Geschwindigkeit v_0 und geht dann schliesslich nach 0. Bei $\alpha_0 = \pi$ bewegt sich der Punkt M gleich nach dem Kraftcentrum 0, kann also den Punkt, wo $v = 0$ wird, und der jenseits 0 liegt, nicht erreichen. Würde der Punkt M in 0 nicht festgehalten, so würde er, nachdem er durch 0 hindurchgegangen, im ersten Falle mit verzögerter Geschwindigkeit bis in's Unendliche gehen, wo er dieselbe constante Geschwindigkeit hat, wie bei $\alpha_0 = 0$. Da wo $r = r_0$ wird, ist v wieder gleich v_0, wie auch bei den andern Fällen.

Im zweiten Falle verliefe die Bewegung ebenso, nur dass im Unendlichen wieder v gleich Null wird. Im letzten Falle würde sich aber der Punkt M mit verzögerter Geschwindigkeit nur um r_1 von 0 entfernen; bei $r = r_1$ die Geschwindigkeit Null erhalten, und dann wieder zurückkehren. Diese Bewegung würde sich fortwährend wiederholen; der Punkt M würde also hin und her pendeln, indem er sich von 0 immer um r_1 entfernte. Die Bewegung für negative Werte von k, also im Falle der Abstossung, ist, wie wir gesehen haben, in Obigem durch den negativen Wert von r, für welchen v gleich Null werden soll, mit enthalten. Der abgestossene Punkt M wird sich also von seiner Anfangslage, wenn $\alpha_0 = \pi$ ist, dem Kraftcentrum 0 mit verzögerter Geschwindigkeit bis auf die Entfernung $r = r_1$ nähern,

woselbst seine Geschwindigkeit v gleich Null wird. Dann geht er wieder zurück, hat bei $r = r_0$ wieder die Geschwindigkeit v_0 und geht mit beschleunigter Geschwindigkeit bis in's Unendliche, wo jetzt $v^2 = v_0^2 + 2mr_0^{-3}$, also die Geschwindigkeit constant und grösser als v_0 ist. Ist aber $\alpha_0 = 0$, so verläuft die Bewegung ebenso, wie im andern Falle, nachdem r wieder den Wert r_0 erhalten hat, also gleich in's Unendliche.

Endlich kann noch $v_0 = 0$ sein, dann ist, da bei Beginn der Bewegung auf Punkt M keine Kraft eingewirkt hat, auch $\sin\alpha_0 = 0$ zu setzen. Dieser Fall ist also ein specieller des vorigen, und die obige reine cubische Gleichung, für deren Wurzeln v gleich Null wird, geht dann über in $r^3 = r_0^3$, es ist also $r_1 = r_0$. Die Bewegung des Punktes M ist also dann wie oben angegeben. Bei positivem k nähert sich der Punkt M dem Kraftcentrum 0 mit beschleunigter Geschwindigkeit wie oben, wenn $v_0^2 < \frac{2k}{3r_0^3}$ und $\alpha_0 = 0$ ist, nachdem r den Wert r_1 erhalten hat. Was oben von einer eventuell pendelnden Bewegung gesagt wurde, würde auch hier stattfinden. Bei negativem k entfernt sich der Punkt M von dem Kraftcentrum 0 mit beschleunigter Geschwindigkeit wie oben bei $\alpha_0 = \pi$, nachdem r den Wert r_1 erhalten hat.

Hat aber der Punkt M eine Geschwindigkeit erhalten, die in ihrer Richtung von der durch die Punkte 0 und M bestimmten Linie abweicht, und haben die gegebenen Grössen nicht jene Grenzwerte, so müssen wir die oben unterschiedenen Fälle untersuchen.

Im ersten Falle waren alle Wurzeln reell, eine negativ: $-r_3$, und von den beiden positiven sei $r_1 < r_2$. Nach Gleichung 14) ist dann:

$$d\varphi = \frac{c\,.dr}{\sqrt{b r^4 - c^2 r^2 + 2mr}} = \frac{c\,.dr}{\sqrt{b\,.r\,.(r-r_1)(r-r_2)(r+r_3)}},$$

folglich:

$$\varphi = \frac{c}{\sqrt{b}} \cdot \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{r\,.(r-r_1)\,(r-r_2)\,(r+r_3)}}.$$

Damit nun φ nicht imaginär werde, muss sich r bewegen in den Grenzen 0 bis r_1, oder r_2 bis $-r_3$ durch $\pm\infty$ hindurch. Im ersten Intervall ist also 0 ein Minimum und r_1 ein Maximum von r, ausserdem aber giebt es keine andere. Die Curve liegt also ganz innerhalb des mit r_1 um 0 beschriebenen Kreises, den sie stets, wenn

$r = r_1$ wird, berührt, der also die Einhüllende der Bahn ist. Ferner geht sie stets von dem einen Maximum des Radius r zum folgenden durch 0 hindurch, hat also in 0 einen unendlichen Doppelpunkt und ist eine continuirliche Curve.

Um nun das elliptische Differential auf die Normalform bringen zu können, benutzen wir für dieses Intervall die Substitution:

(S. Schellbach Theta-Functionen S. 270)

$$r = \frac{r_1 r_3 \sin^2\vartheta}{r_1 + r_3 - r_1 \sin^2\vartheta} = \frac{r_1 . r_3 \sin^2\vartheta}{r_3 + r_1 . \cos^2\vartheta},$$

und wenn r stetig wachsend von 0 zu r_1 übergeht, wächst ϑ ebenfalls stetig von 0 bis $\frac{\pi}{2}$. Dann ist:

$$dr = \frac{2r_1 r_3 \sin\vartheta \cos\vartheta . (r_3 + r_1 \cos^2\vartheta) + 2r_1^2 r_3 \sin^3\vartheta \cos\vartheta}{(r_3 + r_1 \cos^2\vartheta)^2} . d\vartheta$$

$$= \frac{2r_1 r_3 (r_1 + r_3) \sin\vartheta . \cos\vartheta . d\vartheta}{(r_3 + r_1 \cos^2\vartheta)^2}$$

$$r - r_1 = \frac{r_1 r_3 \sin^2\vartheta - r_1 r_3 - r_1^2 \cos^2\vartheta}{r_3 + r_1 \cos^2\vartheta}$$

Nach der Voraussetzung ist $r_1 < r_2$ also $r_1 r_3 < r_2 r_3$ und $r_1(r_2+r_3) < r_2.(r_1+r_3)$; der Coefficient von $\sin^2\vartheta$ ist also ein positiver echter Bruch, den wir gleich k^2 setzen wollen. Ferner setze:

$$\frac{2c}{\sqrt{br_2(r_1+r_3)}} = \frac{1}{a},$$

dann ist:

$$d\varphi = \frac{1}{a}.\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}};$$

folglich:

$$\varphi = \frac{1}{a}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}$$

$$= \frac{1}{a}.\int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} - \frac{1}{a}\int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}$$

Setzen wir das letzte Integral, welches constant ist und dem Integral $\int_0^{r_0} \frac{cdr}{\sqrt{R}}$ entspricht, gleich φ_0, nehmen also als Polaraxe die Richtung des Radius $r = 0$ an, so ist:

$$a.(\varphi+\varphi_0) = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta}$$

also:

$$\vartheta = am.a(\varphi+\varphi_0)$$

und:

$$= \frac{r_1 r_3 \sin^2 am.a(\varphi+\varphi_0)}{r_3+r_1\cos^2.am.a(\varphi+\varphi_0)}.$$

Die Periode von $a(\varphi+\varphi_0)$ ist nun $4K$, wo

$$K = \frac{\pi}{2}.\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \ldots\ldots\right\};$$

r aber erhält wegen des Quadrates von sin und cos schon bei der Periode $2K$ denselben Wert, also ist, wenn wir den Winkel, um welchen φ wachsen muss, damit r wieder denselben Wert bekomme, oder der zwischen 2 aufeinander folgenden Maxima liegt, mit Φ bezeichnen:

$$a(\varphi+\varphi_0)+2K = a(\varphi+\varphi_0+\Phi)$$

also:

$$\Phi = \frac{2K}{a},$$

woraus sich Φ nach den gegebenen Constanten bestimmen lässt. Von

einem Maximum bis zum darauf folgenden Minimum muss also r den Winkel $\frac{1}{2}\Phi = \frac{K}{a}$ beschreiben, denn der Zunahme von $\vartheta = 0$ um $\frac{\pi}{2}$ entspricht die von φ um K. Je nachdem nun 2π grösser oder kleiner als Φ ist, wird die Lage des zweiten Maximums von r im Vergleich zu der des ersten zurückbleiben oder vorrücken.

Die Gestalt der Curve würde also z. B. für gewisse Anfangswerte so beschaffen sein können, wie es dargestellt ist in Fig. I.

Nach Gleichung 13) haben wir:

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{c}$$

und wenn für r und $d\varphi$ ihre Werte eingesetzt werden, so kommt:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{ac} \cdot \frac{r_1^2 r_3^2 \sin^4\vartheta}{(r_3 + r_1 \cos^2\vartheta)^2} \cdot \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\vartheta}} \\ &= \frac{r_1^2 r_3^2}{a \cdot c} \cdot \frac{\sin^4\vartheta}{(r_1 + r_3 - r_1 \sin^2\vartheta)^2} \cdot \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta}. \end{aligned}$$

Um dieses elliptische Differential auf die drei Normalformen zurückführen zu können, setzen wir

$$\frac{r_1^2 \sin^4\vartheta}{(r_1+r_3-r_1\sin^2\vartheta)^2} = \frac{(r_1+r_3)^2}{(r_1+r_3-r_1\sin^2\vartheta)^2} - \frac{2(r_1+r_3)}{r_1+r_3-r_1\sin^2\vartheta} + 1.$$

Aus obiger Differentialgleichung für dt folgt nun:

$$t = \frac{r_1^2 r_3^2}{a.c} \int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{\sin^4\vartheta\, d\vartheta}{(r_1+r_3-r_1\sin^2\vartheta)^2 \varDelta\vartheta}$$

$$= \frac{r_1^2 r_3^2}{a.c} \int\limits_{0}^{\vartheta} \frac{\sin^4\vartheta\, d\vartheta}{(r_1+r_3-r_1\sin^2\vartheta)^2 \varDelta\vartheta}$$

$$- \frac{r_1^2 r_3^2}{a.c} \int\limits_{0}^{\vartheta_0} \frac{\sin^4\vartheta\, d\vartheta}{(r_1+r_3-r_1\sin^2\vartheta)^2 \varDelta\vartheta}.$$

Setzen wir hier wieder das zweite Integral, welches constant ist und dem Integral $\int\limits_0^{r_0} \frac{r^2\, dr}{\sqrt{R}}$ entspricht, gleich t_0, so kommt:

$$t + t_0 = \frac{r_1^2 r_3^2}{a.c} \cdot \int\limits_0^{\vartheta} \frac{\sin^4\vartheta\, d\vartheta}{(r_1+r_3-r_1\sin^2\vartheta)^2 \varDelta\vartheta},$$

und nach Einsetzung der obigen Werte:

$$t + t_0 = \frac{r_3^2}{a.c} \int\limits_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\varDelta\vartheta} \left\{ \frac{(r_1+r_3)^2}{(r_1+r_3-r_1\sin^2\vartheta)^2} - \frac{2(r_1+r_3)}{r_1+r_3-r_1\sin^2\vartheta} + 1 \right\}$$

Dividiren wir nun die Zähler und Nenner der beiden Brüche mit $(r_1+r_3)^2$ resp. mit (r_1+r_3) und setzen dann $-\frac{r_1}{r_1+r_3} = \lambda$, so kommt:

$$t + t_0 = \frac{r_3^2}{a.c} \left\{ \int\limits_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1+\lambda\sin^2\vartheta)^2 \varDelta\vartheta} \right.$$

$$\left. - 2\int\limits_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1+\lambda\sin^2\vartheta)\varDelta\vartheta} + \int\limits_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\varDelta\vartheta} \right\}$$

Das erste Integral ist zu zerlegen (s. Schlömilch Comp. T. II. p. 293) in:

$$\int\limits_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1+\lambda\sin^2\vartheta)^2 \varDelta\vartheta} = \frac{\sin\vartheta . \cos\vartheta \varDelta\vartheta}{\gamma_0 . (1+\lambda\sin^2\vartheta)} - \int\limits_0^{\vartheta} \frac{\gamma_1\, d\vartheta}{\gamma_0 (1+\lambda\sin^2\vartheta)\varDelta\vartheta}$$

$$- \int\limits_0^{\vartheta} \frac{\gamma_2\, d\vartheta}{\gamma_0 \varDelta\vartheta} - \int\limits_0^{\vartheta} \frac{\gamma_3 (1+\lambda\sin^2\vartheta)\, d\vartheta}{\gamma_0 \varDelta\vartheta},$$

wo die γ Constanten sind, und zwar:

$$\gamma_0 = 2 . \left(1 + \frac{1+k^2}{\lambda} + \frac{k^2}{\lambda^2}\right)$$

$$\gamma_1 = - \left(1 + 2 \frac{1+k^2}{\lambda} + 3 . \frac{k^2}{\lambda^2}\right)$$

$$\gamma_2 = 0$$

$$\gamma_3 = \frac{k^2}{\lambda^2}$$

Das letzte Integral lässt sich ferner zerlegen:

$$\int_0^\vartheta \frac{\gamma_3 (1+\lambda \sin^2\vartheta)\, d\vartheta}{\gamma_0 \varDelta\vartheta} = \frac{\gamma_3}{\gamma_0} . \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\varDelta\vartheta} + \frac{\lambda\gamma_3}{\gamma_0} . \int_0^\vartheta \frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{\varDelta\vartheta}$$

$$= \frac{\gamma_3(k^2+\lambda)}{\gamma_0 k^2} . \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\varDelta\vartheta} - \frac{\lambda\gamma_3}{\gamma_0 k^2} . \int_0^\vartheta \varDelta\vartheta\, d\vartheta$$

Alle diese Werte eingesetzt, giebt:

$$t + t_0 = \frac{r_3^2}{a . c \gamma_0} . \frac{\sin\vartheta . \cos\vartheta . \varDelta\vartheta}{1+\lambda\sin^2\vartheta}$$

$$\frac{r_3^2(2\gamma_0+\gamma_1)}{} \int^\vartheta \frac{d\vartheta}{}$$

Demnach ist:

$$t+t_0 = D\frac{\sin am\, a(\varphi+\varphi_0)\cos am\, a(\varphi+\varphi_0)\Delta am\, a(\varphi+\varphi_0)}{1+\lambda\sin^2 am\, a(\varphi+\varphi_0)}$$

$$+E.a\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{1+\lambda\sin^2 am\, a(\varphi+\varphi_0)}$$

$$+F.a\int_0^\varphi \Delta^2 am\, a(\varphi+\varphi_0)d\varphi + G.a(\varphi+\varphi_0).$$

Setzen wir das erste Glied der rechten Seite zur Abkürzung gleich $f(\varphi)$, und λ, d. i. $-\frac{r_1}{r_2+r_3} = -k^2\sin^2 am\,\varepsilon$, also $\sin^2 am\,\varepsilon = \frac{r_2}{r_2+r_3}$. wenn für k^2 sein Wert: $\frac{r_1(r_2+r_3)}{r_2(r_1+r_3)}$ eingesetzt wird, so ist $\frac{r_2}{r_2+r_3}$ ein positiver echter Bruch, mithin hat die Constante ε einen reellen Wert.

Dann ist (s. Schlömilch Comp. II.; ellipt. Funct. 11. Abschnitt):

$$t+t_0 = f(\varphi)+Ea(\varphi+\varphi_0)+E\frac{\operatorname{tg} am\,\varepsilon}{\Delta am\,\varepsilon}\left\{\frac{a(\varphi+\varphi_0)\Theta_1(\varepsilon)}{\Theta(\varepsilon)}\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{2}l\frac{\Theta[a(\varphi+\varphi_0)-\varepsilon]}{\Theta[a(\varphi+\varphi_0)+\varepsilon]}\right\}$$

$$+Fa(\varphi+\varphi_0)\frac{E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)}{K}+F\frac{\Theta_1[a(\varphi+\varphi_0)]}{\Theta[a(\varphi+\varphi_0)]}+Ga(\varphi+\varphi_0).$$

Der nicht periodische Teil der rechten Seite ist:

$$a(\varphi+\varphi_0)\left\{E+E\frac{\operatorname{tg} am\,\varepsilon\,\Theta_1(\varepsilon)}{\Delta am\,\varepsilon\,\Theta(\varepsilon)}+F\frac{E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)}{K}+G\right\},$$

der periodische:

$$f(\varphi)+\tfrac{1}{2}E\frac{\operatorname{tg} am\,\varepsilon}{\Delta am\,\varepsilon}\,l\frac{\Theta[a(\varphi+\varphi_0)-\varepsilon]}{\Theta[a(\varphi+\varphi_0)+\varepsilon]}+F\frac{\Theta_1[a(\varphi+\varphi_0)]}{\Theta[a(\varphi+\varphi_0)]}.$$

Wenn nun φ um Φ wächst, dann wird der periodische Teil wieder denselben Wert erhalten, oder wenn $\varphi+\varphi_0=\frac{n}{2}\Phi$ ist, und nun um $\frac{1}{2}\Phi$ wächst, dann wird er gleich Null werden; denn für den letzteren Fall ist entweder $\sin am\, a(\varphi+\varphi_0)$ oder $\cos am\, a(\varphi+\varphi_0)$ gleich Null, also immer $f(\varphi)$ gleich Null. Ferner ist:

$$\frac{\Theta[a(\varphi+\varphi_0)-\varepsilon]}{\Theta[a(\varphi+\varphi_0)+\varepsilon]}=\frac{\vartheta\left(\frac{a(\varphi+\varphi_0)\pi}{2K}-\frac{\varepsilon\pi}{2K}\right)}{\vartheta\left(\frac{a(\varphi+\varphi_0)\pi}{2K}+\frac{\varepsilon\pi}{2K}\right)}$$

$$=\frac{1-2q\cos 2(v-\beta)+2q^4\cos 4(v-\beta)-\dots}{1-2q\cos 2(v+\beta)+2q^4\cos 4(v+\beta)-\dots}$$

$$=\frac{1-2q\cos 2v\cos 2\beta+2q^4\cos 4v\cos 4\beta-\dots-2q\sin 2v\sin 2\beta+\dots}{1-2q\cos 2v\cos 2\beta+2q^4\cos 4v\cos 4\beta-\dots+2q\sin 2v\sin 2\beta-\dots}$$

wo $\frac{a(\varphi+\varphi_0)\pi}{2K}=v$ und $\frac{\varepsilon\pi}{2K}=\beta$ gesetzt ist. Dieser Bruch wird immer gleich 1 für $v=\frac{n\pi}{2}$, also sein Logarithmus gleich Null; d. h. für $\frac{a(\varphi+\varphi_0)\pi}{2K}=\frac{n\pi}{2}$ oder $\varphi+\varphi_0=\frac{nK}{a}$, und nun war $\Phi=\frac{2K}{a}$, also für $\varphi+\varphi_0=\frac{n}{2}\Phi$ wird auch das zweite Glied des periodischen Teils gleich Null. Endlich ist:

$$\Theta(a(\varphi+\varphi_0))=\vartheta\left(\frac{a(\varphi+\varphi_0)\pi}{2K}\right)=1-2q\cos 2v+2q^4\cos 4v-\dots$$

also: $\Theta_1[a(\varphi+\varphi_0)]=4q\sin 2v-8q^4\sin 4v+\dots$ Dies wird auch für $v=\frac{n\pi}{2}$ gleich Null, folglich wird auch das dritte Glied für $\varphi+\varphi_0=\frac{n}{2}\Phi$ gleich Null. Ist aber $\varphi+\varphi_0 \gtrless \frac{n}{2}\Phi$ und φ nimmt um Φ zu, so erhält $f(\varphi)$ wieder denselben Wert wegen des Productes von $\sin am\, a(\varphi+\varphi_0)$ und $\cos am\, a(\varphi+\varphi_0)$ und wegen des Quadrates im Nenner. Beim zweiten und dritten Gliede stehen, wie wir sehen, in den Entwicklungen immer Vielfache des doppelten Arguments, und da der Zunahme von φ um Φ die von $a(\varphi+\varphi_0)$ um $2K$ entspricht, so ist hier der Zuwachs immer ein Vielfaches von $4K$, also erhalten sin und cos wieder dieselben Werte, also auch die ganzen Glieder. t nimmt dann stets um einen bestimmten Wert zu; nennen wir ihn T, so ist:

$$T=a\Phi\left\{E+E\frac{\operatorname{tg} am\,\varepsilon\,\Theta_1(\varepsilon)}{\Delta\, am\,\varepsilon\,\Theta(\varepsilon)}+F\frac{E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)}{K}+G\right\}.$$

Um diesen Wert nimmt t stets zu, wenn φ um Φ wächst d. h. wenn der Punkt M von einem Maximum zum folgenden geht, oder überhaupt von einem beliebigen Curvenpunkt bis zu demjenigen, der von dem Kraftcentrum O gleichweit entfernt ist, und in welchem der Punkt M in Bezug auf O dieselbe Bewegungsrichtung haben würde.

Um $\frac{T}{2}$ wird t zunehmen, wenn $\varphi+\varphi_0=\frac{n}{2}\Phi$ und φ um $\frac{1}{2}\Phi$ wächst, wenn also der Punkt M von einem Maximum bis zum benachbarten Minimum geht, und umgekehrt. Von der ganzen Curve wird aber der Punkt M nur einen Zweig, von einem Minimum bis zum nächsten, beschreiben können, und ein solcher allein stellt also für dieses Intervall die Bahn des Punktes M dar. Jeder Punkt eines solchen Zweiges kann Anfangspunkt der Bewegung sein mit Ausnahme des Kraftcentrums O, und Punkt M wird dann je nach der erhaltenen Richtung einen der beiden Bogen des Zweiges durchlaufen, bis er in dem Kraftcentrum O ankommt, und hier festgehalten wird.

Das zweite Intervall für r geht von r_2 durch $\pm\infty$ bis $-r_3$. Die Curve ist also discontinuirlich und geht unendlich oft durch $\pm\infty$; sie zerfällt somit in positive und negative Zweige, d. h. solche, zu denen positive resp. negative Radien gehören, und diese wiederholen sich, einer um den andern. In diesem Intervall sind zwei Minima, r_2 für den positiven Zweig und $-r_3$ für den negativen, der in Bezug auf positive Radien ein Maximum wäre; ausserdem aber giebt es keine andern. Mit ihren positiven Zweigen liegt sie ganz ausserhalb des mit r_2 um O beschriebenen Kreises, und mit ihren negativen Zweigen ganz ausserhalb des mit r_3 um O beschriebenen Kreises. Beide Kreise berührt sie stets, wenn $r=r_2$ resp. $=-r_3$ wird; dieser ist daher der Einhüllende der negativen Zweige, jener der der positiven. Wie wir oben gesehen haben, hat jeder Zweig 2 Asymptoten. Für dieses Intervall benutzen wir, um das elliptische Differential auf die Normalform bringen zu können, die Substitution (s. Schellbach, Theta-Funct. p. 270):

$$r=\frac{r_2(r_1+r_3)-r_1(r_2+r_3)\sin^2\vartheta}{r_1+r_3-(r_2+r_3)\sin^2\vartheta}.$$

Dabei geht, wenn r stetig zunimmt von $r=r_2$ bis $r=\pm\infty$ und weiter bis $r=-r_3$, ϑ stetig wachsend von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ über, und für $\sin^2\vartheta=\frac{r_1+r_3}{r_2+r_3}$ wird $r=\infty$, und da dies ein positiver echter Bruch ist, so hat auch ϑ einen reellen Wert, für den $r=\infty$ wird; dann erhalten wir für die andern Factoren:

$$r-r_1=\frac{r_2(r_1+r_3)-r_1(r_2+r_3)\sin^2\vartheta-r_1(r_1+r_3)+r_1(r_2+r_3)\sin^2\vartheta}{r_1+r_3-(r_2+r_3)\sin^2\vartheta}$$

$$=\frac{(r_2-r_1)(r_1+r_3)}{r_1+r_3-(r_2+r_3)\sin^2\vartheta};$$

$$r-r_2=\frac{r_2(r_1+r_3)-r_1(r_2+r_3)\sin^2\vartheta-r_2(r_1+r_3)+r_2(r_2+r_3)\sin^2\vartheta}{r_1+r_3-(r_2+r_3)\sin^2\vartheta}$$

$$=\frac{(r_2-r_1)(r_2+r_3)\sin^2\vartheta}{r_1+r_3-(r_2+r_3)\sin^2\vartheta};$$

$$r+r_3=\frac{r_2(r_1+r_3)-r_1(r_2+r_3)\sin^2\vartheta+r_3(r_1+r_3)-r_3(r_2+r_3)\sin^2\vartheta}{r_1+r_3-(r_2+r_2)\sin^2\vartheta}$$

$$=\frac{(r_1+r_3)(r_2+r_3)\cos^2\vartheta}{r_1+r_3-(r_2+r_3)\sin^2\vartheta};$$

$$dr=\left\{\frac{-r_1(r_2+r_3)[r_1+r_3-(r_2+r_3)\sin^2\vartheta]}{[r_1+r_3-(r_2+r_3)\sin^2\vartheta]^2}\right.$$
$$\left.+\frac{(r_2+r_3)[r_2(r_1+r_3)-r_1(r_2+r_3)\sin^2\vartheta]}{[r_1+r_3-(r_2+r_3)\sin^2\vartheta]^2}\right\}2\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta$$

$$=\frac{2(r_2-r_1)(r_1+r_3)(r_2+r_3)\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta}{[r_1+r_3-(r_2+r_3)\sin^2\vartheta]^2}.$$

Diese Werte in unsere Differentialgleichung eingesetzt, und gehoben, ergiebt:

$$d\varphi=\frac{2c}{\sqrt{b}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{r_2(r_1+r_3)-r_1(r_2+r_3)\sin^2\vartheta}},$$

und wenn wir hier dieselben Substitutionen machen, wie oben, so erhalten wir:

$$d\varphi=\frac{1}{a}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}.$$

Dies ist derselbe Ausdruck, wie im ersten Intervall, wir finden demnach ebenso:

$$\vartheta=am\,a(\varphi+\varphi_0);\quad \text{dann ist hier}$$

$$r=\frac{r_2(r_1+r_3)-r_1(r_2+r_3)\sin^2 am\,a(\varphi+\varphi_0)}{r_1+r_3-(r_2+r_3)\sin^2 am\,a(\varphi+\varphi_0)},\quad \text{und}$$

$$\Phi=\frac{2K}{a}.$$

r beschreibt also von der Minimallage r_2 bis zur folgenden Minimallage r_2 immer den Winkel Φ, und bis zu der zwischen beiden liegenden Minimallage $-r_3$ des negativen Zweiges den Winkel $\frac{1}{2}\Phi$. Ueberhaupt nimmt r jedesmal, wenn der Winkel Φ beschrieben ist, wieder denselben Wert an wegen $\sin^2 am\,a(\varphi+\varphi_0)$.

Die Gestalt der Curve für dieses Intervll würde also z. B. bei gewissen Anfangswerten so beschaffen sein können, wie es dargestellt ist in Figur II.

Zur Berechnung der Zeit setzen wir wieder in die Gleichung:

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{c}$$

die Werte für r und $d\varphi$ ein, so kommt:

$$dt = \frac{1}{ac} \frac{\{r_2(r_1+r_3) - r_1(r_2+r_3)\sin^2\vartheta\}^2}{\{r_1+r_3-(r_2+r_3)\sin^2\vartheta\}^2} \cdot \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}};$$

$$= \frac{r_2^2}{ac} \cdot \frac{(1-k^2\sin^2\vartheta)^2}{\left(1-\frac{r_2+r_3}{r_1+r_3}\sin^2\vartheta\right)^2} \cdot \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}},$$

und wenn wir in diesem Intervall λ gleich $-\frac{r_2+r_3}{r_1+r_3}$ setzen, so kommt:

$$t = \frac{r_2^2}{ac} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{(1-k^2\sin^2\vartheta)^2 d\vartheta}{(1+\lambda\sin^2\vartheta)^2 \Delta\vartheta}$$

$$= \frac{r_2^2}{ac} \int_0^{\vartheta} \frac{(1-k^2\sin^2\vartheta)^2 d\vartheta}{(1+\lambda\sin^2\vartheta)^2 \Delta\vartheta}$$

$$- \frac{r_2^2}{ac} \int_0^{\vartheta_0} \frac{(1-k^2\sin^2\vartheta)^2 d\vartheta}{(1+\lambda\sin^2\vartheta)^2 \Delta\vartheta}.$$

Setzen wir nun wieder das zweite constante Integral, welches dem Integral $\int_{r_2}^{r_0} \frac{r^2 dr}{\sqrt{R}}$ entspricht, gleich t_0, (wir haben also in diesem Intervall r_2 zur Polaraxe gewählt), so kommt:

$$t + t_0 = \frac{r_2^2}{ac} \int_0^{\vartheta} \frac{(1-k^2\sin^2\vartheta)^2}{(1+\lambda\sin^2\vartheta)^2} \cdot \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta}.$$

Um dieses elliptische Integral auf die drei Normalformen zurückführen zu können, setzen wir wieder:

$$\frac{(1-k^2\sin^2\vartheta)^2}{(1+\lambda\sin^2\vartheta)^2} = \frac{A}{(1+\lambda\sin^2\vartheta)^2} + \frac{B}{1+\lambda\sin^2\vartheta} + C;$$

oder:

$$(1-k^2\sin^2\vartheta)^2 = A + B(1+\lambda\sin^2\vartheta) + C(1+\lambda\sin^2\vartheta)^2;$$

folglich ist hier:

$$A + B + C = 1$$
$$\lambda(B + 2C) = -2k^2$$
$$\lambda^2 . C = k^4;$$

daraus folgt:

$$C = \frac{k^4}{\lambda^2}$$
$$B = \frac{-2k^2(\lambda + k^2)}{\lambda^2}$$
$$A = \frac{(\lambda + k^2)^2}{\lambda^2}.$$

Diese Werte eingesetzt, ergiebt:

$$\frac{\lambda^2(1 - k^2 \sin^2\vartheta)^2}{(1 + \lambda \sin^2\vartheta)^2} = \frac{(\lambda + k^2)^2}{(1 + \lambda \sin^2\vartheta)^2} - \frac{2k^2(\lambda + k^2)}{1 + \lambda \sin^2\vartheta} + k^4.$$

folglich erhalten wir:

$$t + t_0 = \frac{r_2^{\,2}}{\lambda^2 ac} \left\{ (\lambda + k^2)^2 \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{(1 + \lambda \sin^2\vartheta)^2 \Delta\vartheta} \right.$$
$$\left. - 2k^2(\lambda + k^2) \int^\vartheta \frac{d\vartheta}{(1 + \lambda \sin^2\vartheta) \Delta\vartheta} + k^4 \int^\vartheta \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta} \right\}$$

$$D = \frac{r_2^2(\lambda + k^2)^2}{\gamma_0 \lambda^2 ac}$$

$$E = -\frac{r_2^2(\lambda + k^2)\{\gamma_1(\lambda + k^2) + 2\gamma_0 k^2\}}{\gamma_0 \lambda^2 ac}$$

$$F = \frac{r_2^2 \gamma_3 (\lambda + k^2)^2}{\gamma_0 \lambda k^2 ac}$$

$$G = \frac{r_2^2[\gamma_0 k^6 - \gamma_3(\lambda + k^2)^3]}{\gamma_0 \lambda^2 k^2 ac}.$$

Setzen wir jetzt für ϑ seinen Wert, so ist

$$t + t_0 = \frac{D \sin am\, a(\varphi + \varphi_0) \cos am\, a(\varphi + \varphi_0) \varDelta\, am\, a(\varphi + \varphi_0)}{1 + \lambda^2 \sin^2 am\, a(\varphi + \varphi_0)}$$

$$+ E.a \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{1 + \lambda \sin^2 am\, a(\varphi + \varphi_0)}$$

$$+ F.a \int_0^\varphi \varDelta^2 am\, a(\varphi + \varphi_0)\, d\varphi + G.a(\varphi + \varphi_0).$$

Wird nun $r = \pm\infty$, so wird $\sin^2\vartheta$ d. i. $\sin^2 am\, a(\varphi + \varphi_0) = \frac{r_1 + r_3}{r_2 + r_3}$, und λ ist $= -\frac{r_2 + r_3}{r_1 + r_3}$, folglich wird der Nenner des ersten Gliedes Null, also dieses Glied $= \infty$, mithin auch $t + t_0 = \infty$; d. h. wenn der bewegte Punkt im Unendlichen ankommt, so ist die Zeit, die er dazu gebraucht hat, ebenfalls unendlich gross. Es findet demnach hier, wie schon aus der Natur der Curve erhellt, keine Zeitperiode statt. Der bewegte Punkt M kann nur einen positiven Zweig durchlaufen, durch den also die ganze Bahn dargestellt wird. Jeder Punkt dieses Zweiges kann Anfangspunkt der Bewegung sein, mit Ausnahme des im Unendlichen liegenden Punktes, und der Punkt M wird dann nach seiner erhaltenen Richtung auf dieser Bahn weitergehen bis in's Unendliche, so lange er nach dem Kraftcentrum O hingeht mit beschleunigter im entgegengesetzten Falle mit verzögerter Geschwindigkeit. Im Unendlichen aber, wo der Radius also die Asymptote ist, hat der Punkt M nach der Gleichung:

$$v^2 = v_0^2 - 2mr_0^{-3}$$

constante Geschwindigkeit.

Den negativen Zweig würde der Punkt M, wie wir gesehen haben, unter denselben Bedingungen bei gleichem aber entgegengesetztem k beschreiben, und da dieser Fall dem Fall 4) entspricht, so muss der

hier resultirende negative Zweig im Fall 4) als positiver auftreten und umgekehrt. Und in der Tat muss sich im Fall 4) r innerhalb der Grenzen r_3 bis $-r_2$ und $-r_1$ bis 0 bewegen, so dass wir dieselben Curven aber entgegengesetzt erhalten. Wir haben also mit dem Fall 1) zugleich Fall 4) gelöst. In dem letzteren wird also die ganze Bahn des bewegten Punktes M auch nur in einem Zweige bestehen, und die Bewegung kann von jedem Punkte dieses Zweiges ausgehen mit Ausnahme des im Unendlichen liegenden Punktes. Eine Zeitperiode kann also nach Obigem hier auch nicht eintreten. Der Punkt M geht dann gemäss der erhaltenen Richtung weiter bis in's Unendliche, so lange er auf das Kraftcentrum O zugeht mit verzögerter Geschwindigkeit, im andern Falle aber mit beschleunigter Geschwindigkeit; im Unendlichen aber ist:

$$v^2 = v_0^2 + 2mr_0^{-3},$$

also die Geschwindigkeit constant und grösser als die Anfangsgeschwindigkeit.

Im zweiten Fall, der nur ein besonderer des ersten ist, wird

$$27m^2 = \frac{r_0^6 v_0^6 \sin^6\alpha_0}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}};$$

daher werden die beiden positiven Wurzeln einander gleich, nämlich

$$= \sqrt[3]{\frac{m}{v_0^2 - 2mr_0^{-3}}}$$

$$= r_0 \sqrt[3]{\frac{k}{3r_0^3 v_0^2 - 2k}}$$

und wir können r_1 für r_2 setzen. Dann geht die Gleichung 14) über in:

$$d\varphi = \frac{c.dr}{\sqrt{br(r-r_1)^2(r+r_3)}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{b}} \cdot \frac{dr}{(r-r_1)\sqrt{r(r+r_3)}},$$

wo r alle Werte von 0 über $\pm\infty$ bis $-r_3$ annehmen kann. Wir haben es also in diesem Falle nicht mehr mit einem elliptischen Differential zu tun. Dann ist:

$$\varphi = \frac{c}{\sqrt{b}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{(r-r_1)\sqrt{r(r+r_3)}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{b}} \cdot \int_0^r \frac{dr}{(r-r_1)\sqrt{r(r+r_3)}}$$

$$- \frac{c}{\sqrt{b}} \cdot \int_0^{r_0} \frac{dr}{(r-r_1)\sqrt{r(r+r_3)}};$$

oder das letzte Glied gleich φ_0 gesetzt, giebt:

$$\varphi + \varphi_0 = \frac{c}{\sqrt{b}} \cdot \int_0^r \frac{dr}{(r-r_1)\sqrt{r(r+r_3)}}.$$

Setzen wir jetzt:

$$r = x^2(r+r_3) \quad \text{oder}$$

$$r = \frac{r_3 x^2}{1-x^2}, \quad \text{so ist:}$$

$$dr = \frac{\{2r_3 x(1-x^2) + 2x r_3 x^2\} dx}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{2r_3 x\, dx}{(1-x^2)^2}, \quad \text{und}$$

$$r - r_1 = \frac{r_3 x^2 - r_1 + r_1 x^2}{1-x^2}$$

$$= \frac{r_1(3x^2-1)}{1-x^2}$$

weil $r_3 = 2r_1$; und endlich:

$$r + r_3 = \frac{r_3}{1-x^2},$$

also erhalten wir:

$$\frac{dr}{(r-r_1)\sqrt{r(r+r_3)}} = \frac{2dx}{r_1(3x^2-1)}.$$

Es ist demnach:

$$\varphi + \varphi_0 = \frac{c}{r_1\sqrt{b}} \int_0^x \frac{2dx}{3x^2-1}$$

$$= \frac{c}{r_1\sqrt{b}} \int_0^x \left(\frac{dx}{\sqrt{3}x-1} - \frac{dx}{\sqrt{3}x+1}\right)$$

$$= \frac{c}{r_1\sqrt{3b}} \left(l(\sqrt{3}x-1) - l(-1) - l(\sqrt{3}x+1)\right)$$

$$= \frac{c}{r_1\sqrt{3b}}\, l\, \frac{1-\sqrt{3}x}{1+\sqrt{3}x}.$$

Setzen wir jetzt wieder für x seinen Wert

$$x = \sqrt{\frac{r}{r+r_3}}$$

ein, so kommt:

$$\varphi + \varphi_0 = \frac{c}{r_1\sqrt{3b}}\, l\, \frac{\sqrt{r+r_3} - \sqrt{3r}}{\sqrt{r+r_3} + \sqrt{3r}}.$$

Lassen wir jetzt $r = r_1$ werden, so wird $\varphi + \varphi_0 = -\infty$, wenn sich also r rückwärts drehte d. h. die, seiner wirklichen Bewegung entgegengesetzte Bewegung annehme, so würde nach unendlich vielen Umdrehungen $r = r_1$ werden. Die Curve ist also eine Spirale, die zwei Zweige hat, von denen der eine ausserhalb, der andere innerhalb des mit r_1 um den Punkt O beschriebenen Kreises liegt, welchem sich beide fortwährend nähern ohne ihn zu treffen. Der Kreis ist demnach Asymptotenkreis der Curve, d. h. die Curve geht in denselben über, nachdem sie, sich demselben nähernd, unendlich viele Windungen beschrieben hat. Der negative Zweig aber verläuft ebenso, wie im ersten Fall, indem r aus $-\infty$ kommend bis $-r_3$ geht und dann wieder bis $-\infty$. In Bezug auf den Winkel, welchen r von der Anfangslage r_0 bis $r = 0$ resp. $r = \infty$ beschreiben muss, wissen wir, dass innerhalb des Asymptotenkreises der Winkel φ_0 durch entgegengesetzte Drehung, ausserhalb durch dieselbe Drehung entstanden ist, wie der Winkel φ; jener ist also in Bezug auf diesen im ersten Falle negativ, im zweiten positiv zu nehmen. Kennen wir nun $\varphi + \varphi_0$, so müssen wir also im ersten Fall den Wert von φ_0 zuzählen, um φ zu erhalten, im zweiten aber denselben abziehen. Setzen wir in der obigen Gleichung $r = r_0$, so ist $\varphi = 0$, und wir erhalten:

$$\varphi_0 = \frac{c}{r_1\sqrt{3b}}\, l\, \frac{\sqrt{r_0+r_3} - \sqrt{3r_0}}{\sqrt{r_0+r_3} + \sqrt{3r_0}},$$

setzen wir aber $r = 0$, so erhalten wir den ganzen Wert von $\varphi + \varphi_0$, nämlich:

$$\varphi + \varphi_0 = 0.$$

Folglich ist nach Obigem in diesem Falle:

$$\varphi = -\frac{c}{r_1\sqrt{3b}}\, l\, \frac{\sqrt{r_0+r_3} - \sqrt{3r_0}}{\sqrt{r_0+r_3} + \sqrt{3r_0}}.$$

Setzen wir ferner, nachdem wir den Bruch mit $\frac{1}{\sqrt{r}}$ erweitert haben, $r = \infty$, so erhalten wir für die ausserhalb des Kreises liegende Spirale:

$$\varphi + \varphi_0 = \frac{c}{r_1\sqrt{3b}}\, l\, \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}},$$

folglich ist dann:

$$\varphi = \frac{c}{r_1\sqrt{3b}} \cdot \left\{ l \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} - l \cdot \frac{\sqrt{r_0+r_3}-\sqrt{3r_0}}{\sqrt{r_0+r_3}+\sqrt{3r_0}} \right\}$$

$$= \frac{c}{r_1 \cdot \sqrt{3b}} \cdot l \cdot \frac{(\sqrt{r_0+r_3}+\sqrt{3r_0}) \cdot (1-\sqrt{3})}{(\sqrt{r_0+r_3}-\sqrt{3r_0}) \cdot (1+\sqrt{3})}.$$

Wenn endlich r alle negativen Werte durchläuft, so ist der Winkel, den es beschreibt, doppelt so gross, wie der zwischen $-r_3$ und dem unendlich grossen Radius liegende Winkel. Den letzteren erhalten wir, wenn wir von dem Wert für $\varphi = \varphi_0$, welcher dem Radius $r = -r_3$ entspricht, denjenigen abziehen, welcher dem Radius $r = \infty$ entspricht. Ersterer ist bei $r = -r$:

$$\varphi + \varphi_0 = \frac{c}{r_1\sqrt{3 \cdot b}} \cdot l(-1);$$

demnach ist der Winkel φ, welcher von den beiden Asymptoten eines negativen Zweiges eingeschlossen wird:

$$\varphi = \frac{2c}{r_1 \cdot \sqrt{3 \cdot b}} \cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{2c}{r_1\sqrt{3b}} \, l \cdot (2+\sqrt{3}).$$

Die Curve würde also in diesem besonderen Falle für gewisse Anfangswerte solche Gestalt haben können, wie wir sehen an Figur III.

Aus der Gleichung

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{c}$$

erhalten wir nach obigen Substitutionen:

$$dt = \frac{1}{r_1\sqrt{b}} \cdot \frac{r_3{}^2 x^4}{(1-x^2)^2} \cdot \frac{2dx}{3x^2-1},$$

$$= \frac{r_1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{8x^4 dx}{(1-x)^2(1+x)^2\,(3x^2-1)}$$

$$= \frac{r_1 dx}{\sqrt{b}} \cdot \left\{ \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}x-1} - \frac{1}{\sqrt{3}x+1} \right\}$$

$$t = \frac{r_1}{\sqrt{b}} \Big|_{x^0}^{x} \left\{ \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \, l \cdot (\sqrt{3}x-1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \, l \cdot (\sqrt{3}x+1) \right\}$$

$$= \frac{r_1}{\sqrt{b}} \int_{x_0}^{x} \left(\frac{2x}{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} l \cdot \frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{3}x+1} \right)$$

$$= \frac{r_1}{\sqrt{b}} \cdot \left\{ \frac{2x}{1-x^2} - \frac{2x_0}{1-x_0^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x_0+1)}{(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x_0-1)} \right\}$$

$$= \frac{r_1}{\sqrt{b}} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{r\,.\,(r+r_3)} - \sqrt{r_0(r_0+r_3)}}{r_1} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \,.\, l \frac{(\sqrt{3r}-\sqrt{r+r_3})\,(\sqrt{3r_0}+\sqrt{r_0+r_3})}{(\sqrt{3r}+\sqrt{r+r_3})\,(\sqrt{3r_0}-\sqrt{r_0+r_3})} \right\}$$

Die Zeit also, die der Punkt gebraucht, um von der Anfangslage nach dem Kraftcentrum 0 zu kommen, wo $r = 0$, ist daher:

$$t = -\frac{\sqrt{r_0(r_0+r_3)}}{\sqrt{b}} + \frac{r_1}{\sqrt{3b}} . l . \frac{\sqrt{r_0+r_3}+\sqrt{3r_0}}{\sqrt{r_0+r_3}-\sqrt{3r_0}};$$

bis in's Unendliche aber braucht der Punkt M eine unendliche Zeit, denn da das erste Glied $= \infty$ wird, so ist auch:

$$t = \infty.$$

Ist schliesslich der Anfangsradius $r_0 = r_1$, also $k = 3r_0^3 v_0^2 - 2k$ oder $v_0^2 = \frac{k}{r_0^3}$, so wird die Curve zu dem mit r_1 um den Punkt 0 beschriebenen Kreise werden. Dann ergiebt sich aus der Bedingungsgleichung für die Gleichheit der beiden Wurzeln r_1 und r_2, dass

$$k^2(3v_0^2 - 2k r_0^{-3}) = (r_0 v_0 \sin\alpha_0)^6,$$

oder:

$$r_0^6 v_0^6 \sin^6\alpha_0 - 3k^2 v_0^2 + 2k^3 r_0^{-3} = 0,$$

und wenn wir für v_0^2 seinen Wert $\frac{k}{r_0^3}$ einsetzen, so ist $\sin^6\alpha_0 = 1$, also $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ oder $= \frac{3\pi}{2}$. Nun ist die Centrifugalkraft $\frac{v^2}{r}$ in diesem Falle gleich $\frac{k}{r_0^4}$, und die Centripetalkraft ist dann in demselben Punkte auch gleich $\frac{k}{r_0^4}$, also jener Kraft gleich, folglich muss dann der Punkt M um das Kraftcentrum 0 einen Kreis mit dem Radius r_1 beschreiben.

Die Bahncurve besteht also unter der Bedingung dieses Falles und, wenn $v_0^2 = \frac{k}{r_0^3}$ ist, in einem Kreise, den der bewegte Punkt M

mit dem Anfangsradius und der constanten Geschwindigkeit v_0 um das Kraftcentrum 0 beschreibt. Ist jedoch $v_0^2 < \frac{k}{r_0^3}$, überwiegt also die Centripetalkraft, so ist auch $r_0 < r_1$, und der Punkt M wird sich auf der inneren Spirale bewegen, ist aber $v_0^2 > \frac{k}{r_0^3}$, überwiegt also die Centrifugalkraft, so ist auch $r_0 > r_1$, und der Punkt bewegt sich auf der äusseren Spirale. Diesem ganzen Fall entspricht Fall 5), wo die jetzigen positiven Curven als negative resultiren, und umgekehrt. Im Allgemeinen hat nun in diesem Falle der negative Zweig dieselbe Gestaltung wie im vorigen, mithin ist auch im fünften Falle der positive Teil der Curve ebenso gestaltet, wie der im Fall 4), und die Bewegung des abgestossenen Punktes M wird daher ebenso verlaufen wie dort.

Im dritten Fall sind erstens, wenn $b > 0$, die Wurzeln eine negativ reell: $-r_1$ und die beiden andern imaginär: r_2 und r_3. Dann ist also:

$$R = b.r(r+r_1)(r-r_2)(r-r_3)$$

folglich:

$$d\varphi = \frac{c}{\sqrt{b}} \cdot \frac{dr}{\sqrt{r.(r+r_1)(r-r_2)(r-r_3)}}.$$

Jetzt kann sich r in den Grenzen 0 über $\pm\infty$ bis $-r_1$ bewegen, liegt also ausserhalb des Intervalls $-r_1$ bis 0; wir können uns daher zur Reducirung des elliptischen Differentials auf die kanonische Form folgender Substitution bedienen: (s. Schellbach, Theta-Funct. p. 267.):

$$r = -\frac{r_1}{2} + \frac{r_1.(\cos\vartheta - n)}{2.(1-n\cos\vartheta)}$$

$$= -\frac{r_1}{2} \cdot \frac{(n+1)(1-\cos\vartheta)}{(1-n\cos\vartheta)}.$$

Dabei geht, wenn ϑ das Intervall 0 bis π stetig wachsend durchläuft, r stetig von 0 zu $+\infty$ über, welchen Wert es für $\cos\vartheta = \frac{1}{n}$ annimmt, und dann von $-\infty$ zu $-r_1$ über. Durch diese Substitution wird:

$$dr = -\frac{r_1}{2} \frac{\{(1-n\cos\vartheta)(n+1)\sin\vartheta - (n+1)(1-\cos\vartheta)\, n\sin\vartheta\}d\vartheta}{(1-n\cos\vartheta)^2}$$

$$= \frac{r_1}{2} \cdot \frac{(n^2-1)\sin\vartheta\, d\vartheta}{(1-n\cos\vartheta)^2};$$

$$r + r_1 = -\frac{r_1}{2} \cdot \frac{(n-1)(1+\cos\vartheta)}{(1-n\cos\vartheta)}$$

$$r - r_2 = \frac{-r_1(1+n) - 2r_2 + \{r_1(1+n) + 2nr_2\}\cos\vartheta}{2(1-n\cos\vartheta)}$$

$$r - r_3 = \frac{-r_1(1+n) - 2r_3 + \{r_1(1+n) + 2nr_3\}\cos\vartheta}{2(1-n\cos\vartheta)}$$

n bestimmen wir so, dass in dem Product $(r-r_2).(r-r_3)$ der Coefficient von $\cos\vartheta$ gleich Null wird, also:

$$\{r_1(n+1)+2r_2\}.\{r_1(n+1)+2nr_3\}+ \{r_1(n+1)+2r_3\}.\{r_1(n+1)+2nr_2\} = 0$$

woraus sich nun n bestimmt. Diese quadratische Gleichung für n lässt sich umformen in folgende:

$$r_1^2(n+1)^2 + 2(n+1)r_2r_3 = 2r_2r_3;$$

folglich ergiebt sich für n der Wert:

$$n = \frac{-r_1^2 - r_2r_3 \pm \sqrt{r_2^2.r_3^2 + 2r_1^2.r_2r_3}}{r_1^2}.$$

Damit nun r unter den negativen Werten keinen annehmen kann, der dem absoluten Betrage nach kleiner als r_1 ist, muss der absolute Betrag von n grösser als 1 sein, wir müssen daher das negative Vorzeichen der Wurzel nehmen. Dieser Wert resultirt auch, wenn wir in die, bei Schellbach angegebene, allgemeine Form für n unsere Wurzelwerte einsetzen, den Nenner rational machen, und das Resultat mit Berücksichtigung der Gleichung $r_1 = r_2 + r_3$ vereinfachen. Setzen wir dann noch:

$$\{r_1(n+1)+2nr_2\}.\{r_1(n+1)+2nr\} = Q$$

und

$$\{r_1(n+1)+2r_2\}.\{r_1(n+1)+2r_3\} = P,$$

so kommt, wenn wir die obigen Werte einsetzen und die gleichen Factoren haben:

$$d\varphi = \frac{c}{\sqrt{b}} \cdot \frac{2\sqrt{n^2-1}\,.\,d\vartheta}{\sqrt{P+Q\cos^2\vartheta}}$$

$$= \frac{2c\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{d\vartheta}{\sqrt{P+Q-Q\sin^2\vartheta}}$$

$$= \frac{2c\,.\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{b\,.(P+Q)}} \cdot \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\frac{Q}{P+Q}\sin^2\vartheta}}$$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}},$$

wenn wir nämlich in diesem Falle:

$$\frac{2c.\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{b.(P+Q)}}=\frac{1}{a}$$

und

$$\frac{Q}{P+Q}=k^2$$

setzen; k^2 ist also ein positiver echter Bruch. Durch Integration erhalten wir dann:

$$\varphi=\frac{1}{a}.\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\varDelta\vartheta}$$

$$=\frac{1}{a}.\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\varDelta\vartheta}-\frac{1}{a}.\int_0^{\vartheta_0}\frac{d\vartheta}{\varDelta\vartheta},$$

und wenn wir wieder das letzte constante Integral, welches dem Integral $c\int_0^{r_0}\frac{dr}{\sqrt{R}}$ entspricht, gleich φ_0 setzen, so kommt:

$$a(\varphi+\varphi_0)=\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\varDelta\vartheta};$$

folglich:

$$\vartheta=am.a(\varphi+\varphi_0),$$

und

$$r=\frac{-r_1}{2}.\frac{(n+1).(1-\cos.am.a(\varphi+\varphi_0))}{1-n.\cos am\,a(\varphi+\varphi_0)}.$$

Die Periode von $a(\varphi+\varphi_0)$ ist $4K$, und weil in dem Werte für r nur der einfache cos steht, so erhält r erst denselben Wert wieder, wenn $a(\varphi+\varphi_0)$ um $4K$ zugenommen hat; nennen wir den Winkel, den r dabei beschreibt, Φ, so ist:

$$a(\varphi+\varphi_0)+4K=a(\varphi+\varphi_0+\Phi),$$

folglich:

$$\Phi=\frac{4K}{a}.$$

Wenn also r sich um den Winkel Φ gedreht hat, so erhält es wieder dieselben Werte.

Die Curve hat also zwei Zweige, einen positiven und einen negativen, welche sich fortwährend, einer nach dem andern, wiederholen. Beide kommen aus dem Unendlichen, gehen dann bis $r=0$ resp.: $r=-r_1$ und dann wieder in's Unendliche. Die Curve hat also in

0 einen unendlichfachen Doppelpunkt und geht unendlich oft durch $\pm\infty$; ferner berührt sie mit ihrem negativen Zweige immer den mit $-r_1$ um 0 beschriebenen Kreis, welcher also die einhüllende Curve der negativen Zweige ist. Die Gestalt der Curve würde also z. B. für gewisse Anfangswerte so beschaffen sein können, wie es dargestellt ist in Figur IV.

Setzen wir in die Gleichung:

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{c}$$

für r und $d\varphi$ ihre Werte ein, so kommt:

$$dt = \frac{1}{a.c} \cdot \frac{r_1^2 (n+1)^2 . (1-\cos\vartheta)^2 d\vartheta}{4 . (1-n\cos\vartheta)^2 \Delta\vartheta}$$

$$= \frac{r_1^2}{4ac} \cdot \frac{(n+1)^2 . (1-\cos\vartheta)^2}{(1-n\cos\vartheta)^2} \cdot \frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta}.$$

Um dieses Differential auf die kanonischen Formen bringen zu können, müssen wir erst den darin steckenden algebraischen Teil absondern; dazu setzen wir $\cos\vartheta = v$, dem Werte $\vartheta = 0$ entspricht also $v = 1$, und es ist:

$$d\vartheta = -\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Folglich wird:

$$\frac{(1-\cos\vartheta)^2 d\vartheta}{(1-n\cos\vartheta)^2 \Delta\vartheta} = -\frac{(1-v)^2 dv}{(1-nv)^2 \sqrt{1-v^2}\sqrt{1-k^2+k^2v^2}}$$

$$= -\frac{(1+nv)^2 . (1-v)^2 dv}{(1-n^2v^2)^2 . \sqrt{(1-v^2)(k_1^2+k^2v^2)}}$$

$$= -\frac{\{1+(1-4n+n^2)v^2+n^2v^4\} dv}{(1-n^2v^2)^2 . \sqrt{(1-v^2) . (k_1^2+k^2v^2)}}$$

$$+ \frac{\{2n(n-1)v^3 - 2(n-1)v\} dv}{(1-n^2v^2)^2 . \sqrt{(1-v^2) . (k_1^2+k^2v^2)}},$$

wo $k_1^2 = 1-k^2$ gesetzt ist. Der zweite Teil ist ein rein algebraisches Differential und lässt sich auch schreiben:

$$\frac{(n-1)(nv^2-1) 2v\, dv}{(1-n^2v^2)^2 . \sqrt{(1-v^2)(k_1^2+k^2v^2)}} = \frac{(n-1) . (nz-1) dz}{(1-n^2z)^2 . \sqrt{(1-z)(k_1^2+k^2z)}},$$

wenn $v^2 = z$ ist, und dem Grenzwert $v = 1$ entspricht dann der Grenzwert $z = 1$. Setzen wir ferner:

$$k_1^2 + k^2 z = (1-z) u^2,$$

oder:

$$z = \frac{u^2 - k_1^2}{u^2 + k_1^2},$$

so ist:

$$dz = \frac{(u^2 + k^2) - (u^2 - k_1^2)}{(u^2 + k^2)^2} \cdot 2u\,du$$

$$= \frac{2u\,du}{(u^2 + k^2)^2},$$

und es entspricht dem Grenzwert $z = 1$ der Wert $u = \infty$. Dies eingesetzt, giebt:

$$\frac{(n-1)(nz-1)\,dz}{(1-n^2z)^2 \cdot \sqrt{(1-z)} \cdot (k_1^2 + k^2 z)} = \frac{2(n-1)\{(u^2+k^2)(n-1) - n\}du}{\{(u^2+h^2)(1-n^2) + n^2\}^2}$$

$$= \frac{2(n-1)^2 \cdot u^2 du}{\{k^2 - k^2n^2 + n^2 + u^2(1-n^2)\}^2}$$

$$+ \frac{2(n-1)\{k^2(n-1) - n\} \cdot du}{\{k^2 - k^2n^2 + n^2 + u^2(1-n^2)\}^2}$$

$$= \frac{2(n-1)^2 u^2 du}{(k^2 + n^2k_1^2 - (n^2-1)u^2)^2}$$

$$+ \frac{2(1-n)(k^2 + nk_1^2)\,du}{(k^2 + n^2k_1^2 - (n^2-1)u^2)^2},$$

wo $n^2 - 1$ positiv ist, da n seinem absoluten Betrage nach grösser als 1 ist. Setzen wir das erste Glied der rechten Seite gleich $2(n-1)^2 H du$, und das zweite Glied gleich $2(1-n)(k^2 + nk_1^2) J du$, so erhalten wir durch Integration:

$$\int H du = \frac{u}{2(n^2-1)(k^2 + n^2k_1^2 - (n^2-1)u^2)}$$

$$- \frac{1}{4(n^2-1) \cdot \sqrt{(k^2 + n^2k_1^2)(n^2-1)}}$$

$$\times l \frac{\sqrt{k^2 + n^2k_1^2} + \sqrt{n^2-1} \cdot u}{\sqrt{k^2 + n^2k_1^2} - \sqrt{n^2-1} \cdot u};$$

$$\int J du = \frac{u}{2(k^2 + n^2k_1^2)(k^2 + n^2k_1^2 - (n^2-1)u^2)}$$

$$+ \frac{1}{4(k^2 + n^2k_1^2)\sqrt{(k^2 + n^2k_1^2)(n^2-1)}}$$

$$\times l \frac{\sqrt{k^2 + n^2k_1^2} + \sqrt{n^2-1} \cdot u}{\sqrt{k^2 + n^2k_1^2} - \sqrt{n^2-1} \cdot u}.$$

Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir für den algebraischen Teil:

$$(n-1)\int\frac{(nz-1)\,dz}{(1-n^2z)\sqrt{(1-z)(k_1^2+k^2z)}}=\frac{2(n-1)^2u}{2(n^2-1)(k^2+n^2k_1^2-(n^2-1)u^2}$$

$$-\frac{2(n-1)^2}{4(n^2-1)\sqrt{(k^2+n^2k_1^2)(n^2-1)}}$$

$$\times\, l\,\frac{\sqrt{k^2+n^2k_1^2}+\sqrt{n^2-1}\,.\,u}{\sqrt{k^2+n^2k_1^2}-\sqrt{n^2-1}\,.\,u}$$

$$+\frac{2(1-n)(k^2+nk_1^2)u}{2(k^2+n^2k_1^2)(k^2+n^2k_1^2-(n^2-1)u^2)}$$

$$+\frac{2(1-n)(k^2+nk_1^2)}{4(k^2+n^2k_1^2)\sqrt{(k^2+n^2k_1^2)(n^2-1)}}$$

$$\times\, l\,\frac{\sqrt{k^2+n^2k_1^2}+\sqrt{n^2-1}\,.\,u}{\sqrt{k^2+n^2k_1^2}-\sqrt{n^2-1}\,.\,u}.$$

$$=\frac{\{(n-1)^2(k^2+n^2k_1^2)+(1-n)(k^2+nk_1^2)(n^2-1)\}.\,u}{(n^2-1)(k^2+n^2k_1^2)\sqrt{k^2+n^2k_1^2-(n^2-1)u^2})^2}$$

$$+\frac{(n^2-1)(1-n)(k^2+nk_1^2)-(n-1)^2(k^2+n^2k_1^2)}{\ldots}$$

$$(n-1)\int_1^z \frac{(nz-1)\,dz}{(1-n^2z)\sqrt{(1-z)(k_1^2+k^2z)}}$$

$$= -\frac{n(n-1)^2 . u}{(n^2-1)(k^2+n^2k_1^2)(k^2+n^2k_1^2-(n^2-1)u^2)}$$

$$+\frac{(n-1)^2(n+2(k^2+n^2k_1^2))}{2(n^2-1)(k^2+n^2k_1^2)\sqrt{(k^2+n^2k_1^2)(n^2-1)}}$$

$$\times l\frac{\sqrt{n^2-1}.u-\sqrt{k^2+n^2k_1^2}}{\sqrt{n^2-1}.u+\sqrt{k^2+n^2k_1^2}}.$$

Setzen wir nun wieder rückwärts für u seinen Wert ein:

$$u^2 = \frac{k_1^2+k^2\cos^2\vartheta}{1-\cos^2\vartheta} = \frac{\Delta^2\vartheta}{\sin^2\vartheta},$$

so wird dieser Ausdruck:

$$(n-1)\int_1^z \frac{(nz-1)\,dz}{(1-n^2z)\sqrt{(1-z)(k_1^2+k^2z)}}$$

$$= -\frac{n(n-1)^2\sin\vartheta\Delta\vartheta}{(n^2-1)(k^2+n^2k_1^2)(\sin^2\vartheta(k^2+n^2k_1^2)-(n^2-1)\Delta^2\vartheta)}$$

$$+\frac{(n-1)^2(n+2(k^2+n^2k_1^2))}{2(n^2-1)(k^2+n^2k_1^2)\sqrt{(k^2+n^2k_1^2)(n^2-1)}}$$

$$\times l\frac{\sqrt{n^2-1}\,\Delta\vartheta-\sqrt{k^2+n^2k_1^2}\sin\vartheta}{\sqrt{n^2-1}\,\Delta\vartheta+\sqrt{k^2+n^2k_1^2}\sin\vartheta}.$$

In dem nicht algebraischen Teile des obigen Differentials setzen wir wieder $v = \cos\vartheta$ und erhalten:

$$\frac{1+(1-4n+n^2)\cos^2\vartheta+n^2\cos^4\vartheta}{(1-n^2\cos^2\vartheta)^2}\frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta}$$

$$=\frac{2(1-2n+n^2)-(1-4n+3n^2)\sin^2\vartheta+n^2\sin^4\vartheta}{(1-n^2+n^2\sin^2\vartheta)^2}\cdot\frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta}$$

Um nun dieses elliptische Integral auf die kanonischen Formen reduciren zu können, setzen wir wieder:

$$\frac{2(1-n)^2-(1-n)(1-3n)\sin^2\vartheta+n^2\sin^4\vartheta}{(1-n^2+n^2\sin^2\vartheta)^2}$$

$$= \frac{A}{(1-n^2+n^2\sin^2\vartheta)^2}+\frac{B}{1-n^2+n^2\sin^2\vartheta}+C;$$

führen wir dann die Multiplicationen aus, so ist:

$$A + B(1-n^2) + C(1-n^2)^2 = 2(1-n)^2;$$
$$Bn^2 + 2n^2(1-n^2) \,.\, C = -(1-n)(1-3n)$$
$$Cn^4 = n^2;$$

und daraus ergiebt sich:

$$C = \frac{1}{n^2}$$

$$B = -\frac{(1-n)\,(3-n)}{n^2}$$

$$A = \frac{2(1-n)^2}{n^2}.$$

Setzen wir diese Werte ein, so kommt:

$$\int_0^\vartheta \frac{1 + (1-4n+n^2)\cos^2\vartheta + n^2\cos^4\vartheta}{(1-n^2\cos^2\vartheta)^2} \cdot \frac{d\vartheta}{\varDelta\vartheta}$$

$$= 2\int_0^\vartheta \frac{(1-n)^2\, d\vartheta}{n^2(1-n^2+n^2\sin^2\vartheta)^2\,\varDelta\vartheta}$$

ein, in welcher wir uns aber für k und λ die Werte dieses Falles substituirt denken müssen, so kommt:

$$\int_0^\vartheta \frac{1+(1-4n+n^2)\cos^2\vartheta+n^2\cos^4\vartheta}{(1-n^2\cos^2\vartheta)^2}\frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta}$$

$$= -\frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\Delta\vartheta}{n^2(1+n)^2\gamma_0\,(1+\lambda\sin^2\vartheta)}$$

$$-\frac{2\gamma_1+(3-n)(1+n)\gamma_0}{n^2(1+n)^2\gamma_0}$$

$$\times\int_0^\vartheta\frac{d\vartheta}{(1+\lambda\sin^2\vartheta)\,\Delta\vartheta}$$

$$+\frac{2\lambda\gamma_3}{\gamma_0 k^2 n^2(1+n)^2}\int_0^\vartheta\Delta\vartheta\,d\vartheta$$

$$+\frac{-2\gamma_3(k^2+\lambda)+\gamma_0 k^2(1+n)^2}{\gamma_0 k^2 n^2(1+n)^2}\int_0^\vartheta\frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta}.$$

$$= \frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\Delta\vartheta}{n^2(1+n)^2\gamma_0\,(1+\lambda\sin^2\vartheta)}$$

$$-\frac{2\gamma_1+(3-n)(1+n)\gamma_0}{n^2(1+n)^2\gamma_0}\,\Pi_0(k,\lambda,\vartheta)$$

$$+\frac{2\lambda\gamma_3}{n^2(1+n)^2\gamma_0 k^2}\,E(k,\vartheta)$$

$$+\frac{\gamma_0 k^2(1+n)^2-2\gamma_3(k^2+\lambda)}{n^2(1+n)^2\gamma_0 k^2}\,F(k,\vartheta).$$

Nun war:

$$dt=\frac{r_1^2(1+n)^2}{4ac}\cdot\frac{(1-\cos\vartheta)^2}{(1-n\cos\vartheta)^2}\cdot\frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta},$$

also ist:

$$t=\frac{r_1^2(1+n)^2}{4ac}\int_0^\vartheta\frac{(1-\cos\vartheta)^2}{(1-n\cos\vartheta)^2}\frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta}$$

$$=\frac{r_1^2(1+n)^2}{4ac}\int_0^\vartheta\frac{(1-\cos\vartheta)^2}{(1-n\cos\vartheta)^2}\frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta}$$

$$-\frac{r_1^2(1+n)^2}{4ac}\int_0^\vartheta\frac{(1-\cos\vartheta)^2}{(1-n\cos\vartheta)^2}\frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta}.$$

$$= -\frac{[illegible]}{4ac}\left\{\int_0 \frac{1+(1-4n+n^2)\cos^2\vartheta+n^2 \ldots}{(1-n^2\cos^2\vartheta)^2}\right.$$

$$\left. +(n-1)\int_1^z \frac{(nz-1)\,dz}{(1-n^2z^2)\sqrt{(1-z)(k_1^{\,2}+k^2z)}}\right\}$$

$$= \frac{r_1^{\,2}\sin\vartheta\cos\vartheta\,\varDelta\vartheta}{2acn^2\gamma_0(1+\lambda\sin^2\vartheta)}$$

$$- \frac{r_1^{\,2}\{2\gamma_1+(3-n)(1+n)\gamma_0\}}{4acn^2\gamma_0}\Pi_0(k,\lambda,\vartheta)$$

$$+ \frac{r_1^{\,2}\lambda\gamma_3}{2acn^2\gamma_0k^2}E(k,\vartheta)$$

$$+ \frac{r_1^{\,2}\{\gamma_0k^2(1+n)^2-2\gamma_3(k^2+\lambda)\}}{4acn^2\gamma_0k^2}F(k,\vartheta)$$

$$- \frac{r_1^{\,2}n(n^2-1)\sin\vartheta\,\varDelta\vartheta}{4ac(k^2+n^2k_1^{\,2})\{k^2+n^2k_1^{\,2})\sin^2\vartheta-(n^2-1)\varDelta\vartheta}$$

$$+ \frac{r_1^{\,2}(n^2-1)\{n+2(k^2+n^2k_1^{\,2})\}}{8ac(k^2+n^2k_1^{\,2})\sqrt{(k^2+n^2k_1^{\,2})(n^2-1)}}$$

$$\times l\,\frac{\sqrt{n^2-1}\,\varDelta\vartheta-\sqrt{k^2+n^2k_1^{\,2}}\sin\vartheta}{\sqrt{n^2-1}\,\varDelta\vartheta+\sqrt{k^2+n^2k_1^{\,2}}\sin\vartheta}.$$

Folglich ist, wenn wir der Kürze wegen wieder setzen:

$$D = \frac{r_1^{\,2}}{2acn^2\gamma_0}$$

$$L = \frac{r_1^2 n(n^2-1)}{4ac(k^2+n^2k_1^2)}$$

$$N = \frac{r_1^2(n^2-1)\{n+2(k^2+n^2k_1^2\}}{8ac(k^2+n^2k_1^2)\sqrt{(k^2+n^2k_1^2)(n^2-1)}},$$

und für ϑ seinen Wert $am\,a(\varphi+\varphi_0)$ einführen:

$$t+t_0 = \frac{D \sin am\,a(\varphi+\varphi_0) \cos am\,a(\varphi+\varphi_0)\, \Delta\, am\,a(\varphi+\varphi_0)}{1+\lambda \sin^2 am\,a(\varphi+\varphi_0)}$$

$$-Ea\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{1+\lambda\sin^2 am\,a(\varphi+\varphi_0)}$$

$$+Fa\int^\varphi \Delta^2 am\,a(\varphi+\varphi_0)\,d\varphi + Ga(\varphi+\varphi_0)$$

$$-L\frac{\sin am\,a(\varphi+\varphi_0)\Delta\, am\,a(\varphi+\varphi_0)}{(k^2+n^2k_1^2)\sin^2 am\,a(\varphi+\varphi_0)-(n^2-1)\Delta^2 am\,a(\varphi+\varphi_0)}$$

$$+Nl\frac{\sqrt{n^2-1}\,\Delta am\,a(\varphi+\varphi_0)-\sqrt{k_1^2+n^2k_1^2}\sin am\,a(\varphi+\varphi_0)}{\sqrt{n^2-1}\,\Delta am\,a(\varphi+\varphi_0)+\sqrt{k^2+n^2k_1^2}\sin am\,a(\varphi+\varphi_0)}.$$

Wächst r bis ∞, so wird $\cos\vartheta = \frac{1}{n}$, also: $\sin^2\vartheta$ d. i. $\sin^2 am\,a(\varphi+\varphi_0) = \frac{n^2-1}{n^2}$, und es ist: $\lambda = \frac{n^2}{1-n^2}$, folglich wird $\lambda \sin^2 am\,a(\varphi+\varphi_0) = -1$. Der Nenner des ersten Gliedes wird also Null, folglich das Glied selbst gleich Unendlich, mithin auch $t+t_0=\infty$. Der bewegte Punkt M braucht also eine unendlich grosse Zeit, um im Unendlichen anzukommen, es findet demnach in diesem Falle keine Zeitperiode statt, wie schon aus der Natur der Curve folgt. Als Bahn des Punktes M gilt für diesen Fall nur ein positiver Zweig, welchen der Punkt M aber höchstens bis zur Hälfte durchlaufen kann; denn entweder geht der Punkt M in das Kraftcentrum 0 oder in's Unendliche und wird in jedem von beiden verbleiben. Dann hat die Bewegung Aehnlichkeit mit derjenigen, die für das zweite Intervall des Fall 1) stattfindet, nur mit dem Unterschiede, dass der Punkt M dann nicht wie dort einen ganzen Zweig durchlaufen kann, wie schon bemerkt wurde, sondern nur einen halben Zweig. Jeder Punkt kann dann Anfangspunkt der Bewegung sein, mit Ausnahme des Anziehungscentrum's 0 und des im Unendlichen liegenden Punktes, denn in jedem von beiden wird er verbleiben. Wenn sich der Punkt M von dem Anziehungscentrum 0 mit verzögerter Geschwindigkeit entfernt, und schliesslich eine unendlich grosse Entfernung erhalten hat, so hat er im Unend-

... wurzel nicht imaginär wer... wegen in den Grenzen 0 und r_1; wir benutzen dah... (s. Schellbach Theta-Funct. p. 265)

$$r = \frac{r_1}{2} - \frac{r_1^2}{2} \frac{\cos\vartheta + n}{(1 + n\cos\vartheta)}$$

$$= \frac{r_1}{2} \frac{(1-n)(1-\cos\vartheta)}{(1+n\cos\vartheta)}.$$

Nimmt r stetig von 0 bis r_1 zu, so wächst ϑ auch ... π. Dann ist:

$$dr = \frac{r_1}{2} \frac{(1+n\cos\vartheta)(1-n)\sin\vartheta + (1-n)(1-\text{co}\ldots}{(1+n\cos\vartheta)^2}$$

$$= \frac{r_1(1-n^2)\sin\vartheta\, d\vartheta}{2(1+n\cos\vartheta)^2};$$

$$r_1 - r = \frac{r_1(1+n)(1+\cos\vartheta)}{2(1+n\cos\vartheta)};$$

$$r - r_2 = \frac{r_1(1-n) - 2r_2 - (r_1(1-n) + 2nr_2)\cos\vartheta}{2(1+n\cos\vartheta)};$$

$$r - r_3 = \frac{r_1(1-n) - 2r_3 - (r_1(1-n) + 2nr_3)\cos\vartheta}{2(1+n\cos\vartheta)}.$$

bestimmt sich wieder aus der Gleichung:

$$\{r_1(1-n) - 2r_2\}\{r_1(1-n) + 2nr_3\}$$
$$+ \{r_1(1-n) - 2\ldots$$

Es ist daher der negative Wurzelwert zu nehmen. Ferner sei in diesem Intervall:

$$\{r_1(1-n)-2r_2\}\{r_1(1-n)-2r_3\}=P,$$
$$\{r_1(1-n)+2nr_2\}\{r_1(1-n)+2nr_3\}=Q$$

gesetzt, dann ist wenn wir diese Werte in unsere Differentialgleichung einsetzen:

$$d\varphi=\frac{c}{\sqrt{b}}\frac{2\sqrt{1-n^2}\,d\vartheta}{\sqrt{P+Q\cos^2\vartheta}}.$$

Setzen wir wieder:

$$\frac{2c\sqrt{1-n^2}}{\sqrt{-b(P+Q)}}=\frac{1}{a},$$

und

$$\frac{Q}{P+Q}=k^2,$$

wo aber jetzt P und Q die eben angegebenen Werte haben, so finden wir, wie im ersten Falle; ($b>0$):

$$a(\varphi+\varphi_0)=\int_0^\vartheta\frac{d\vartheta}{\Delta\vartheta};$$

also:

$$\vartheta=am\,a(\varphi+\varphi_0),$$

und

$$r=\frac{r_1(1-n)(1-\cos am\,a(\varphi+\varphi_0))}{2(1-n\cos am\,a(\varphi+\varphi_0))};$$

ferner:

$$\Phi=\frac{4K}{a}.$$

Φ ist der Winkel, den r beschreiben muss, um wieder denselben Wert zu erhalten; und von einer Maximallage $r=r_1$ bis zur benachbarten Minimallage $r=0$ wird r den Winkel

$$\tfrac{1}{2}\Phi=\frac{2K}{a}$$

beschreiben. Da nun die Curve in diesem Intervall einen ähnlichen Verlauf hat wie in dem ersten Intervall des Fall 1), so gilt auch hier im Allgemeinen über sie und über die Bewegung des Punktes M bei positivem k d. h. bei Anziehung dasselbe wie dort. Die Bahncurve wird also ähnlich derjenigen gestaltet sein, welche wir als Beispiel für jenen Fall construirt haben. Da in diesem Intervall keine negativen Curven resultiren, so müssen wir daraus schliessen, dass es keine Bahnen giebt, die der Punkt M unter gleichen Bedingungen

aber bei negativem k d. h. bei Abstossung beschreiben könnte. Es kann auch keine geben; denn bei negativem k ist ja $b = v_0^2 + \frac{2k}{3r_0^3}$ also stets positiv, also kann die Bedingung dieses Falles: $b < 0$ d. h. negativ, für negative k auch nicht eintreten. Aus der Gleichung:

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{c}$$

erhalten wir durch Substitution:

$$dt = \frac{r_1^2(1-n)^2}{4ac} \frac{(1-\cos\vartheta)^2 d\vartheta}{(1+n\cos\vartheta)^2 \Delta\vartheta}.$$

Verfahren wir hier ebenso wie im vorigen Intervall, so kommt:

$$t + t_0 = \frac{r_1^2(1-n)^2}{4ac} \int_0^\vartheta \frac{(1-\cos\vartheta)^2 d\vartheta}{(1+n\cos\vartheta)^2 \Delta\vartheta}$$

$$\frac{(1-\cos\vartheta)^2 d\vartheta}{(1+n\cos\vartheta)^2 \Delta\vartheta} = -\frac{(1-nv)^2(1-v)^2 dv}{(1-n^2v^2)^2 \sqrt{(1-v^2)(k_1^2+k^2v^2)}}$$
$$= -\frac{\{1+(1+4n+n^2)v^2+n^2v^4\} dv}{(1-n^2v^2)^2 \sqrt{(1-v^2)(k_1^2+k^2v^2)}}$$
$$+ \frac{(1+n)(nv^2+1)2v\,dv}{(1-n^2v^2)^2\sqrt{(1-v^2)(k_1^2+k^2v^2)}}.$$

Wir brauchen also in den obigen Werten nur das Vorzeichen von n zu wechseln, da aber jetzt n^2-1 negativ ist, so erhalten wir:

$$\frac{(1+n)(nv^2-1)2v\,dv}{(1-n^2v^2)^2\sqrt{(1-v^2)(k_1^2+k^2v^2)}} = \frac{2(1+n)^2u^2du}{(k^2+n^2k_1^2+(1-n^2)u^2)^2}$$
$$+ \frac{2(1+n)(k^2-nk_1^2)du}{(k^2+n^2k_1^2+(1-n^2)u^2)^2}$$

Setzen wir wieder das erste Glied gleich $2(1+n)^2 H du$ und das zweite Glied gleich $2(1+n)(k^2+nk_1^2) J du$, so erhalten wir durch Integration:

$$\int H du = -\frac{u}{2(1-n^2)(k^2+n^2k_1^2+(1-n^2)u^2)}$$
$$+ \frac{1}{2(1-n)^2\sqrt{(k^2+n^2k_1^2)(1-n^2)}}$$
$$\times \operatorname{arc\,tg} \frac{u\sqrt{1-n^2}}{\sqrt{k^2+n^2k_1^2}}.$$

$$\int J\,du = \frac{u}{2(k^2+n^2k_1^2)\,(k^2+n^2k_1^2+(1-n^2)u^2)}$$
$$+\frac{1}{2(k^2+n^2k_1^2)\sqrt{(k^2+n^2k_1^2)\,(1-n^2)}}$$
$$\times \operatorname{arc\,tg}\frac{u\sqrt{1-n^2}}{\sqrt{k^2+n^2k_1^2}}.$$

Folglich ist das Integral des algebraischen Differentials gleich:

$$-\frac{n(1+n)^2u}{(1-n^2)(k^2+n^2k_1^2)(k^2+n^2k_1^2+(1-n^2)u^2)}$$
$$+\frac{(1+n)^2(2(k^2+n^2k_1^2)-n)}{(1-n^2)(k^2+n^2k_1^2)\sqrt{(k^2+n^2k_1^2)(1-n^2)}}$$
$$\times \operatorname{arc\,tg}\frac{u\sqrt{1-n^2}}{\sqrt{k^2+n^2k_1^2}},$$

Die untere Integrationsgrenze für ϑ ist 0 und dieser entspricht für u die Grenze ∞. Für $u=\infty$ wird das erste Glied $=0$, aber arc tg ∞ wird $=\frac{\pi}{2}$, welches also dann noch abzuziehen ist. Demnach ist, wenn wir wieder für u seinen Wert $\frac{\varDelta\vartheta}{\sin\vartheta}$ einsetzen:

$$\int_0^v \frac{(1+n)(nv^2+1)2v\,dv}{(1-n^2v^2)\sqrt{(1-v^2)\,(k_1^2+k^2v^2)}} =$$

$$-\frac{n(1+n)^2\sin\vartheta\,\varDelta\vartheta}{(1-n^2)(k^2+n^2k_1^2)\{(k^2+n^2k_1^2)\sin^2\vartheta+(1-n^2)\varDelta^2\vartheta\}}$$

$$-\frac{(1+n)^2\{2(k^2+n^2k_1^2)-n\}}{(1-n^2)(k^2+n^2k_1^2)\sqrt{(k^2+n^2k_1^2)(1-n^2)}}\left\{\operatorname{arc\,tg}\frac{\varDelta\vartheta\sqrt{1-n^2}}{\sin\vartheta\sqrt{k^2+n^2k_1^2}}-\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Dies ist der zweite Teil des ganzen Integrals; um den ersten zu erhalten, brauchen wir nur in dem entsprechenden Teil des vorigen Intervalls $-n$ für n zu setzen. Folglich erhalten wir, wenn wir wieder der Kürze wegen setzen:

$$D=\frac{r_1^2}{2acn^2\gamma_0};$$
$$E=\frac{r_1^2\{2\gamma_1+(3+n)(1-n)\gamma_0\}}{4acn^2\gamma_0};$$

$$F = \frac{r_1^2 \lambda \gamma_3}{2acn^2\gamma_0 k^2};$$

$$G = \frac{r_1^2\{\gamma_0 k^2(1-n)^2 - 2\gamma_3(k^2+\lambda)\}}{4acn^2\gamma_0 k^2};$$

$$L = \frac{r_1^2 n(1-n^2)}{4ac(k^2+n^2k_1^2)};$$

$$N = \frac{r_1^2(1-n^2)^{\frac{1}{2}}\{2(k^2+n^2k_1^2)-n\}}{4ac(k^2+n^2k_1^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und für ϑ seinen Wert $am\, a(\varphi+\varphi_0)$ einführen:

$$t+t_0 = \frac{D \sin am\, a(\varphi+\varphi_0)\cos am\, a(\varphi+\varphi_0)\Delta am\, a(\varphi+\varphi_0)}{1+\lambda\sin^2 am\, a(\varphi+\varphi_0)}$$

$$-Ea\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{1+\lambda \sin^2 am\, a(\varphi+\varphi_0)}$$

$$+Fa\int_0^\varphi \Delta^2 am\, a(\varphi+\varphi_0)\,d\varphi + Ga(\varphi+\varphi_0)$$

$$-\frac{L\sin am\, a(\varphi+\varphi_0)\Delta\, am\, a(\varphi+\varphi_0)}{(k^2+n^2k_1^2)\sin^2 am\, a(\varphi+\varphi_0)+(1-n^2)\Delta\, am\, a(\varphi+\varphi_0)}$$

$$+N\left\{\operatorname{arc\,tg}\frac{\Delta am\, a(\varphi+\varphi_0)\sqrt{1-n^2}}{\sin am\, a(\varphi+\varphi_0)\sqrt{k^2+n^2k_1^2}}-\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Zur Bestimmung der Zeitperiode verfahren wir, wie bei dem ersten Intervall in Fall 1), indem wir $\lambda = -k^2\sin^2 am\,\varepsilon$, also:

$$\sin^2 am\,\varepsilon = -\frac{n^2(P+Q)}{(1-n^2)Q}$$

setzen; dann ist ε imaginär. Bezeichnen wir ferner das erste, fünfte und sechste Glied resp. mit $D(\varphi)$, $L(\varphi)$ und $N(\varphi)$, so kommt wie in jenem Falle:

$$t+t_0 = D(\varphi) - Ea(\varphi+\varphi_0) - E\frac{\operatorname{tg} am\,\varepsilon}{\Delta am\,\varepsilon}$$

$$\times\left\{\frac{a(\varphi+\varphi_0)\,\Theta_1(\varepsilon)}{\Theta(\varepsilon)}+\tfrac{1}{2}l\frac{\Theta[a(\varphi+\varphi_0)-\varepsilon]}{\Theta[a(\varphi+\varphi_0)+\varepsilon]}\right\}$$

$$+Fa(\varphi+\varphi_0)\frac{E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)}{K}+F\frac{\Theta_1[a(\varphi+\varphi_0)]}{\Theta\,[a(\varphi+\varphi_0)]}$$

$$+Ga(\varphi+\varphi_0)+L(\varphi)+N(\varphi).$$

Der nicht periodische Teil von $t+t_0$ ist also:

$$a(\varphi+\varphi_0)\left\{-E-E\frac{\operatorname{tg} am\,\varepsilon\,\Theta_1'(\varepsilon)}{\varDelta am\,\varepsilon\,\Theta(\varepsilon)}+F\frac{E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)}{K}+G\right\},$$

und der periodische Teil ist:

$$D(\varphi)-\frac{E}{2}\frac{\operatorname{tg} am\,\varepsilon}{\varDelta am\,\varepsilon}\,l\,\frac{\Theta[a(\varphi+\varphi_0)-\varepsilon]}{\Theta[a(\varphi+\varphi_0)+\varepsilon]}+F\frac{\Theta_1[a(\varphi+\varphi_0)]}{\Theta\,[a(\varphi+\varphi_0)]}$$
$$+L(\varphi)+N(\varphi).$$

Die Glieder, in denen ε vorkommt, die also unter imaginärer Form erscheinen, sind alle beide reell und lassen sich in reeller Form darstellen; denn $\varDelta am\,\varepsilon$ ist reell, $\operatorname{tang} am\,\varepsilon$ imaginär, ebenso $\frac{\Theta_1(\varepsilon)}{\Theta\,(\varepsilon)}$, also das ganze zweite Glied des nicht periodischen Teils reell, und verwandelt man den vorkommenden Logarithmus in arctang, so erhält auch das ganze zweite Glied des periodischen Teils reelle Form.

Wenn nun φ um Φ wächst, dann nimmt der periodische Teil wieder denselben Wert an; und ist $\varphi+\varphi_0=\frac{n}{2}\Phi$, so wird der periodische Teil bei der Zunahme um $\frac{1}{2}\Phi$ immer gleich Null, wie wir in jenem Falle gesehen haben. Denn weil hier $a(\varphi+\varphi_0)$ um $4K$ zunimmt, wenn φ um Φ wächst, so nehmen dann alle Functionen von $am\,a(\varphi+\varphi_0)$ wieder denselben Wert an, im andern Falle wird immer $\sin am\,a(\varphi+\varphi_0)=0$, also $D(\varphi)$ und $L(\varphi)$ ebenfalls, und in $N(\varphi)$ wird $\operatorname{arctang}\infty=\frac{\pi}{2}$, also auch $N(\varphi)=0$. Die Zeitperiode, nach welcher r immer wieder denselben Wert erhält, ist also:

$$T=a\Phi\left\{G-E-E\frac{\operatorname{tg} am\,\varepsilon\,\Theta_1(\varepsilon)}{\varDelta am\,\varepsilon\,\Theta(\varepsilon)}+F\frac{E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)}{K}\right\}.$$

Um diesen Wert nimmt t stets zu, wenn φ um Φ wächst, d. h. wenn der Punkt M von einem Maximum zum folgenden geht. Ueberhaupt gilt hier, wie schon bemerkt, über die Bewegung des Punktes M dasselbe, was für das erste Intervall des Fall 1) stattfand.

Wird, beim Uebergang aus der einen Bedingung dieses Falles in die andere, $b=0$ d. h. $v_0^2=\frac{2k}{3r_0^3}$ so verschwinden die beiden imaginären Wurzeln und es wird:

$$R=r(2m-c^2r),$$

also:

$$r_1 = \frac{2m}{c^2}.$$

Dann kommt:

$$d\varphi = \frac{c\,dr}{\sqrt{r(2m - c^2 r)}},$$

folglich:

$$\varphi = c\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{r(2m - c^2 r)}}$$

$$= c\int_{0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{r(2m - c^2 r)}} - c\int_{0}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{r(2m - c^2 r)}}.$$

Setzen wir das zweite constante Glied wieder gleich φ_0, so ist:

$$\varphi + \varphi_0 = \arcsin\left(\frac{c^2 r - m}{m}\right) - \frac{3\pi}{2}$$

oder

$$\sin\left(\varphi + \varphi_0 + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{c^2 r}{m} - 1.$$

Als Polaraxe ist also hier die Tangente der Curve in O gewählt, wo $r = 0$ ist, während r bei der Bewegung des Punktes M dann schon den Winkel $\frac{3\pi}{2}$ zurückgelegt haben kann, wenn nämlich $\varphi_0 = 0$ gesetzt wird; denn, ist $r = 0$, also $\varphi = 0$, so ist $\sin\left(\varphi_0 + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$ für $\varphi = -\frac{3\pi}{2}$. Setzen wir dies ein, nehmen mithin den grössten Winkel, den r von seiner Anfangslage bis $r = 0$ beschreiben kann, so ist $\sin\varphi = \frac{c^2 r}{m} - 1$, und für $\varphi = 0$ ist $r = \frac{m}{c^2} = \frac{r_1}{2}$ nach obigem Wert von r_1, d. h. der Ausgang der Bewegung wird von dem Radius $r = \frac{r_1}{2}$ gerechnet, während für $r = 0$ der Winkel $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ist. Für $r = 0$ ist also $\varphi + \varphi_0 = 0$; für $r = \frac{r_1}{4} = \frac{m}{2c^2}$ ist $\varphi + \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{3}$; für $r = \frac{r_1}{2}$ ist $\varphi + \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$; für $r = \frac{3}{4}r_1$ ist $\varphi + \varphi_0 = +\pi \mp \frac{\pi}{3} = \pm\frac{2\pi}{3}$; für $r = r_1$ ist $\varphi + \varphi_0 = \pi$; und für $\varphi + \varphi_0 = \pm\left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{3}\right)$ wird $r = (2 \mp \sqrt{3})\frac{r_1}{4}$.

Daraus ersehen wir, dass die Curve eine geschlossene ist; denn wenn $\varphi + \varphi_0$ um 2π wächst, so nimmt r wieder denselben Wert an; ferner, dass sie zur Polaraxe, also zur Tangente in O, wo sie eine Spitze hat, symmetrisch liegt.

Aus obigen Gleichungen folgt auch:

$$r = \left\{1 + \sin\left(\varphi + \varphi_0 + \frac{3\pi}{2}\right)\right\} \frac{r_1}{2},$$

und wenn φ um π wächst:

$$r = \left\{1 - \sin\left(\varphi + \varphi_0 + \frac{3\pi}{2}\right)\right\} \frac{r_1}{2},$$

also die Summe beider Radien d. h. jeder durch O gezogene Durchmesser der Curve ist gleich r_1.

Setzen wir schliesslich in $r_1 = \frac{2m}{c^2}$ für c seinen Wert $r_0 v_0 \sin\alpha_0$, und dann für v_0^2 den aus $b = 0$ resultirenden Wert $v_0^2 = \frac{2m}{r_0^3}$ ein, so kommt $r_1 = \frac{r_0}{\sin^2\alpha_0}$, und da jedes r zum Anfangswert r_0 genommen werden kann, so ergiebt sich daraus immer der zugehörige Winkel α; man hat also allgemein $r_1 = \frac{r}{\sin^2\alpha}$. Soll also r_0 den Wert r_1 haben, so muss $\sin^2\alpha = 1$ sein oder $\sin\alpha = \pm 1$ d. h. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ oder $= \frac{3\pi}{2}$; die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss also mit r_0 einen rechten oder überrechten Winkel bilden. Die Bewegung des Punktes M ist von der Lage $r = \frac{r_1}{2}$ aus gerechnet, also ist in diesem Punkte der Winkel α_0, welchen die Richtung der Geschwindigkeit v_0 mit dem Radius $r_0 = \frac{r_1}{2}$ bildet, gleich 45^0. Die Curve wird also in diesem besonderen Falle eine Gestalt haben ähnlich der in Figur V.

Aus der Gleichung: $dt = \frac{r^2 d\varphi}{c}$ erhalten wir durch Substitution:

$$dt = \frac{r^2 dr}{\sqrt{r(2m - rc^2)}},$$

folglich:

$$t = \int_0^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{r(2m - c^2 r)}} - \int_0^{r_0} \frac{r^2 dr}{\sqrt{r(2m - c^2 r)}}.$$

Setzen wir wieder das zweite constante Glied gleich t_0, so erhalten wir:

$$t+t_0 = -\frac{c^2r+3m}{2c^4}\sqrt{r(2m-c^2r)}$$

$$+\frac{3m^2}{2c^5}\left\{\arcsin\left(\frac{c^2r}{m}-1\right)-\frac{3\pi}{2}\right\}$$

$$= -\frac{c^2r+3m}{2c^4}\sqrt{r(2m-c^2r)}+\frac{3m^2}{2c^5}(\varphi+\varphi_0).$$

Bezeichnen wir den Sector mit u, so ist:

$$du = \frac{r^2\,d\varphi}{2} = \frac{c}{2}dt;$$

folglich ist:

$$u+u_0 = -\frac{c^2r+3m}{4c^3}\sqrt{r(2m-c^2r)}+\frac{3m^2}{4c^4}(\varphi+\varphi_0).$$

Wenn nun φ um 2π wächst, dann nimmt r wieder denselben Wert an, folglich wächst dann t immer um ein bestimmtes Zeitintervall:

$$T = \frac{3m^2\pi}{c^5},$$

und die ganze Fläche, die dann r beschrieben hat, ist also:

$$U = \frac{3m^2\pi}{2c^4} = \frac{3r_1^2\pi}{8}.$$

Es ergiebt sich also für diesen Fall bei verschiedenen Anfangsradien aber gleicher Richtung der Geschwindigkeit v_0 die Relation: Die Flächen verhalten sich wie die Quadrate homologer Radien.

Jeder Punkt der Curve kann als Anfangspunkt der Bewegung betrachtet werden mit Ausnahme des Anziehungspunktes O. Der Punkt M geht dann gemäss der empfangenen Richtung auf der Bahn weiter, bis er in O ankommt; und zwar mit verzögerter Geschwindigkeit, wenn er sich von O entfernt, im entgegengesetzten Falle mit beschleunigter Geschwindigkeit. In O erreicht die Bewegung ihr Ende; der Punkt M kann also fast die ganze Bahn durchlaufen, aber nur einmal.

Negative Zweige d. h. Bahnen, welche der Punkt M unter sonst gleichen Bedingungen aber bei negativem k oder bei Abstossung beschreiben würde, können in diesem besonderen Falle nicht resultiren, da derselbe für negative k überhaupt nicht möglich ist; denn dann ist b immer grösser als 0.

Den negativen Zweig, welchen wir unter der Bedingung $b > 0$ in diesem Fall 3) erhalten haben, würde der Punkt M, wie wir wissen, unter denselben Bedingungen bei gleichem aber entgegengesetztem k d. h. bei Abstossung beschreiben. Dieser Fall entspricht dem Fall 6), denn in letzterem kann sich r bewegen innerhalb der Grenzen $+r_3$ bis $+\infty$ und von $-\infty$ bis 0 und wieder zurück; der negative Zweig in Fall 3) tritt also in Fall 6) als positiver auf und umgekehrt. Wir haben also mit Fall 3) zugleich Fall 6) gelöst. Im Allgemeinen hat nun in diesem Falle der negative Zweig dieselbe Gestalt wie im Fall 1) resp. Fall 2), mithin ist auch im Fall 6) der positive Teil der Curve ähnlich gestaltet wie dieselben in Fall 4) und Fall 5). Ueber den Verlauf der Curve und der Bewegung des Punktes M gilt also im Fall 6) im Allgemeinen dasselbe wie im Fall 4) und 5) d. h. das, was in Betreff der negativen Zweige im zweiten Intervall des Fall 1) bemerkt wurde. Bei negativen Werten von k d. h. bei Abstossung resultiren stets ähnlich gestaltete und sehr einfache Curven, während bei positiven Werten von k d. h. bei Anziehung eine grössere Mannigfaltigkeit in der Gestaltung der Curven auftritt.

XX.

Die Brennpunkte der Differentialcurve der Parabel.

Von

Adolf Hochheim.

---

1) Ein Punkt F wird ein Brennpunkt einer Curve genannt, wenn die von ihm nach den unendlich fernen Kreispunkten gezogenen Geraden die Curve berühren. Die Differentialcurve der Parabel, deren Gleichung

$$y^2 x - \frac{k^2 p}{4} = 0 \tag{1}$$

ist, gehört der dritten Classe an; sie kann demnach 9 Brennpunkte besitzen, welche mit den Schnittpunkten der sechs Tangenten, die sich im Ganzen von den Kreispunkten construiren lassen, zusammenfallen. Von diesen 9 Punkten sind indessen nur 3 reell, die übrigen 6 sind imaginär.

Ist $M + Ni = 0$ die Gleichung, welcher die von dem einen unendlich fernen Kreispunkte ausgezogenen Tangenten entsprechen, so ist $M - Ni = 0$ die Gleichung der von dem anderen ausgehenden Tangenten, woraus folgt, dass durch

$$M = 0, \quad N = 0 \tag{2}$$

die Schnittpunkte der beiden Geradensysteme bestimmt sind.

2) Zur Bestimmung der Relationen (2) möge die Gleichung

$$\lambda^3 U + \frac{\lambda^2 u}{1}(U_1 + iU_2) + \frac{\lambda u^2}{1.2}(U_{11} + 2iU_{12} - U_{22})$$
$$+ \frac{u^3}{1.2.3}(U_{111} + 3iU_{112} - 3U_{122} - iU_{222}) = 0 \tag{3}$$

dienen, in der

U_1, U_2 die ersten,
U_{11}, U_{12}, U_{22} die zweiten,
U_{111}, U_{112}, U_{122}, U_{222} die dritten

Differentiale von U (der Gleichung der Differentialcurve der Parabel) nach x resp. y sind. Man entwickelt die Discriminante derselben, d. h. man differentiirt die Gleichung (3) nach λ und u, bildet in den beiden sich ergebenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &3\left(\frac{\lambda}{u}\right)^2 U+2\frac{\lambda}{u}(U_1+iU_2)+\frac{1}{1.2}(U_{11}+2iU_{12}-U_{22})=0,\\ &\left(\frac{\lambda}{u}\right)^2(U_1+iU_2)+\frac{\lambda}{u}(U_{11}+2iU_{12}-U_{22})\\ &\qquad+\frac{1}{1.2}(U_{111}+3iU_{112}-3U_{122}-iU_{222})=0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

durch Elimination von $\frac{\lambda}{u}$ die Resultante und setzt den reellen Teil derselben, so wie den Coefficienten von i gleich Null.

Da hier

$$U_1=y^2,\quad U_2=2yx,$$
$$U_{11}=0,\quad U_{12}=2y,\quad U_{22}=2x,$$
$$U_{111}=0,\quad U_{112}=0,\quad U_{122}=2,\quad U_{222}=0$$

ist, so ergeben sich zur Bestimmung der Coordinaten der Brennpunkte die beiden Gleichungen

$$x^3-3xy^2+\frac{27}{16}k^2p=0 \tag{5a}$$

$$3yx^2-y^3=0. \tag{5b}$$

3) Nach der Gleichung (5a) liegen die drei Brennpunkte der Differentialcurve der Parabel auf einer Curve dritter Ordnung, welche aus drei getrennten Teilen besteht. Zwei derselben breiten sich rechts von der Y-Axe symmetrisch zur X-Axe aus, haben die Y-Axe zur gemeinschaftlichen Asymptote und besitzen für

$$x=+\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{4}}$$

Culminationspunkte. Der dritte Teil breitet sich symmetrisch zum negativen Teile der X-Axe aus und schneidet denselben in der Ent-

fernung $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}}$ vom Coordinatenanfangspunkte. Zwischen $x=0$ und $x=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}}$ befindet sich kein Teil der Curve.

Aus Gleichung (5b) folgt

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ y=\pm x\sqrt{3} \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Von den drei Brennpunkten muss demnach der eine auf der X-Axe, die beiden anderen auf den Geraden liegen, welche durch den Coordinatenanfangspunkt gehen und mit der X-Axe Winkel von 60^0 und 120^0 einschliessen.

4) Die Brennpunkte mögen mit F_1, F_2, F_3 bezeichnet werden. Nach den Gleichungen (5a), (5b) sind die Coordinaten

$$\text{von } F_1\text{:}\quad -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}},\quad 0,$$

$$\text{von } F_2\text{:}\quad \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}},\quad +\frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}},$$

$$\text{von } F_3\text{:}\quad \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}},\quad -\frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}}.$$

Die Brennpunkte der Differentialcurve liegen also auf der Peripherie eines Kreises, der mit dem Radius $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}}$ um den Coordinatenanfangspunkt beschrieben ist, und zwar bilden sie die Ecken eines demselben einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

5) Da sich in jedem Brennpunkte zwei von den unendlichen Kreispunkten ausgehende Tangenten schneiden, so muss sich von jedem noch eine dritte Tangente an die Differentialcurve ziehen lassen. Die durch den Punkt F_1 gehende fällt mit der X-Axe zusammen und berührt die Differentialcurve in dem Rückkehrpunkte in der Unendlichkeit. Die von den Punkten F_2 und F_3 ausgehenden Tangenten dagegen haben ihre Berührungspunkte in

$$\left(\frac{1}{6}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}},\quad \mp\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}k^2p}{2}}\right).$$

Diese drei Tangenten schneiden sich in dem Punkte

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}},\quad 0\right),$$

den wir kurz mit ξ_1 bezeichnen wollen.

6) Im Punkte (x_1, y_1) sei an die Differentialcurve der Parabel eine Tangente t gelegt. Fällt man von den Punkten F_1, F_2, F_3, ξ_1 auf die Gerade (t) die Lote p_1, p_2, p_3, p_4, so ist

$$p_1 = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{p}{x_1}}\left(\frac{k}{2}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}} + x_1\right)}{\sqrt{\frac{k^2p}{16x_1} + x_1^2}},$$

$$p_2 = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{p}{x_1}}\left(\frac{k}{4}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}} - x_1\right) + \frac{3\sqrt{3}}{4}x_1\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}}}{\sqrt{\frac{k^2p}{16x_1} + x_1^2}};$$

$$p_3 = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{p}{x_1}}\left(\frac{k}{4}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}} - x_1\right) - \frac{3\sqrt{3}}{4}x_1\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}}}{\sqrt{\frac{k^2p}{16x_1} + x_1^2}},$$

$$p_4 = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{p}{x_1}}\left(\frac{k}{2}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}} - 3x_1\right)}{\sqrt{\frac{k^2p}{16x_1} + x_1^2}}.$$

Daraus folgt:

$$p_1p_2p_3 = \frac{27}{16}kp_4\sqrt[3]{\frac{k^4p^2}{4}} \tag{7}$$

d. h. das Product der drei Brennpunktsabstände einer Tangente ist der Entfernung des Punktes ξ_1 von derselben Tangente proportional.

7) Von den Punkten F_1, F_2, F_3, ξ_1 seien nach dem Berührungspunkte der Tangente (t) die Strahlen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 gezogen. Bezeichnet man die Projectionen dieser Strahlen auf die Tangente mit q_1, q_2, q_3, q_4, so lässt sich mit Hülfe des vorigen Satzes leicht zeigen, dass

$$\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_2}{p_2}+\frac{q_3}{p_3}-\frac{q_4}{p_4}=0,$$

oder

$$\cot\varphi_1+\cot\varphi_2+\cot\varphi_3-\cot\varphi_4=0, \tag{8}$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ die Neigungswinkel der Strahlen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ gegen die Tangente sind,

d. h. Zieht man nach einem Punkte der Differentialcurve drei Brennstrahlen, so ist die Summe der Cotangenten derjenigen Winkel, welche dieselben mit der Tangente einschliessen gleich der Cotangente des Winkels, unter dem die von dem Punkte ξ_1 nach demselben Punkte der Differentialcurve gezogene Linie gegen die Tangente geneigt ist.

8) Betrachtet man die Brennpunkte F_1, F_2, F_3 als Pole, so sind die Gleichungen der conischen Polaren derselben bezüglich der Differentialcurve der Parabel in homogenen Hesse'schen Coordinaten

$$y_1^2+\sqrt[3]{\frac{k^4p^2}{4}}\,z_1^2=0 \tag{9a}$$

$$y_1^2+2\sqrt{3}\,y_1x_1-\sqrt[3]{2k^4p^2}\,z_1^2=0 \tag{9b}$$

$$y_1^2-2\sqrt{3}\,y_1x_1-\sqrt[3]{2k^4p^2}\,z_1^2=0 \tag{9c}$$

Daraus folgt: Die conische Polare des Punktes F_1 besteht aus zwei imaginären Geraden; dagegen sind die conischen Polaren der Punkte F_2 und F_3 zwei congruente Hyperbeln, deren Mittelpunkte im Coordinatenanfangspunkte zusammenfallen. Beide haben die X-Axe zur gemeinschaftlichen Asymptote und berühren die Differentialcurve im Rückkehrpunkte in der Unendlichkeit. Die Axen derselben schliessen mit der X-Axe supplementäre Winkel ein.

9) Die Gleichungen der geraden Polaren der Brennpunkte F_1, F_2, F_3 bezüglich der Differentialcurve der Parabel sind:

$$z_1=0 \tag{10a}$$

$$9x_1+6\sqrt{3}\,y_1-8\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}}\,z_1=0 \tag{10b}$$

$$9x_1-6\sqrt{3}\,y_1-8\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}}\,z_1=0 \tag{10c}$$

Die gerade Polare des Punktes F_1 ist demnach die unendlich ferne Gerade; dagegen liegen die geraden Polaren der Punkte F_2 und F_3

in der Endlichkeit symmetrisch zur X-Axe und schneiden sich in derselben in der Entfernung $\frac{8}{9}\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}}$ vom Coordinatenanfangspunkte.

10) Betrachtet man die beiden Geraden, welche den Gleichungen (10b) und (10c) entsprechen, als gerade Polaren bezüglich der Differentialcurve, so ergeben sich zur Bestimmung der endlichen Pole derselben die Relationen

$$\eta^2-\frac{27}{16}\sqrt[3]{\frac{k^4p^2}{4}}\zeta^2=0,\quad \eta\xi-\frac{9\sqrt{3}}{16}\sqrt[3]{\frac{k^4p^2}{4}}\zeta^2=0 \tag{11a}$$

$$\eta^2-\frac{27}{16}\sqrt[3]{\frac{k^4p^2}{4}}\zeta^2=0,\quad \eta\xi+\frac{9\sqrt{3}}{16}\sqrt[3]{\frac{k^4p^2}{4}}\zeta^2=0 \tag{11b}$$

Daraus folgt: α) Zieht man in dem Brennpunktkreise durch einen der beiden Brennpunkte F_2 oder F_3 einen Durchmesser, so fallen die geraden Polaren der Endpunkte dieses Durchmessers bezüglich der Differentialcurve zusammen. β) Die conischen Polaren aller Punkte der Geraden, welche der Gleichung (10b) [oder (10c)] entspricht, bezüglich der Differentialcurve, bilden ein Büschel von Hyperbeln, welche durch die Endpunkte des Durchmessers gehen, der sich durch F_2 [oder F_3] im Brennpunktkreise ziehen lässt, und sich im Rückkehrpunkte der Differentialcurve berühren.

11) Erklärung. Zieht man von dem Punkte m Tangenten an die conische Polare des Punktes n in Bezug auf die Differentialcurve, und von dem Punkte n Tangenten an die conische Polare des Punktes m, so liegen die vier Berührungspunkte in einer Geraden, welche die gemischte Polare der beiden Punkte m und n genannt wird.

Die Gleichungen der gemischten Polaren von F_1 und F_2, F_1 und F_3, F_2 und F_3 bezüglich der Differentialcurve der Parabel sind

$$\frac{3}{4}\sqrt{3}\,y+\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}}\,z=0 \tag{12a}$$

$$\frac{3}{4}\sqrt{3}\,y-\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}}\,z=0 \tag{12b}$$

$$\frac{9}{8}x+\sqrt[3]{\frac{k^2p}{2}}\,z=0 \tag{12c}$$

d. h. Die gemischten Polaren von F_1 und F_2, und von F_1 und F_3 laufen der X-Axe, dagegen die gemischte Polare von F_2 und F_3 der Y-Axe parallel.

12) Gegeben sei eine Gerade G, welche der Gleichung

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0 \tag{13}$$

entspricht. Construirt man zu jedem Punkte derselben bezüglich der Differentialcurve der Parabel die gerade Polare, so ist die Enveloppe derselben (Poloconik der Geraden G) eine Parabel, deren Gleichung ist

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 0 & 2y & 0 \\ a_2 & 2y & 2x & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}k^2 p z \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

13) Lässt man die Gerade G durch zwei Brennpunkte der Differentialcurve der Parabel hindurchgehen, so ergeben sich folgende Resultate:

α) Die Poloconik der Geraden $F_2 F_3$ ist eine Parabel, deren Scheitel im Coordinatenanfangspunkte liegt, deren Axe mit dem negativen Teile der Abscissenaxe zusammenfällt und deren Parameter gleich $\frac{8}{3}\sqrt[3]{\frac{k^2 p}{2}}$ ist.

β) Die Poloconiken der beiden Geraden $F_1 F_2$ und $F_1 F_3$ besitzen denselben Parameter

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{k^2 p}{2}}$$

und ihre Axen laufen in gleichen Abständen der X-Axe parallel.

14) Durch den Punkt M sei ein System von Geraden G_1, G_2, $G_3 \dots$ gezogen und zu jeder derselben die zugehörige Poloconik construirt. Da der Punkt M auf jeder der Geraden liegt, so muss auch jede Poloconik von den geraden Polaren des Punktes M bezüglich der Differentialcurve der Parabel berührt werden.

Mit Berücksichtigung von 9_1 findet man hieraus:

Schneiden sich die Geraden G_1, G_2, $G_3 \dots$ in dem Brennpunkte F_1, so besitzen die denselben zugehörigen Poloconiken die unendlich ferne Gerade zur gemeinschaftlichen Tangente.

Magdeburg, im Februar 1875.

XXI.

Application des Déterminants aux surfaces de révolution et en particulier à celles du second degré.

Par

Georges Dostor.

---

1. Condition pour qu'une surface

$$f(x,y,z)=0 \tag{1}$$

soit de révolution. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la surface (1). La normale en ce point a pour équations

$$\frac{X-x}{f_x'}=\frac{Y-y}{f_y'}=\frac{Z-z}{f_z'}=u, \tag{2}$$

les axes des coordonnées étant rectangulaires, et X, Y, Z désignant les coordonnées courantes de cette droite.

La surface (1) sera évidemment de révolution autour de la droite

$$\frac{X-p}{a}=\frac{Y-q}{b}=\frac{Z-r}{c}=v, \tag{3}$$

si cette ligne est toujours rencontrée par la normale (2), quel que soit le point M ou (x,y,z) de la surface (1). Pour que cela ait toujours lieu, il faut et il suffit que les équations (2) et (3) admettent toujours un même système de valeurs pour X, Y, Z.

Ces équations au nombre de six, contiennent au premier degré les cinq inconnues X, Y, Z, u et v; si donc nous éliminons ces cinq inconnues entre les six équations (2) et (3), nous obtiendrons une relation entre les paramètres de la surface donnée (1), ceux de l'équation (3) et les coordonnées x, y, z du point M.

Cette relation se calcule aisément. En effet, les équations (2) et (3) pouvant s'écrire

$$X-uf_x'-x=0,\quad Y-uf_y'-y=0,\quad Z-uf_z'-z=0,$$
$$av-X+p=0,\quad bv-Y+q=0,\quad cv-Z+r=0,$$

nous éliminerons d'abord X, Y, Z en ajoutant verticalement, ce qui fournit les trois équations

$$av-uf_x'-(x-p)=0,$$
$$bv-uf_y'-(y-q)=0,$$
$$cv-uf_z'-(z-r)=0,$$

entre les deux inconnues u et v.

Pour que ces trois équations soient compatibles, il faut et il suffit que leur déterminant soit nul. Nous trouvons ainsi la relation demandée

$$\text{(I)}\qquad \begin{vmatrix} a & f_x' & x-p \\ b & f_y' & y-q \\ c & f_z' & z-r \end{vmatrix}=0,$$

dans la quelle nous avons changé les signes des éléments des deux dernières colonnes.

Cette relation est l'équation aux différences partielles des surfaces de révolution. Elle doit exister quelle que soit la position du point M sur la surface (1), ou quelles que soient les valeurs des coordonnées x, y, z satisfaisant à l'équation (1).

Or on sait qu'un déterminant s'annule, lorsque deux lignes ou deux colonnes deviennent identiques ou qu'elles ne diffèrent que par un facteur constant. Il faudra donc que l'une des deux colonnes variables, la seconde par exemple, soit égale à la troisième multipliée par un facteur constant m. On obtient ainsi les égalités

$$f_x'=m(x-p),\quad f_y'=m(y-q),\quad f_z'=m(z-r),$$

qui donnent

$$\text{(II)}\qquad \frac{x-p}{f_x'}=\frac{y-q}{f_y'}=\frac{z-r}{f_z'}.$$

Ces égalités devant avoir lieu quels que soient x, y, z, on en déduit immédiatement les relations auxquelles devront satisfaire les paramètres ou les coefficients de l'équation (1) pour que celle-ci représente une surface de révolution.

La relation de condition (I) étant développée prend la forme

(III)

$$\frac{1}{a}\left[\frac{y-q}{b}-\frac{z-r}{c}\right]f_x'+\frac{1}{b}\left[\frac{z-r}{c}-\frac{x-p}{a}\right]f_y'+\frac{1}{c}\left[\frac{x-p}{a}-\frac{y-q}{b}\right]f_z'=0.$$

2. Conditions pour que l'équation générale du second degré

(4)
$$f(x,y,z)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy$$
$$+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$

représente une surface de révolution. L'axe de révolution passe nécessairement par le centre de la surface, lequel est déterminé par le système des trois équations

$$f_x'=0,\quad f_y'=0,\quad f_z'=0.$$

Les équations de l'axe sont par suite de la forme

(5)
$$\frac{AX+B''Y+B'Z+C}{\alpha}=\frac{B''X+A'Y+BZ+C'}{\alpha'}$$
$$=\frac{B'X+BY+A''Z+C''}{\alpha''}=v$$

où α, α', α'' sont trois constantes indéterminées et v une inconnue.

Dans ces équations (5) substituons à X, Y, Z leurs valeurs

$$X=x+uf_x',\quad Y=y+uf_y',\quad Z=z+uf_z'$$

tirées des équations (2) de la normale; la première devient

$$\begin{aligned}\alpha v &= A(x+uf_x')+B''(y+uf_y')+B'(z+uf_z')+C\\ &= Ax+B''y+B'z+C+u(Af_x'+B''f_y'+B'f_z')\\ &= \tfrac{1}{2}f_x'+u(Af_x'+B''f_y'+B'f_z').\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi les trois équations

$$\begin{aligned}-2\alpha v+f_x'+2u(Af_x'+B''f_y'+B'f_z')&=0,\\ -2\alpha'v+f_y'+2u(B''f_x'+A'f_y'+Bf_z')&=0,\\ -2\alpha''v+f_z'+2u(B'f_x'+Bf_y'+A''f_z')&=0,\end{aligned}$$

entre les deux inconnues $-2v$ et $2u$. Eliminant ces inconnues nous trouvons la relation de condition

(IV)
$$\begin{vmatrix}\alpha & f_x' & Af_x'+B''f_y'+B'f_z'\\ \alpha' & f_y' & B''f_x'+A'f_y'+Bf_z'\\ \alpha'' & f_z' & B'f_x'+Bf_y'+A''f_z'\end{vmatrix}=0.$$

Ce déterminant doit être identiquement nul, quelle que soit la position du point (x, y, z) sur la surface (4); par suite il faut et il suffit que les deux colonnes variables, la seconde et la troisième ne diffèrent que par un facteur constant.

Soit s le facteur constant qui rend les éléments de la seconde colonne égaux à ceux de la troisième; nous obtenons les trois égalités

$$(6) \qquad \begin{cases} sf_x' = Af_x' + B''f_y' + B'f_z', \\ sf_y' = B''f_x' + A'f_y' + Bf_z', \\ sf_z' = B'f_x' + Bf_y' + A''f_z'. \end{cases}$$

Ne considérons que le cas où les coefficients B, B', B'' des rectangles des variables soient tous différents de zéro.

Si nous éliminons f_z' entre la première et la seconde des équations (6), f_x' entre la seconde et la troisième, il nous vient

$$(Bs - AB + B'B'')f_x' = (B's - A'B' + B''B)f_y' = (B''s - A''B'' + BB')f_z.$$

Or dans ces trois produits les facteurs f_x', f_y', f_z' sont variables; car leurs valeurs changent avec la position du point (x, y, z) sur la surface (4); par suite, pour que ces égalités soient possibles, il faut et il suffit que l'on ait

$$0 = Bs - AB + B'B'' = B's - A'B' + B''B = B''s - A''B'' + BB'.$$

On en déduit les relations de condition connues:

$$(\mathrm{V}) \qquad s = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

3. **Forme implicite des équations de l'axe de révolution.** Nous les obtiendrons au moyen des égalités (5) en y substituant les valeurs propres de α, α', α'' que nous allons calculer.

Dans le déterminant (IV) multiplions les trois lignes respectivement par B, B', B'', puis remplaçons dans le résultat AB, $A'B'$, $A''B''$ par leurs valeurs $Bs + B'B''$, $B's + B''B$, $B''s + BB'$ tirées des relations (V); l'équation (IV) devient

$$\begin{vmatrix} B\alpha & Bf_x' & Bsf_x' + B'B''f_x' + B''Bf_y' + BB'f_z' \\ B'\alpha' & B'f_y' & B'sf_y' + B'B''f_x' + B''Bf_y' + BB'f_z' \\ B''\alpha'' & B''f_y' & B''sf_z' + B'B''f_x' + B''Bf_y' + BB'f_z' \end{vmatrix} = 0$$

ou en retranchant z fois la seconde colonne de la troisième et en divisant la troisième colonne résultante par $B'B''f_x' + B''Bf_y' + BB'f_z'$,

$$\begin{vmatrix} B\alpha & f_x' & 1 \\ B'\alpha' & f_y' & 1 \\ B''\alpha'' & f_z' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que cette égalité puisse avoir lieu, quels que soient x, y, z, il faut et il suffit que les colonnes à éléments constants ne diffèrent que par un facteur constant m; on a donc

$$B\alpha = B'\alpha' = B''\alpha'' = 1.m = m$$

d'où on tire

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{B}{m}, \quad \frac{1}{\alpha'} = \frac{B'}{m}, \quad \frac{1}{\alpha''} = \frac{B''}{m}.$$

Substituons ces valeurs dans les égalités (5) et prenons x, y et z pour les coordonnées courantes, nous obtenons immédiatement

$$B(Ax + B''y + B'z + C) = B'(B''x + A'y + Bz + C')$$
$$= B''(B'x + By + A''z + C'')$$

ou

$$Bf_x' = B'f_y' = B''f_z'$$

pour les équations de l'axe de révolution.

Nous renvoyons, pour plus de détail à l'Article XXVI de ce Journal, 1873, t. LV, page 302, où nous avons donné la Théorie générale des surfaces de révolution du second degré d'une manière indépendante des déterminants.

XXII.

Expression en déterminant de la surface d'un triangle de l'espace, en valeurs des coordonnées de ses trois sommets.

Par

Georges Dostor.

1. Supposons d'abord que le sommet A du triangle ABC soit situé à l'origine des coordonnées, et soient x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 les

coordonnées des deux autres sommets B et C. Si nous désignons par S la surface du triangle, et par b et c les côtés AC et AB qui sont opposés aux sommets B et C, il nous viendra de suite

$$4S^2 = b^2c^2\sin^2 A = b^2c^2 - b^2c^2\cos^2 A,$$

ou

$$(1) \qquad 4S^2 = \begin{vmatrix} c^2 & bc\cos A \\ bc\cos A & b^2 \end{vmatrix}$$

Représentons par α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2 les inclinaisons des deux côtés AB et AC sur les axes de coordonnées, supposés rectangulaires, nous aurons

$$x_1 = c\cos\alpha_1, \quad y_1 = c\cos\beta_1, \quad z_1 = c\cos\gamma_1;$$
$$x_2 = b\cos\alpha_2, \quad y_2 = b\cos\beta_2, \quad z_2 = b\cos\gamma_2;$$

et, comme

$$\cos A = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2,$$

nous obtenons, en multipliant par bc, puis en substituant,

$$bc\cos A = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2;$$

on sait d'ailleurs que

$$c^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad b^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

Donc on obtient, en mettant ces valeurs dans l'égalités (1)

$$(I) \qquad 4S^2 = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{vmatrix}$$

Il n'est pas inutile de remarquer que ce déterminant est la somme des carrés des trois déterminants qui sont compris dans le déterminant multiple

$$\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{Vmatrix},$$

et qui expriment les doubles projections de la surface du triangle ABC sur les trois plans de coordonnées.

2. Transportons actuellement l'origine des coordonnées en un point quelconque 0 de l'espace dont les coordonnées sont $-x$, $-y$, $-z$; et soient x', y', z'; x'', y'', z'' les nouvelles coordonnées des deux sommets B et C; les coordonnées du sommet A par rapport à la nouvelle origine sont x, y, z.

Cela posé, nous avons

$$x_1 = x' - x, \quad y_1 = y' - y, \quad z_1 = z' - z;$$
$$x_2 = x'' - x, \quad y_2 = y'' - y, \quad z_2 = z'' - z;$$

d'où nous tirons

$$\begin{aligned}
x_1^2+y_1^2+z_1^2 &= (x'-x)^2+(y'-y)^2(z'-z)^2 \\
&= (x^2+y^2+z^2)+(x'^2+y'^2+z'^2)-2(xx'+yy'+zz'), \\
x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 &= (x'-x)(x''-x)+(y'-y)(y''-y)+(z'-z)(z''-z) \\
&= (x^2+y^2+z^2)+(x'x''+y'y''+z'z'') \\
&\quad -(xx''+yy''+zz'')-(xx'+yy'+zz'), \\
x_2^2+y_2^2+z_2^2 &= (x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2 \\
&= (x^2+y^2+z^2)+(x''^2+y''^2+z''^2)-2(xx''+yy''+zz'').
\end{aligned}$$

Si nous posons

$$(2)\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=l, & x'^2+y'^2+z'^2=m, \quad x''^2+y''^2+z''^2=n, \\ x'x''+y'y''+z'z''=p, & x''x+y''y+z''z=q, \quad xx'+yy'+zz'=r, \end{cases}$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
x_1^2+y_1^2+z_1^2 &= l+m-2r, \\
x_2^2+y_2^2+z_2^2 &= l+n-2q, \\
x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 &= l+p-q-r.
\end{aligned}$$

La substitution de ces valeurs dans la formule (I) nous donne

$$4S^2 = \begin{vmatrix} l+m-2r & l+p-q-r \\ l+p-q-r & l+n-2q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & r & q \\ 0 & l+m-2r & l+p-q-r \\ 0 & l+p-q-r & l+n-2q \end{vmatrix},$$

ou, en ajoutant la première ligne aux deux suivantes,

$$4S^2 = \begin{vmatrix} 1 & r & q \\ 1 & l+m-r & l+p-r \\ 1 & l+p-q & l+n-q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l & 1 & r & q \\ r & 1 & l+m-r & l+p-r \\ q & 1 & l+p-q & l+n-q \end{vmatrix}.$$

Dans ce dernier déterminant multiplions la seconde colonne par $-l$ puis ajoutons la somme des deux premières colonnes à chacune des deux suivantes; il nous vient

$$4S^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ l & 1 & r & q \\ r & 1 & m & p \\ q & 1 & p & n \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & l & r & q \\ 1 & r & m & p \\ 1 & q & p & n \end{vmatrix}.$$

Si nous remplaçons ici les éléments l, m, n et p, q, r par leurs expressions (2), nous obtiendrons enfin pour $4S^2$ la valeur cherchée

$$(\text{II})\ 4S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2+y^2+z^2 & xx'+yy'+zz' & xx''+yy''+zz'' \\ 1 & xx'+yy'+zz' & x'^2+y'^2+z'^2 & x'x''+y'y''+z'z'' \\ 1 & xx''+yy''+zz'' & x'x''+y'y''+z'z'' & x''^2+y''^2+z''^2 \end{vmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que ce déterminant est le produit des deux déterminants multiples

$$\Delta = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & x' & y' & z' \\ 0 & 1 & x'' & y'' & z'' \end{Vmatrix}, \quad \Delta = -\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & y & z \\ 1 & 0 & x' & y' & z' \\ 1 & 0 & x'' & y'' & z'' \end{Vmatrix}.$$

3. Surface des la base d'un tétraèdre en valeur des trois arêtes latérales a, b, c et de leurs inclinaisons mutuelles λ, μ, ν. Considérons le tétraèdre $SABC$ qui a le triangle ABC pour base et son sommet S placé à l'origine des coordonnées. Posons

$$\text{l'arête}\quad SA = a, \quad SB = b, \quad SC = c,$$
$$\text{et l'angle}\ BSC = \lambda, \quad CSA = \mu, \quad ASB = \nu.$$

Nous avons évidemment

$$x^2+y^2+z^2 = a^2, \quad x'^2+y'^2+z'^2 = b^2, \quad x''^2+y''^2+z''^2 = c^2;$$

puis

$$AB^2 \text{ ou } (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 = a^2+b^2-2ab\cos\nu,$$

d'où on tire

$$xx'+yy'+zz' = ab\cos\nu, \quad xx''+yy''+zz'' = ca\cos\mu,$$
$$x'x''+y'y''+z'z'' = bc\cos\lambda.$$

Il vient donc, en substituant dans (II),

$$(\text{III})\qquad 4S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & ab\cos\nu & ca\cos\mu \\ 1 & ab\cos\nu & b^2 & bc\cos\lambda \\ 1 & ca\cos\mu & bc\cos\lambda & c^2 \end{vmatrix}.$$

Si nous divisons respectivement par a, b, c d'abord les trois dernières lignes puis les trois dernières colonnes et que nous multiplions ensuite par abc la première ligne et la première colonne résultante, nous transformerons cette colonne dans la suivante

$$(\text{IV})\qquad 4S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & bc & ca & ab \\ bc & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ ca & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ ab & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

4. **Surface du triangle déterminé par les intersections d'un plan avec les trois plans de coordonnées.** Le plan $Ax+By+Cz+D=0$ coupe les trois axes de coordonnées à des distances a, b, c de l'origine qui sont

$$a=-\frac{D}{A},\quad b=-\frac{D}{B},\quad c=-\frac{D}{C}. \tag{3}$$

Ces distances sont les arêtes latérales d'un tétraèdre qui a son sommet à l'origine et dont les angles au sommet dans les faces latérales sont respectivement $YOZ=\lambda$, $ZOX=\mu$, $XOY=\nu$. Par suite, si dans la formule (IV) nous remplaçons a, b, c par leurs valeurs (3), nous obtiendrons après avoir divisé la première ligne et la première colonne par $\frac{D^2}{ABC}$.

$$4S^2=-\frac{D^4}{A^2B^2C^2}\begin{vmatrix} 0 & A & B & C \\ A & 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ B & \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ C & \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}. \tag{V}$$

On peut comparer cette méthode à celle que nous avons suivie aux pages 152 et 153 du LVII[e] tome de ces Archives.

XXIII.

Application des Déterminants aux Surfaces cylindriques, et en particulier aux cylindres du second degré.

Par

Georges Dostor.

---

1. **Condition pour qu'une surface $f(x,y,z)=0$ soit cylindrique.** Cette surface sera un cylindre parallèle à la droite

$$\frac{X}{a}=\frac{Y}{b}=\frac{Z}{c}, \tag{1}$$

si le plan tangent

(2) $$(X-x)f_x'+(Y-y)f_y'+(Z-z)f_z'=0,$$

mené en un point quelconque (x,y,z) de la surface, contient la droite

(3) $$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c}=u,$$

menée par le même point (x, y, z) parallèlement à la ligne (1). On obtient de la sorte, entre les quatre inconnues $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ et $-u$, les quatre équations homogènes du premier degré

$$\begin{aligned}
(X-x)+o.(Y-y)+o.(Z-z)-au&=0,\\
o.(X-x)+\ (Y-y)+o.(Z-z)-bu&=0,\\
o.(X-x)+o.(Y-y)+\ (Z-z)-cu&=0,\\
f_x'(X-x)+f_y'(Y-y)+f_z'(Z-z)-o.u&=0,
\end{aligned}$$

qui, pour être compatibles, exigent que leur déterminant soit nul.

On trouve ainsi la relation de condition

(I) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ f_x' & f_y' & f_z' & 0 \end{vmatrix}=0,$$

qui doit exister quel que soit le point (x,y,z) de la surface $f(x,y,z)=0$.

Cette relation, qui revient à

(II) $$af_x'+bf_y'+cf_z'=0$$

se nomme l'équation aux différences partielles de toutes les surfaces cylindriques parallèles à la droite (1). Elle s'obtient immédiatement en remplaçant dans (2) $X-x$, $Y-y$ et $Z-z$ par leurs valeurs tirées des équations (3).

2. **Conditions pour que l'équation générale des surfaces du second degré représente un cylindre.** Dans la relation (II) remplaçons f_x', f_y' et f_z' par les expressions qu'en fournit l'équation

(4) $$f(x,y,z)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy \\ +2Cx+2C'y+2C''z+D=0;$$

nous obtenons l'égalité

$$a(Ax+B''y+B'z+C)+b(B''x+A'y+Bz+C') \\ +c(B'x+By+A''z+C'')=0,$$

ou, en ordonnant par rapport à x, y et z,

$$x(Aa+B''b+B'c)+y(B''a+A'b+Bc)+z(B'a+Bb+A''c)$$
$$+Ca+C'b+C''c=0.$$

Celle-ci, devant exister pour toutes les valeurs de x, y, z qui satisfont à l'équation (4), exige que l'on ait à la fois

$$(5)\qquad Aa+B''b+B'c=0,$$
$$(6)\qquad B''a+A'b+Bc=0,$$
$$(7)\qquad B'a+Bb+A''c=0,$$
$$(8)\qquad Ca+C'b+C''c=0.$$

Ces quatre équations sont homogènes et du premier degré par rapport aux trois inconnues a, b, c; pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit qu'étant considérées trois par trois, elles fournissent des déterminants nuls. On obtient ainsi les quatre relations

$$(\text{III})\qquad \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} B' & B & A'' \\ C & C' & C'' \\ A & B'' & B' \end{vmatrix}=0,$$
$$\begin{vmatrix} C & C' & C'' \\ A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \end{vmatrix}=0,$$

dont deux quelconques sont une conséquence des deux autres.

En développant ces déterminants, on a les équations

$$(\text{IV})\qquad AA'A''+2BB'B''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2=0,$$

$$(\text{V})\qquad \begin{cases} C\,(B^2-A'A'')+C'\,(A''B''-B\,B')+C''(A'\,B'-B''B\,)=0, \\ C'\,(B'^2-A''A)+C''(AB-B'\,B'')+C\,(A''B''-BB'\,)=0, \\ C''(B''^2-AA')+C\,(A'B'-B''B\,)+C'\,(AB-B'B'')=0. \end{cases}$$

3. **Direction du cylindre.** Cette direction s'obtient en éliminant d'abord c entre (5) et (6), puis a entre (6) et (7): on trouve ainsi les égalités

$$(9)\qquad a(AB-B'B'')=b(A'B'-B''B)=c(A''B''-BB')$$

et par suite

$$(\text{VI})\qquad x(AB-B'B'')=y(A'B'-B''B)=z(A''B''-BB')$$

pour les équations de la droite menée par l'origine parallèlement au cylindre.

4. Si nous divisons les trois termes de (8) par les trois produits respectifs (9), nous verrons que l'égalité

$$\text{(VII)} \qquad \frac{C}{AB-B'B''}+\frac{C'}{A'B'-B''B}+\frac{C''}{A''B''-BB'}=0,$$

peut remplacer l'une des trois relations (V).

5. **Cylindres du second degré à axe central.** La surface (4) représentera un cylindre doué d'un axe central, si les trois équations

$$\begin{aligned} Ax+B''y+B'z+C &= 0, \\ B''x+A'y+Bz+C' &= 0, \\ B'x+By+A''z+C'' &= 0 \end{aligned}$$

représentent trois plans qui se coupent suivant une seule et même droite. Cette droite sera l'axe du cylindre.

Afin de donner une forme symétrique aux équations de cet axe, multiplions les équations précédentes respectivement par B, B', B'' et retranchons chaque résultat du précédent; nous obtenons les égalités

$$\begin{aligned} (AB-B'B'')x-(A'B'-B''B)y+BC-B'C' &= 0, \\ (A'B'-B''B)y-(A''B''-BB')z+B'C'-B''C'' &= 0, \end{aligned}$$

d'où nous tirons

$$\text{(VIII)} \quad (AB-B'B'')x+BC=(A'B'-B''B)y+B'C'=(A''B''-BB')z+B''C''$$

pour les équations de l'axe du cylindre.

Il s'ensuit que le plan mené par l'origine perpendiculairement aux génératrices du cylindre est représenté par l'équation

$$\frac{x}{AB-B'B''}+\frac{y}{A'B'-B''B}+\frac{z}{A''B''-BB'}=0.$$

6. **Equation du cylindre parallèle à une droite donnée** (1) **qui est circonscrit à la surface du second degré** (4). Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque M d'une génératrice CM du cylindre et par x', y', z' celles du point de contact C de cette génératrice avec la surface (4). Cette génératrice, devant être parallèle à la droite (1), est représentée par les équations

$$\text{(10)} \qquad \frac{x'-x}{a}=\frac{y'-y}{b}=\frac{z'-z}{c}=\lambda,$$

qui donnent

$$x' = x + a\lambda, \quad y' = y + b\lambda, \quad z' = z + c\lambda,$$

où la valeur l'indéterminée λ dépend de la position du point M sur la génératrice CM.

Le point de contact C appartenant à la surface (4), on a

$$o = f(x', y', z) = f(x + a\lambda, \ y + b\lambda, \ z + c\lambda)$$

ou

$$f(x, y, z) + \lambda(af_x' + bf_y' + cf_z') + \lambda^2 F(a, b\ c) = 0,$$

en posant

$$F(a, b, c) = Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ca + 2B''ab.$$

Mais la génératrice (10) ne rencontrant la surface (4) qu'en un point la quantité λ ne saurait avoir qu'une seule valeur; par suite les deux racines de l'équation précédente sont égales. On trouve ainsi, entre les coordonnées d'un point quelconque $M(x, y, z)$ du cylindre la relation

$$\text{(IX)} \qquad (af_x' + bf_y' + cf_z')^2 - 4f(x, y, z)F(a, b, c) = 0$$

qui est l'équation demandée du cylindre.

7. **Courbe de contact de ce cylindre.** L'équation précédente est satisfaite par les coordonnées des points situés à la fois sur la surface (4) et dans le plan

$$\text{(11)} \qquad af_x' + bf_y' + cf_z = 0;$$

par conséquent le cylindre (IX) touche la surface (10) le long de la courbe située dans le plan (11) ou dans le plan

$$\text{(X)} \quad x(Aa + B''b + B'c) + y(B''a + A'b + Bc) + z(B'a + Bb + A''c) \\ + Ca + C'b + C''c = 0.$$

8. **Exemple.** Circonscrire à l'ellipsoïde

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 1$$

un cylindre parallèle à la droite (s). Puisque

$$f_x' = 2Ax, \quad f_y' = 2A'y, \quad f_z' = 2A''z,$$

et que

$$F(a, b, c) = Aa^2 + A'b^2 + A''c^2.$$

l'équation du cylindre sera

$$(Aax + A'by + A''cz)^2 = (Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 - 1)\,(Aa^2 + A'b^2 + A''c^2).$$

Si x, y, z désignent les coordonnées de l'extrémité du demi-diamètre parallèle au cylindre; α, β, γ les inclinaisons de ce demi-diamètre sur les trois axes, nous aurons les valeurs

$$x = R\cos\alpha,\quad y = R\cos\beta,\quad z = R\cos\gamma,$$

qui, étant substituées dans l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

donnent

$$R^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right)=1.$$

L'équation du cylindre circonscrit à ce dernier ellipsoïde sera donc

$$R^2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2}+\frac{z\cos\gamma}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1.$$

9. Equation du cylindre circonscrit à la surface du second degré (4) et qui touche cette surface suivant son intersection avec le plan

$$(12)\qquad px+qy+rz+s=0.$$

Ce cylindre sera parallèle à la droite (1), si le plan (11) est identique avec le plan donné (12) ou (X), c'est-à-dire si l'on a les égalités

$$(13)\qquad \frac{Aa+B''b+B'c}{p}=\frac{B''a+A'b+Bc}{q}=\frac{B'a+Bb+A''c}{r}$$
$$=\frac{Ca+C'b+C''c}{s}=\lambda.$$

Multiplions les deux termes des trois premières de ces fractions respectivement par a, b, c et faisons la somme des numerateurs et celle des dénominateurs; nous obtenons l'égalité

$$Aa^2+A'b^2+A''c^2+2Bbc+2B'ca+2B''ab=(pa+qb+rc)\lambda.$$

qui jointe aux trois premières des égalités (13), fournit le système des quatre équations

$$\begin{aligned}-F(a,b,c)+\lambda pa+\lambda qb+\lambda rc&=0,\\ -\lambda p+Aa+B''b+B'c&=0,\\ -\lambda q+B''a+A'b+Bc&=0,\\ -\lambda r+B'a+Bb+A''c&=0,\end{aligned}$$

entre les trois inconnues a, b, c au premier degré. Eliminant ces inconnues, on trouve la relation

$$\begin{vmatrix} F(a,b,c) & \lambda p & \lambda q & \lambda r\\ \lambda p & A & B'' & B'\\ \lambda q & B'' & A' & B\\ \lambda r & B' & B & A''\end{vmatrix}=0,$$

qui donne

$$(14) \qquad F(a,b,c) = -\lambda^2 \begin{vmatrix} 0 & p & q & r \\ p & A & B'' & B' \\ q & B'' & A' & B \\ r & B' & B & A'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}.$$

Multiplions les deux termes des quatre fractions (13) respectivement qar $2x$, $2y$, $2z$ et 2, et faisons encore la somme des numérateurs et celle des dénominateurs; nous obtenons aussi l'équation

$$2(Aa+B''b+B'c)x+2(B''a+A'b+Bc)y+2(B'a+Bb+A''c)z$$
$$+2(Ca+C'b+C''c) = 2\lambda(px+qy+rz+s),$$

qui peut s'écrire

$$2a(Ax+B''y+B'z+C)+2b(B''x+A'y+Bz+C')+2c(B'x+By+A''+C'')$$
$$= 2\lambda(px+qy+rz+s)$$

ou encore

$$(15) \qquad af_x'+bf_y'+cf_z' = 2\lambda(px+qy+rz+s).$$

Il nous suffira maintenant de substituer les valeurs (14) et (15) dans l'équation (IX), pour avoir l'équation

$$(\text{XI}) \quad f(x,y,z) \begin{vmatrix} 0 & p & q & r \\ p & A & B'' & B' \\ q & B'' & A' & B \\ r & B' & B & A'' \end{vmatrix} + (px+qy+rz+s)^2 \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = 0$$

du cylindre circonscrit à la surface du second degré (4), qui touche cette surface suivant son intersection avec le plan (12).

10. **Exemple.** Circonscrire au paraboloïde

$$(16) \qquad f(x,y,z) = A'y^2+A''z^2-2x = 0$$

un cylindre qui touche la surface suivant le plan

$$(17) \qquad lx+my+nz+r = 0.$$

Pour les paraboloïdes le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

se réduit à zéro; par conséquent la formule précédente leur est inapplicable.

Dans ce cas on a recours à l'équation (IX), où l'on remplace a, b, c par les valeurs que l'on trouve en identifiant

$$af'_x + bf'_y + cf'_z = 0 \quad \text{et} \quad lx + my + nz + r = 0.$$

On voit d'abord que $l = 0$, ce qui réduit le plan de la ligne de contact à

$$my + nz + r = 0.$$

Donc, lors qu'un cylindre est circonscrit à un paraboloïde, la courbe de contact est située dans un plan parallèle à l'axe du paraboloïde.

On trouve ensuite que

$$af'_x + bf'_y + cf'_z = 2(A'by + A''cz - a) = 2\lambda(my + nz + r),$$

ce qui donne

$$a = -r\lambda, \quad b = \frac{m\lambda}{A'}, \quad c = \frac{n\lambda}{A''},$$

et, par suite,

$$F(a,b,c) = A'b^2 + A''c^2 = \lambda^2\left(\frac{m^2}{A'} + \frac{n^2}{A''}\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (IX), on obtient

$$(my + nz + r)^2 = (A'y^2 + A''z^2 - 2x)\left(\frac{m^2}{A'} + \frac{n^2}{A''}\right)$$

pour l'équation du cylindre circonscrit au paraboloïde (16) et touchant cette surface suivant une courbe située dans la plan (17).

Si le plan de la courbe de contact est en même temps parallèle à l'axe du y et situé à une distance d du plan des xy, le cylindre circonscrit au paraboloïde $\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x$ aura pour équation

$$y^2 - 8pqx + 4pdz - 2pd^2 = 0.$$

Pour $d = 0$, le cylindre touche le paraboloïde suivant la parabole

$$y^2 = 8pqx, \quad z = 0.$$

XXIV.

Neuer Beweis für die Realität der Wurzeln einer wichtigen Gleichung.

Von

Herrn *N. L. W. A. Gravelaar*

in Groningen.

In seiner Schrift: „Lessons introductory to the modern higher Algebra" giebt Salmon einen Beweis für die Realität der Wurzeln der Gleichung, auf welche die Bestimmung der linearen Substitutionen führt, welche eine gegebene homogene Function zweiten Grades von n Variabeln in eine Summe von n Quadrate transformiren und zugleich die Function

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2$$

in

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2$$

verwandeln.

Dieser Beweis setzt jedoch voraus, dass die Werte der Constanten völlig unbestimmt blieben. Hätten diese gewisse numerische Werte, so würde der Beweis nicht in derselben Weise zu führen sein. Denn die Behauptung des Autors, dass die Reihe von Hilfsfunctionen, deren er sich bedient, die Sturm'sche vertreten könne, würde in einem solchen Falle nicht gerechtfertigt erscheinen.

In der Sturm'schen Reihe können bekanntlich nicht zwei aufeinanderfolgende Terme für denselben Wert der Variabeln verschwinden, — in derjenigen, deren Salmon sich bedient, hingegen wohl, wie aus einem Beispiel ersichtlich wird.

Wenn weiter in der Sturm'schen Reihe für einen Wert a der Variabeln ein Term gleich Null wird, so haben die beiden benach-

barten Functionen eben sowohl entgegengesetzte Zeichen, wenn man der Variabeln den Wert $a-r$, als wenn man derselben den Wert $a+r$ erteilt.

Auch nicht diese Eigenschaft fand ich bei den Hilfsfunctionen, welche Salmon benutzt, bestätigt, wenn den Constanten bestimmte Werte beigelegt worden sind.

Indem ich mich immer derselben Hilfsfunctionen bediente, welche Salmon bei seiner Beweisführung benutzt, gelang es mir den Beweis auch auf den Fall auszudehnen, in welchem die Constanten numerische Werte erhalten.

Es dürfte nicht ohne Wichtigkeit sein, diesen neuen Beweis mit den nötigen Entwickelungen hier vorzuführen.

Der Beweis des Satzes stützt sich auf einige Eigenschaften der symmetrischen Determinanten, welche ich hier vollständigkeitshalber vorausschicke.

Ihre Beweise entnehme ich dem Werke Baltzer's über Determinanten.

1. Die Entwickelung der Determinante $n$ten Grades

$$S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen, welche mit a_{nn} in derselben Zeile und Colonne stehen, giebt:

$$S = a_{nn} R - \sum_{ik} a_{in} a_{nk} \alpha_{ik},$$

wenn mit R die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

und mit α_{ik} der Coefficient von a_{ik} in R bezeichnet wird.

Das Summenzeichen erstreckt sich über alle Werte von i und k von 1 bis $n-1$. (Baltzer § 3, 16).

2. Ist $R = 0$, so nimmt die Formel folgende Gestalt an:

$$S = -\sum_{ik} a_{in} a_{nk} \alpha_{ik}.$$

In diesem Falle verschwinden alle Minoren des R adjungirten Systems vom 2ten, 3ten . . . Grade, weil sie den Factor R enthalten. (Baltzer § 6, 5).

Aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} \end{vmatrix} = 0$$

folgen dann die Proportionen:

$$\alpha_{fi} : \alpha_{fk} = \alpha_{gi} : \alpha_{gk}; \qquad \alpha_{fi} : \alpha_{gi} = \alpha_{fk} : \alpha_{gk}$$

$$\alpha_{f_1} : \alpha_{f_2} : \alpha_{f_3} : \ldots = \alpha_{g_1} : \alpha_{g_2} : \alpha_{g_3} : \ldots$$

$$\alpha_{1i} : \alpha_{2i} : \alpha_{3i} : \ldots = \alpha_{1k} : \alpha_{2k} : \alpha_{3k} : \ldots$$

$$\alpha_{i_1} \alpha_{1i} : \alpha_{i_2} \alpha_{2i} : \alpha_{i_3} \alpha_{3i} : \ldots = \alpha_{11} \alpha_{ii} : \alpha_{22} \alpha_{ii} : \alpha_{33} \alpha_{ii} : \ldots$$

$$= \alpha_{11} : \alpha_{22} : \alpha_{33} : \ldots,$$

wenn α_{ii} nicht gleich Null ist.

3. Ist R eine symmetrische Determinante, so dass man hat $a_{ik} = a_{ki}$, mithin auch $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, so folgt aus 2.:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} = \sqrt{\alpha_{ii}} \sqrt{\alpha_{kk}},$$

in welchem Ausdrucke das Zeichen einer Wurzel von dem Zeichen der andern abhängt. Bei jedem i, für welches α_{ii} nicht verschwindet, hat man:

$$\alpha_{i_1}{}^2 : \alpha_{i_2}{}^2 : \alpha_{i_3}{}^3 : \ldots = \alpha_{11} : \alpha_{22} : \alpha_{33} : \ldots$$

4. Sind alle Elemente der Determinante reell, so sind die Grössen $\alpha_{i_1}{}^2$, $\alpha_{i_2}{}^2$, . . . nie negativ; folglich haben die Hauptminoren α_{11}, α_{22}, α_{33}, . . . , insoweit sie nicht verschwinden, einerlei Zeichen.

Verschwinden alle Hauptminoren, so folgt aus der Formel

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} = \sqrt{\alpha_{ii}} \sqrt{\alpha_{kk}},$$

dass α_{ik} bei jedem Werte von i und k der Null gleich ist.

5. Wir können somit folgenden Satz aussprechen:

Wenn in der symmetrischen Determinante $n$ten Grades

$$S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

in welcher alle Elemente reell sind, der Coefficient R von a_{nn} verschwindet und nicht alle Hauptminoren $(n-2)$ten Grades von R Null sind, so ist S ein vollständiges Quadrat, nämlich

$$-(\Sigma\, a_{ni} \sqrt{\alpha_{ii}})^2.$$

Die Glieder dieser Summe werden gebildet, indem man i alle Werte von 1 bis $n-1$ erteilt.

Verschwindet nun S nicht, so hat diese Determinante das entgegengesetzte Zeichen von a_{ii}, welches für alle Werte von i dasselbe ist.

Sind jedoch ausser R alle ihre Hauptminoren $(n-2)$ten Grades gleich Null, so verschwindet S identisch.

6. Nach diesen Vorbemerkungen beweisen wir folgende Sätze.

Es sei:

$$f(x) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0$$

eine Gleichung $n$ten Grades, in welcher die gegebenen Grössen reell sind und $a_{ik} = a_{ki}$ ist.

Bilden wir nun die Reihe der aufeinanderfolgenden Abgeleiteten, so finden wir durch Differentiation leicht:

$$f(x) = \quad \begin{vmatrix} a_{11}-x & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

in welchen Formeln das Summenzeichen sich auf alle Hauptminoren desselben Grades bezieht.

Wenn nun die Gleichung $f(x) = 0$ m der reellen Grösse a gleiche Wurzeln besitzt, so verschwinden für $x = a$ alle Abgeleiteten bis $f^{(m-1)}(x)$; $f^{m}(a)$ verschwindet jedoch nicht.

In diesem Falle sind für $x = a$ alle Hauptminoren $(n-m+1)$ten und höheren Grades einzeln gleich Null.

Denn, weil $f(a) = 0$ ist, so hätten die Hauptminoren $(n-1)$ten Grades, wenn sie nicht alle verschwänden, nach (4) dasselbe Zeichen, und könnte folglich $f'(a)$ nicht gleich Null sein.

Wären nicht alle Hauptminoren $(n-2)$ten Grades der Null gleich, so würden diejenigen, welche Hauptminoren ein und desselben Hauptminors $(n-1)$ten Grades sind, einerlei Zeichen haben, und letzterer könnte mithin nicht verschwinden. U. s. w.

Daraus folgt weiter, dass für $x = a$ alle Minoren $(n-m+1)$ten und höheren Grades einzeln verschwinden. (4).

Sind umgekehrt alle Minoren $(n-m+1)$ten Grades für einen Wert a von x gleich Null, so verschwinden für diesen Wert alle Minoren höheren Grades.

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Damit die Gleichung $f(x) = 0$ m der reellen Grösse a gleiche Wurzeln habe, ist es notwendig und hinreichend, dass alle Minoren $(n-m+1)$ten Grades für $x = a$ verschwinden.

7. Aus diesem Satze geht hervor, dass, wenn die Gleichung $f(x) = 0$ eine m-fache reelle Wurzel a besitzt, die Gleichungen, welche man erhält, wenn einer der Hauptminoren $(n-1)$ten Grades gleich Null gesetzt wird, wenigstens $(m-1)$ solche Wurzeln haben, und dass nicht alle diese Gleichungen eine grössere Anzahl derselben besitzen können. Denn wäre dies der Fall, so würden alle Minoren bis zum $(n-m)$ten Grade für $x = a$ verschwinden, und die Gleichung $f(x) = 0$ besässe nach (6) mehr als m solche Wurzeln.

8. Enthält $f(x)$ den Factor $(x-a)^{m}$, so sind nicht nur die Hauptminoren durch $(x-a)^{m-1}$ dividirbar, sondern alle Minoren vom $(n-1)$ten Grade. Man hat nämlich, wenn in der Determinante $f(x)$ der Coefficient von a_{ik} mit α_{ik} bezeichnet wird:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ii} & \alpha_{ik} \\ \alpha_{ki} & \alpha_{kk} \end{vmatrix} = \frac{d f(x)}{d(a_{ii}-x)\, d(a_{kk}-x)} \cdot f(x)$$

oder, weil $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$

$$\alpha_{ii}\alpha_{kk} - \alpha_{ik}^2 = \frac{df(x)}{d(a_{ii}-x)\,d(a_{kk}-x)}\, f(x). \qquad 1.$$

Nun enthält $f(x)$ den Factor $(x-a)^m$, $\frac{df(x)}{d(a_{ii}-x)\,d(a_{kk}-x)}$ als Hauptminor $(m-2)$ten Grades den Factor $(x-a)^{m-2}$, indem $(x-a)^{m-1}$ Divisor von α_{ii} und α_{kk} ist (7).

Folglich ist α_{ik}^2 entweder durch $(x-a)^{2(m-1)}$ teilbar, mithin α_{ik} durch $(x-a)^{m-1}$, oder dieser Minor verschwindet identisch.

9. Aus der Gleichung (1) geht durch Division mit $(x-a)^{2(m-1)}$ und nachherige Substitution von $x = a$ hervor:

$$A_{ii}A_{kk} - A_{ik}^2 = 0,$$

wenn wir durch die Verwandlung der kleinen in grosse Buchstaben ausdrücken, dass beide Operationen ausgeführt sind.

Weil nun nicht alle A_{ii} verschwinden können (7), so müssen die nicht verschwindenden dasselbe Zeichen haben. Weiter hat man noch:

$$A_{ik} = A_{ki} = \sqrt{A_{ii}}\,\sqrt{A_{kk}}.$$

10. Mit diesen Daten gerüstet gehen wir an die Lösung unseres Problems.

Die gegebene Gleichung $n$ten Grades sei:

$$\varphi_n(x) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher sämmtliche Constanten reell seien und $a_{ik} = a_{ki}$ vorausgesetzt werde.

Nehmen wir nun von der Determinante $\varphi_n(x)$ eine Hauptminordeterminante $(n-1)$ten Grades, von dieser eine Hauptminordeterminante vom $(n-2)$ten Grade u. s. w., so erhalten wir eine Reihe von Functionen von x, deren Grade von n bis 1 regelmässig abnehmen, und welche wir durch eine positive Constante schliessen.

Wir stellen diese Reihe in folgender Form dar:

$$+1,\ (a_{11}-x),\ \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-x \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_{11}-x \ldots a_{13} \\ \cdots\cdots \\ a_{31} \ldots a_{33}-x \end{vmatrix} \cdots \begin{vmatrix} a_{11}-x \ldots a_{1,n-1} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ a_{n-1,1} \ldots a_{n-1,n-1}-x \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_{11}-x \ldots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

und bezeichnen diese Functionen der Einfachheit wegen mit:

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_{n-1}, \varphi_n \qquad 2.$$

wo die Indices den Grad der bezüglichen Determinante ausdrücken.

Hauptsatz. Substituirt man in diese Functionen für x zwei beliebige reelle Grössen α und $\beta < \alpha$ und zählt nach jeder Substitution die Zeichenwechsel, welche sich in der Reihe der Substitutionsresultate vorfinden, so ist der Ueberschuss der Anzahl der Zeichenwechsel, welche die Reihe für $x = \alpha$ enthält über die Anzahl, welche sich in derselben für $x = \beta$ vorfinden, genau der Anzahl der zwischen α und β enthaltenen Wurzeln der Gleichung $\varphi_n = 0$ gleich.

Lässt man x continuirlich von α bis β abnehmen, so kann die Zeichenreihe der Functionen (2) nur dann Aenderungen erleiden, wenn x durch einen Wert hindurchgeht, für welchen eine oder mehrere dieser Functionen verschwinden. Setzen wir voraus, für $x = a$ würden eine oder mehrere dieser Functionen gleich Null.

Bezeichnen wir weiter mit τ_m, wie viele der Grösse a gleiche Wurzeln die Gleichung $\varphi_m = 0$ besitzt und mit Δ_m die beim Uebergange von $x = a + \delta$ zu $x = a - \delta$ in der Reihe

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{m-1}, \varphi_m$$

verlorenen Zeichenwechsel.

Die Grösse δ ist positiv und so gewählt, dass keine der Gleichungen $\varphi_r = 0$ zwischen $a + \delta$ und $a - \delta$ eine andere Wurzel als a besitzt.

Bilden wir nun die beiden Reihen:

$$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_{n-1}, \Delta_n \qquad 3.$$

$$\tau_0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots \tau_{n-1}, \tau_n \qquad 4.$$

So behaupten wir, dass man für jeden Wert von m habe:

$$\Delta_m = \tau_m.$$

I. Um diese Behauptung zu rechtfertigen, bemerken wir zuerst, dass man offenbar hat:

$$\Delta_{r+1} = \Delta_r - 1, \text{ oder } = \Delta_r, \text{ oder } = \Delta_r + 1.$$

II. Weiter werden wir nachweisen, dass ebenso zwei aufeinanderfolgende Terme der Reihe (4) einander entweder gleich oder um eine Einheit verschieden sind, dass man also auch für diese Reihe haben muss:

$$\tau_{p+1} = \tau_p - 1, \text{ oder } = \tau_p, \text{ oder } = \tau_p + 1.$$

Denn weil φ_p eine Hauptminordeterminante der symmetrischen Determinante φ_{p+1} ist, so ist (7) erstens τ_p wenigstens gleich $\tau_{p+1}-1$.

Weil weiter die Entwickelung von φ_{p+1} nach (1) giebt:

$$\varphi_{p+1} = (a_{p+1,p+1}-x)\varphi_p - \sum_{ik} a_{i,p+1}\, a_{p+1,k}\, \alpha_{ik},$$

in welchem Ausdrucke α_{ik} ein Minor $(p-1)$ten Grades von φ_p ist, und die Zahlen i und k alle Werte von 1 bis p annehmen müssen, — und φ_p und α_{ik} respective durch $(x-a)^{\tau_p}$ und $(x-a)^{\tau_p-1}$ teilbar sind (8), so ist zweitens $(x-a)^{\tau_p-1}$ jedenfalls ein Factor von φ_{p+1}.

III. Endlich beweisen wir, dass man gleichzeitig hat:

$$\begin{aligned} &\tau_{p+1} = \tau_p &&\text{und}\quad \Delta_{p+1} = \Delta_p \\ \text{oder}\quad &\tau_{p+1} = \tau_p+1 &&\text{und}\quad \Delta_{p+1} = \Delta_p+1 \\ \text{oder}\quad &\tau_{p+1} = \tau_p-1 &&\text{und}\quad \Delta_{p+1} = \Delta_p-1 \end{aligned}$$

α. Für $\tau_{p+1} = \tau_p$ ist auch $\Delta_{p+1} = \Delta_p$, wie aus folgenden Zeichencombinationen unmittelbar einleuchtet:

	φ_p	φ_{p+1}		φ_p	φ_{p+1}	
$(x=a+\delta)$ . . .	$\pm$	$\pm$	oder	$\pm$	$\mp$	wenn $\tau_{p+1}=\tau_p$
$(x=a-\delta)$ . . .	$\pm$	$\pm$		$\pm$	$\mp$	gerade ist.

	φ_p	φ_{p+1}		φ_p	φ_{p+1}	
$(x=a+\delta)$ . . .	$\pm$	$\pm$	oder	$\pm$	$\mp$	wenn $\tau_{p+1}=\tau_p$
$(x=a-\delta)$ . . .	$\mp$	$\mp$		$\mp$	$\pm$	ungerade ist.

β. Man hat gleichzeitig:

$$\tau_{p+1} = \tau_p+1 \quad\text{und}\quad \Delta_{p+1} = \Delta_p+1.$$

Weil a eine τ_{p+1}-fache Wurzel von $\varphi_{p+1}=0$ ist, so haben bekanntlich φ_{p+1} und deren erste Abgeleitete, welche aus der negativ genommenen Summe aller ihrer Hauptminoren $p$ten Grades, unter welchen sich auch φ_p vorfindet, besteht (6), für $x=a-\delta$ entgegengesetzte und für $x=a+\delta$ gleiche Zeichen.

Nach (7) enthalten alle diese Minordeterminanten den Factor $(x-a)^{\tau_p}$ und, wenn man sie durch diesen Divisor dividirt, erhalten dieselben für $x=a$, insofern sie für diesen Wert nicht verschwinden, dasselbe Zeichen (9).

Daraus folgt, dass φ_p und die erste Abgeleitete von φ_{p+1} für $x=a-\delta$ und für $x=a+\delta$ entgegengesetzte Zeichen haben, wenn δ so gewählt ist, dass keine der gleich Null gesetzten Hauptminoren $p$ten Grades zwischen $a+\delta$ und $a-\delta$ eine andere Wurzel als a besitzt.

Mithin erhalten φ_p und φ_{p+1} für $x = a + \delta$ entgegengesetzte und für $x = a - \delta$ gleiche Zeichen, so dass beim Uebergange von $x = a + \delta$ zu $x = a - \delta$ ein Zeichenwechsel verloren wird, und man somit hat:

$$\varDelta_{p+1} = \varDelta_p + 1.$$

γ. Im Falle $\tau_{p+1} = \tau_p - 1$ ist auch $\varDelta_{p+1} = \varDelta_p - 1$.

Die symmetrische Determinante φ_{p+1} giebt nach Entwickelung (10. II.):

$$\varphi_{p+1} = (a_{p+1,p+1} - x)\,\varphi_p - \sum_{ik} a_{i,p+1}\, a_{p+1,k}\, \alpha_{ik}.$$

Im Falle, von welchem hier die Rede ist, enthalten φ_{p+1} und φ_p respective die Factoren $(x-a)^{\tau_p - 1}$ und $(x-a)^{\tau_p}$, indem alle α_{ik} als Minoren von φ_p durch $(x-a)^{\tau_p - 1}$ teilbar sind. Nach Division und Substitution von $x = a$ erhält man folglich:

$$\Phi_{p+1} = - \sum_{ik} a_{i,p+1}\, a_{p+1,k}\, A_{ik},$$

indem wieder durch die Vertauschung der kleinen mit grossen Buchstaben bezeichnet wird, dass genannte Operationen vollzogen sind. Weil die linke Seite dieser Gleichung nicht verschwindet, so kann auch das rechte Glied nicht Null sein. Nun hat man (9):

$$A_{ik} = A_{ki} = \sqrt{A_{ii}}\,\sqrt{A_{kk}},$$

indem nicht alle A_{ii} verschwinden.

Φ_{p+1} ist mithin ein vollständiges Quadrat und hat das entgegengesetzte Zeichen von A_{ii}.

φ_{p+1} und α_{ii} haben mithin für $x = a + \delta$ und für $x = a - \delta$ entgegengesetzte Zeichen, indem φ_p und α_{ii} für den ersten dieser Werte entgegengesetzte, für den letzten gleiche Zeichen haben (10. III. β.).

Daraus schliessen wir, dass φ_{p+1} und φ_p für $x = a + \delta$ dasselbe und für $x = a - \delta$ entgegengesetzte Zeichen erhalten, woraus unmittelbar die Wahrheit unserer Behauptung erhellt, dass man für $\tau_{p+1} = \tau_p - 1$ auch habe:

$$\varDelta_{p+1} = \varDelta_p - 1.$$

IV. Diese Entwickelungen haben gezeigt, dass in jedem Falle

$$\tau_{p+1} - \tau_p = \varDelta_{p+1} - \varDelta_p$$

ist, aus welcher Gleichung man nun ohne Weiteres auf die Wahrheit der Behauptung

$$\varDelta_m = \tau_m$$

zu schliessen berechtigt ist, weil augenscheinlich

$$\varDelta_0 = \tau_0 = 0.$$

Wir transformiren diese Oberfläche auf ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem mit demselben Anfangspunkte und suchen die Richtungen der Axen so zu bestimmen, dass in der neuen Gleichung der Oberfläche die Coefficienten von xy, yz und zx verschwinden.

Die Transformationsformeln, welche den Uebergang zu einem solchen System ermöglichen, seien:

$$\begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z \\ y &= bX + b'Y + b''Z \\ z &= cX + c'Y + c''Z \end{aligned} \qquad 1.$$

Die Substitutionen (1) machen die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \qquad 2.$$

zu einer identischen, weil jede ihrer Seiten die Entfernung eines Punktes vom gemeinsamen Anfangspunkte beider Systeme ausdrückt.

Werden in diese Gleichung die Werte von x, y, z aus (1) eingesetzt, und beide Seiten der Gleichung verglichen, so erhält man die 6 zwischen die Substitutionscoefficienten obwaltenden Relationen

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 & \qquad a\,a' + b\,b' + c\,c' &= 0 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 & \qquad a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1 & \qquad a''a + b''b + c''c &= 0 \end{aligned} \qquad 3.$$

Dass diese 6 Bedingungsgleichungen hinreichen, um unter der Voraussetzung, dass das erste Coordinatensystem ein rechtwinkliges sei, auch das andere zu einem rechtwinkligen zu machen, geht aus der geometrischen Interpretation dieser Gleichungen hervor.

Wenn wir die durch die Substitutionen (1) identische Gleichung (2) nach den Variabeln X, Y, Z differentiiren, erhalten wir die Auflösungen der Substitutionen (1):

$$\begin{aligned} X &= a\,x + b\,y + c\,z \\ Y &= a'x + b'y + c'z \\ Z &= a''x + b''y + c''z \end{aligned} \qquad 4.$$

Weil die Transformationsformeln linear und homogen sind, werden sie $\varphi(x, y, z)$ in eine neue homogene Function zweiten Grades überführen und die zu lösende Aufgabe lässt sich somit also ausdrücken:

Die Substitutionen (1) so zu bestimmen, dass sie die Gleichung

$$\varphi(x, y, z) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 \qquad 5.$$

zu einer identischen machen.

Die Differentiation der Gleichung (5) nach der Variabeln X giebt:

$$a\varphi'(x)+b\varphi'(y)+c\varphi'(z)=2\lambda_1 X \tag{6.}$$

welche Gleichung nach Substitution von (4) sich auch so darstellen lässt:

$$x\varphi'(a)+y\varphi'(b)+z\varphi'(c)=2\lambda_1(ax+by+cz).$$

Diese Gleichung, welche unabhängig ist von den Werten der Variabeln in ihr, zerfällt in folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}\varphi'(a)&=2\lambda_1 a\\ \varphi'(b)&=2\lambda_1 b\\ \varphi'(c)&=2\lambda_1 c\end{aligned} \tag{7.}$$

Durch Differentiation der identischen Gleichung (5) nach den Variabeln Y und Z erhält man in gleicher Weise:

$$\begin{aligned}\varphi'(a')&=2\lambda_2 a' \qquad & \varphi'(a'')&=2\lambda_3 a''\\ \varphi'(b')&=2\lambda_2 b' & \varphi'(b'')&=2\lambda_3 b''\\ \varphi'(c')&=2\lambda_2 c' & \varphi'(c'')&=2\lambda_3 c''\end{aligned} \tag{8.}$$

Wenn es mithin Substitutionen giebt, welche die Gleichung (5) zu einer Identität machen, so müssen die Substitutionscoefficienten den Gleichungen (7) und (8) genügen.

Weil die Gleichungen (8) von derselben Form sind als die Gleichungen (7), so können wir uns damit begnügen, die Werte der in diesen Gleichungen enthaltenen Coefficienten zu bestimmen. Die Gleichungen stellen sich entwickelt also dar, indem wir der Bequemlichkeit wegen $a_{ik}=a_{ki}$ setzen:

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_1)a+a_{12}b+a_{13}c&=0\\ a_{21}a+(a_{22}-\lambda_1)b+a_{23}c&=0\\ a_{31}a+a_{32}b+(a_{33}-\lambda_1)c&=0\end{aligned} \tag{9.}$$

Damit aus diesen Gleichungen Werte hervorgehen, die der ersten Gleichung (3) genügen können, ist es notwendig, dass die Determinante dieses Systems Null sei.

Die Gleichungen (8) fordern ebenso das Verschwinden einer ähnlichen Determinante.

Wenn es also Substitutionen giebt, welche die Gleichung (5) zu einer identischen machen, so werden die Werte der Unbekannten λ_1, λ_2, λ_3 Wurzeln sein der cubischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{10.}$$

dritten genügen. Um die genannten Substitutions
zu bestimmen, wird die erste Gleichung (3) zu Hil

Nachdem wir also für a, b, c endliche, bestimm
haben, bestimmen wir a', b', c' und a'', b'', c'' aus
(8) mit Hilfe der beiden andern Wurzeln der Gl
nutzte man zu deren Bestimmung dieselbe Wurzel
für diese Substitutionscoefficienten dieselben Werte
a, b, c und nicht allen Gleichungen (3) könnte genü

Die mit Hilfe der drei Wurzeln erhaltenen S
cienten hingegen genügen auch den drei letzten Glei

Denn multipliciren wir die Gleichungen (7) resp
c', und die Gleichungen des ersten Systems (8) mit
halten wir durch Subtraction auf Grund der Identität

$$a'\varphi'(a)+b'\varphi'(b)+c'\varphi'(c)\equiv a\varphi'(a')+b\varphi'(b')-$$

die Relation:

$$(\lambda_1-\lambda_2)(aa'+bb'+cc')=0.$$

Nun sind λ_1 und λ_2 ungleiche Wurzeln der Gleich
hin hat man:

$$aa'+bb'+cc'=0$$

U. s. w.

Hat mithin die Gleichung (10) drei verschiedene
kann es nur ein System Transformationsformeln geber
Function $\varphi(x, y, z)$ in

$$\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+\lambda_3 Z^2$$

überführen.

Es lässt sich ...

erhält man nämlich, wenn man sie respective mit $\frac{1}{2}X$, $\frac{1}{2}Y$, $\frac{1}{2}Z$ multiplicirt und nachher addirt, unter Vermittlung der Gleichungen (1):

$$\tfrac{1}{2}x\varphi'(x)+\tfrac{1}{2}y\varphi'(y)+\tfrac{1}{2}z\varphi'(z) = \varphi(x, y, z) = \lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+\lambda_3 Z^2.$$

β. Untersuchen wir nun den Fall, in welchem die Gleichung (10) zwei gleiche Wurzeln besitze.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass λ_1 eine zweifache Wurzel sei, sind (6):

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda_1 & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{33}-\lambda_1 & a_{31} \\ a_{13} & a_{11}-\lambda_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda_1 & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{33}-\lambda_1 & a_{32} \\ a_{13} & a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwickelung der drei letzten Gleichungen giebt:

$$a_{23}\lambda_1 = a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}; \quad a_{31}\lambda_1 = a_{22}a_{31}-a_{31}a_{21}$$
$$a_{12}\lambda_1 = a_{33}a_{12}-a_{13}a_{32}.$$

Verschwindet keine der Grössen a_{12}, a_{23}, a_{31}, so hat man:

$$\frac{a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}}{a_{23}} = \frac{a_{22}a_{31}-a_{32}a_{21}}{a_{31}} = \frac{a_{33}a_{12}-a_{13}a_{32}}{a_{12}} = \lambda_1.$$

Unter diesen Bedingungen verschwinden auch die drei ersten Minordeterminanten.

Multiplicirt man zum Beispiel in der ersten Determinante die erste Zeile mit a_{23} und addirt zu ihr die mit a_{13} multiplicirte zweite Zeile, so verschwinden die Elemente der ersten Zeile in der neuen Determinante, u. s. w.

Wir können somit folgenden Satz aussprechen:

Wenn keine der Grössen a_{12}, a_{23}, a_{31} verschwindet, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung, dass die Gleichung (10) zwei gleiche Wurzeln habe:

$$\frac{a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}}{a_{23}} = \frac{a_{22}a_{31}-a_{32}a_{21}}{a_{31}} = \frac{a_{33}a_{12}-a_{13}a_{32}}{a_{12}} \qquad 11.$$

Ist eine der Grössen a_{23}, a_{31}, a_{12} gleich Null, z. B. a_{23}, so muss noch eine z. B. a_{31} verschwinden und man hat:

$$\lambda_1 = a_{33}.$$

Dadurch ist auch der zweiten und dritten Bedingungsgleichung genügt, und damit auch die erste bestehe, muss man haben:

$$(a_{11}-a_{33})(a_{22}-a_{33})-a_{12}^2=0.$$

Hat man mithin $a_{23}=a_{31}=0$, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichheit zweier Wurzeln der Gleichung (10):

$$(a_{11}-a_{33})(a_{22}-a_{33})-a_{12}^2=0. \qquad 12.$$

Sehen wir nun, wie es sich um die Bestimmung der Substitutionscoefficienten verhält im Falle, wo die Gleichung (10) nur zwei gleiche Wurzeln besitzt.

Seien die Wurzeln dieser Gleichung $\lambda_1=\lambda_2$ und λ_3.

Man überzeugt sich leicht, dass die Substitutionscoefficienten nur in folgender Weise bestimmt werden können:

Aus dem zweiten System (8) und der dritten Gleichung (2) erhält man für a'', b'', c'' endliche und bestimmte Werte.

Das erste System (8) reducirt sich auf das System (7). Alle Minoren zweiten Grades, aber nicht alle diejenigen vom ersten Grade der Determinante dieses Systems verschwinden, so dass dasselbe zweifach unbestimmt ist: die Werte, welche der einen Gleichung genügen, genügen auch den beiden andern. Wir bestimmen nun die 6 Substitutionscoefficienten a, b, c und a', b', c' aus den folgenden 5 Gleichungen:

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_1)a+a_{12}b+a_{13}c&=0\\(a_{11}-\lambda_1)a'+a_{12}b'+a_{13}c'&=0\\a^2+b^2+c^2&=1\\a'^2+b'^2+c'^2&=1\\aa'+bb'+cc'&=0\end{aligned}$$

welche Bestimmung auf unendlich viele Arten möglich ist.

Weiter hat man wie oben:

$$\begin{aligned}a'a''+b'b''+c'c''&=0\\a''a+b''b+c''c&=0\end{aligned}$$

und die erhaltenen Substitutionen transformiren in der Tat die Function $\varphi(x,y,z)$ in $\lambda_1X^2+\lambda_1Y^2+\lambda_3Z^2$, so dass die Gleichung der Oberfläche die Form

$$\lambda_1X^2+\lambda_1Y^2+\lambda_3Z^2+2a_{14}'X+2a_{24}'Y+2a_{34}'Z+a_{44}=0 \qquad 13.$$

annimmt.

Die Oberfläche ist eine Rotationsoberfläche. Denn die Ebenen, welche senkrecht auf der Z-Axe stehen, schneiden die Oberfläche in

Kreisen, ausser wenn $\lambda_1 = 0$, in welchem Falle die Schnittcurve eine Gerade ist.

Die gegebene Gleichung repräsentirt dann entweder einen parabolischen Cylinder oder die Verbindung zweier parallelen Ebenen. Diese Flächen sind Grenzfälle der Rotationsoberflächen: jede Normale zu beiden Ebenen ist eine Rotationsaxe im letzten Falle, und der parabolische Cylinder ist die Grenze einer durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe erzeugten Fläche für das Anwachsen der grossen Axe zu unendlicher Grösse. Dieses Factum ist auch nicht in Widerspruch mit den Ansichten der analytischen Geometrie, nach welchen eine Gerade auch als Kreis mit unendlich grossem Radius betrachtet wird.

Umgekehrt lässt sich jede Rotationsoberfläche auf die Form (13) zurückführen.

Man hat folglich den Satz:

Damit eine Oberfläche zweiter Ordnung eine Rotationsoberfläche sei, ist es notwendig und hinreichend, dass man habe:

$$\frac{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}{a_{23}} = \frac{a_{22}a_{31} - a_{32}a_{21}}{a_{31}} = \frac{a_{33}a_{12} - a_{13}a_{32}}{a_{12}},$$

wenn keine der Grössen a_{23}, a_{31}, a_{12} verschwindet, oder:

$$(a_{11} - a_{33})(a_{22} - a_{33}) - a_{12}^2 = 0,$$

wenn $a_{23} = a_{31} = 0$ ist.

γ. Betrachten wir nun noch den Fall, in welchem alle drei Wurzeln der Gleichung (10) einander gleich werden.

Die notwendige und hinreichende Bedingung, dass λ_1 eine dreifache Wurzel dieser Gleichung sei, ist (6):

$$a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0; \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = \lambda_1. \qquad 14.$$

Die Gleichungen (7) und (8) sind in diesem Falle Identitäten. Die Substitutionscoefficienten brauchen mithin nur den Gleichungen (3) zu genügen, und dies kann auf unendlich viele Arten erreicht werden.

Die auf diese Weise bestimmten Substitutionen führen alle die Gleichung der Oberfläche auf die Form:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_1 Y^2 + \lambda_1 Z^2 + 2a_{14}'X + 2a_{24}'Y + 2a_{34}'Z + a_{44} = 0 \qquad 15.$$

zurück, welche, weil λ_1 nicht Null sein kann, eine Kugel repräsentirt.

Umgekehrt hat die Gleichung jeder Kugel die Form (15).

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter welchen eine Oberfläche zweiter Ordnung eine Kugel sei, sind mithin:

$$\begin{aligned} a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0 \\ a_{11} = a_{22} = a_{33}. \end{aligned} \qquad 16.$$

Gröningen, 25. März 1875.
(Die Niederlande).

XXV.

Zur Schultrigonometrie.

Von

L. Graf *von Pfeil.*

Nachfolgende Entwickelung der Functionen für die Summe und Differenz zweier Winkel ist so einfach, und wenn man will so elegant, dass sie vielleicht verdient, in die Lehrbücher aufgenommen zu werden.

Es seien x und z zwei innere Winkel eines Dreiecks, so ist der äussere gegenüberstehende v gleich ihrer Summe. Zieht man die Senkrechten h und H, so erhält man 4 Functionsdreiecke; deren 2 für den Winkel x und je eines für z und v.

Es ist nun die Aufgabe, die Functionen für die Summe v, welche in dem Functionsdreieck (die Seiten durch je Einen Buchstaben bezeichnet) HXo liegen, durch Functionen der beiden Summanden x und z auszudrücken, und zwar durch Functionen in den beiden Dreiecken, welche die Senkrechte h gemeinsam haben. Diese Dreiecke sind hmX und hnZ.

Die Substitution geschieht, indem man das zweite Functionsdreieck für x, das Dreieck HVp zu Hülfe nimmt.

Folgendes ist die Entwickelung. Ich gebe sie, der grösseren Deutlichkeit wegen, für den Fall Fig. 1. zunächst, wo die Summe ein spitzer Winkel ist.

$$\sin(x+z) = \sin v = \frac{H}{X} = \frac{\frac{H}{V}V}{X} = \frac{\frac{h}{Z}(m+n)}{X}$$

$$= \frac{hm+hn}{XZ} = \frac{h}{Z}\,\frac{m}{X} + \frac{n}{Z}\cdot\frac{h}{X}$$

$$= \sin x \cos z + \cos x \sin z.$$

Ebenso

$$\cos(x+z) = \cos v = \frac{o}{X} = \frac{p-Z}{X} = \frac{\frac{p}{V}\cdot V - Z}{X}$$

$$= \frac{\frac{n}{Z}(m+n) - Z}{X} = \frac{mn+n^2-Z^2}{XZ}$$

$$= \frac{nm-h^2}{XZ} = \frac{n}{Z}\cdot\frac{m}{X} - \frac{h}{Z}\cdot\frac{h}{X}$$

$$= \cos x \cos z - \sin x \sin z.$$

Soll die Function für die Differenz gefunden werden, so setzt man $v-x=z$ und substituirt aus dem Functionsdreieck für z in die beiden Functionsdreiecke für v und x, welche H gemeinsam haben, also in die Dreiecke XHo und VHp, indem man ebenfalls das zweite Functionsdreieck für x, das Dreieck Zhn zu Hülfe nimmt.

Es ist sodann

$$\sin(v-x) = \sin z = \frac{h}{X} = \frac{\frac{h}{Z}\cdot Z}{X} = \frac{\frac{H}{V}(p-o)}{X}$$

$$\cos(x+z) = \cos v = -\frac{o}{X} = -\frac{Z-p}{X}$$

$$= -\frac{Z-\frac{p}{V}.V}{X} = -\frac{Z-\frac{n}{Z}(m+n)}{X}$$

$$= -\frac{Z^2-n^2-nm}{ZX} = -\frac{h^2-nm}{ZX}$$

$$= \frac{nm}{ZX} - \frac{h^2}{ZX} = \cos x\cos z - \sin x\sin z.$$

Oder wenn einer der Summanden ein stumpfer Winkel ist. Gesucht Fig. 3.

$$\sin(x+z) = \sin v = \frac{H}{X} = \frac{\frac{H}{V}.V}{X} = \frac{\frac{h}{Z}(n-m)}{X}$$

$$= \frac{hn-hm}{ZX} = \frac{h}{X}.\frac{n}{Z} - \frac{h}{Z}.\frac{m}{X}$$

$$= \sin z\cos x - \sin x(-\cos z)$$

$$= \sin z\cos x + \sin x\cos z.$$

Oder gesucht Fig. 3.

$$\cos(v-x) = \cos z = -\frac{m}{X} = -\frac{n-V}{X} = -\frac{\frac{n}{Z}.Z-V}{X}$$

$$= -\frac{\frac{p}{V}(p+o)-V}{X} = -\frac{p^2+po-V^2}{VX} = -\frac{po-H^2}{VX}$$

$$= -\frac{p}{V}\frac{o}{X} + \frac{H}{V}.\frac{H}{X} = -\cos x(-\cos v) + \sin x\sin v$$

$$= \cos v\cos x + \sin v\sin x.$$

Auch die Tangenten der Summe oder Differenz lassen sich an derselben Figur leicht entwickeln. z. B. Fig. 1.

$$\operatorname{cotg}(x+z) = \operatorname{cotg} v = \frac{o}{H} = \frac{p-Z}{\frac{H}{V}.V} = \frac{\frac{p}{V}.V-Z}{\frac{H}{V}.V}$$

$$= \frac{\frac{n}{Z}(m+n)-Z}{\frac{h}{Z}(m+n)} = \frac{nm+n^2-Z^2}{hm+hn}$$

$$= \frac{nm-h^2}{hm+hn} : \frac{mn}{mn} = \frac{1-\operatorname{tang}x\operatorname{tang}z}{\operatorname{tang}x+\operatorname{tang}z}.$$

Allerdings ist hier die arithmetische Entwickelung einfacher.

Die mehrfache Umwandlung der Zeichen dient gewiss, die Aufmerksamkeit der Schüler anzuregen, ohne doch eigentliche Schwierigkeiten zu haben.

Die Entwickelung der Formeln für $\log(a+b)$ und $\log(a-b)$ unmittelbar aus $\log a$ und $\log b$, noch mehr aber die trigonometrische Auflösung der quadratischen Gleichungen und deren Entwickelung gehört wol zu den besten Aufgaben für Schüler, weil, zumal die letztere die wichtigsten Formeln der analytischen Trigonometrie in sich schliesst und diese Formeln darum dem Gedächtniss auf eine ungezwungene Weise einprägt.

Die Formeln für $\log(a+b)$ und $\log(a-b)$ führe ich der Vollständigkeit wegen hier an, und übergehe ihre sehr leichte Entwickelung. Sie lauten bekanntlich, wenn $a > b$: Für die Summe, wenn $\frac{a}{b} = \operatorname{tang}^2\varphi$

$$\log(a+b) = \log a - 2\log\sin\varphi$$

oder

$$\log(a+b) = \log b - 2\log\cos\varphi;$$

wenn man $\frac{b}{a} = \operatorname{tang}^2\varphi$ gesetzt hätte

$$\log(a+b) = \log a - 2\log\cos\varphi$$

oder

$$\log(a+b) = \log b - 2\log\sin\varphi.$$

Für die Differenz lauten die Formeln

wenn man $\frac{b}{a} = \sin^2\varphi$ gesetzt hat

$$\log(a-b) = \log a + 2\log\cos\varphi,$$

oder auch

$$\log(a-b) = \log b + 2\log\operatorname{cotg}\varphi;$$

wenn man $\frac{b}{a} = \cos^2\varphi$ gesetzt hätte

$$\log(a-b) = \log a + 2\log\sin\varphi$$

oder auch

$$\log(a-b) = \log b + 2\log\operatorname{tang}\varphi.$$

Die Formeln für die quadratischen Gleichungen finden sich z. B. in den 5stelligen Köhler'schen Logarithmentafeln hinter den Logarithmen der Sinus und Tangenten. Sie lauten:

I. Wenn $x^2+px=q$.

Auflösung.

$$\operatorname{tang} A=\frac{2}{p}\sqrt{q}$$

1) $x=\operatorname{tang}\frac{A}{2}\sqrt{q}$

2) $x=-\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\sqrt{q}$.

II. Wenn $x^2-px=q$.

Auflösung.

$$\operatorname{tang} A=\frac{2}{p}\sqrt{q}$$

1) $x=-\operatorname{tang}\frac{A}{2}\sqrt{q}$

2) $x=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\sqrt{q}$.

III. Wenn $x^2+px=-q$.

Auflösung.

$$\sin A=\frac{2}{p}\sqrt{q}$$

1) $x=-\operatorname{tang}\frac{A}{2}\sqrt{q}$

2) $x=-\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\sqrt{q}$.

IV. Wenn $x^2-px=-q$.

Auflösung.

$$\sin A=\frac{2}{p}\sqrt{q}$$

1) $x=\operatorname{tang}\frac{A}{2}\sqrt{q}$

2) $x=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\sqrt{q}$.

Entwickelung von I.

$$x^2+px=q$$

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=q+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}\left(\frac{4q}{p^2}+1\right)$$

$$\frac{4q}{p^2}=\operatorname{tang}^2A;\quad \frac{p}{2}=\frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tang}A}$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}(\operatorname{tang}^2A+1)=\frac{p^2}{4}\sec^2A=\left(\frac{p}{2}\sec A\right)^2=\left(\frac{p}{2\cos A}\right)^2$$

$$x+\frac{p}{2}=\pm\frac{p}{2\cos A}$$

$$x=\frac{p}{2}\left(\pm\frac{1}{\cos A}-1\right)=\frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tang}A}\times\frac{\pm1-\cos A}{\cos A}=\frac{(\pm1-\cos A)}{\operatorname{tang}A\cos A}\sqrt{q}$$

1) $x=\dfrac{1-\cos A}{\sin A}\cdot\sqrt{q}=\dfrac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cdot\sqrt{q}=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\sqrt{q}$

2) $x=-\dfrac{1+\cos A}{\sin A}\cdot\sqrt{q}=-\dfrac{2\cos^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cdot\sqrt{q}=-\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\sqrt{q}$.

Und endlich

1) $x = \operatorname{tang}\frac{A}{2}\sqrt{q}$

2) $x = -\operatorname{cotg}\frac{A}{2}q.$

Die Entwickelung für den zweiten Fall, $x^2-px=q$, ist ebenso.

Entwickelung von III.

$$x^2+px=-q$$

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}\left(-\frac{4q}{p^2}+1\right)$$

$$\frac{4q}{p^2}=\sin^2 A;\quad \frac{p}{2}=\frac{\sqrt{q}}{\sin A}$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}(1-\sin^2 A)=\frac{p^2}{4}\cos^2 A=\left(\frac{p}{2}\cos A\right)^2$$

$$x+\frac{p}{2}=\pm\frac{p}{2}\cos A$$

$$x=\frac{p}{2}.(\pm\cos A-1)=\frac{\sqrt{q}}{\sin A}.(\pm\cos A-1)=-\frac{1\mp\cos A}{\sin A}.\sqrt{q}$$

Die trigonometrische Entwickelung der quadratischen Gleichungen verwendet hiernach folgende Formeln:

1) $1+\operatorname{tang}^2 x = \sec^2 x$; 2) $1-\sin^2 x = \cos^2 x$;

3) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$; 4) $\operatorname{tang} x \cos x = \sin x$;

5) $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$; 6) $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$;

7) $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; 8) $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tang} x$;

9) $\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x$; also neun Formeln.

Ich glaube durch das Vorstehende den hohen pädagogischen Nutzen dieser Entwickelung dargethan zu haben.

Auch die Verwendung entsprechender Zahlenbeispiele ist für den Schüler sehr belehrend.

XXVI.

Miscellen.

1.

Beweis eines Satzes aus der Theorie der geometrischen Addition der Strecken im Raume.

Es ist bekannt, dass wenn man mit α_n Einheiten gewisser constanten Strecken, mit p_n aber Coefficienten bezeichnet, so wird die

$$p_n \alpha_n = x_n s_1 + y_n s_2 + z_n s_3,$$

wo x_n, y_n, z_n Functionen der Variabeln t sind, s_1, s_2 und s_3 aber Einheiten derjenigen Strecken sind, die parallel den Coordinaten-Axen laufen.

Wenn man also diese Zerlegung mit allen Strecken vollzieht, so wird

$$\varrho = \sum_{n=1}^{n=m} p_n \alpha_n = x s_1 + y s_2 + z s_3,$$

wo x, y, z Functionen der Veränderlichen t bezeichnen.

Aus der Definition der geometrischen Addition folgt, dass x, y, z die Coordinaten des Endpunktes der Strecke ϱ bezeichnen; wenn wir also aus den Gleichungen

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t)$$

die Veränderliche t eliminiren, so werden wir zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten x, y, z erhalten, die wie bekannt, eine Curve darstellen.

Im Falle, dass die p_n Functionen zweier Veränderlichen t und u sind, wird

$$\varrho = \sum_{n=1}^{n=m} p_n \alpha_n = x s_1 + y s_2 + z s_3,$$

wo x, y, z Functionen der beiden Veränderlichen u und t sind, das heisst

$$x = \varphi_1(u, t), \quad y = \varphi_2(u, t), \quad z = \varphi_3(u, t).$$

Wenn man aus diesen Gleichungen die beiden Veränderlichen u und t eliminirt, so bekommt man eine Gleichung $F(x, y, z) = 0$, die, wie bekannt, eine Fläche darstellt.

Warschau, den 1. Juli 1875.

Dr. Carl Hertz,
Lehrer am zweiten Gymnasium zu Warschau.

2.

Minimum-Oberflächen der drei ersten Classen von Polyedern.

§ 1. Classificirung der Polyeder. Unter dem Netze eines Polyeders versteht man bekanntlich die Anordnung der Eckpunkte, Kanten und Seiten ohne jede quantitative Bestimmung der Dimensionen und Winkel. Man kann nun versuchen, alle möglichen Netze innerhalb definirter Bezirke aufzustellen, der Art dass sich diese Bezirke ins unbegrenzte systematisch erweitern lassen und ins unendliche erweitert die Gesammtheit umfassen. Das nächst liegende Princip ist, die grösste Kantenzahl einerseits einer Ecke, andrerseits eines Polygons als massgebend für den Bezirk anzusehen. Da jedoch die Aufgabe eine sehr verwickelte ist, so wird man sich gern damit begnügen, nur nach einer Seite hin aufzusteigen. Denken wir jedes Polygon durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, und betrachten die Diagonalen als Kanten, so stellt sich jedes Polyeder mit mehrkantigen Seiten als Specialität eines Polyeders mit lauter dreieckigen Seiten dar, indem nur gewisse Flächenwinkel gestreckte sind. Jetzt unterscheiden sich die Netze blos durch die Kantenzahl der Ecken. Rechnen wir alsdann zur ersten, zweiten, dritten Classe u. s. w. die Polyeder, unter deren Ecken bzhw. drei-, vier-, fünfkantige u. s. w. und keine mehrkantigen vorkommen; dann wird schon durch den Euler'schen Satz die Anzahl der möglichen Netze derart umgrenzt, dass sich die 3 ersten Classen erschöpfen lassen. Die höhern Classen sind unbegrenzt. Um auch hier systematisch fortzuschreiten, würde man nach einander 1, 2, 3, ... sechskantige, nachher ebenso einzeln siebenkantige Ecken zulassen u. s. w.

Es ist nun in der Tat möglich einen Algorithmus aufzustellen, nach welchem man sicher und leicht die möglichen Netze jeder Classe, bzhw. jeder Unterabteilung der höhern Classen erschöpfend entwickeln kann. Schwerer ist es unter den gefundenen Netzen die identischen aufzufinden, und zur Anzahl der verschiedenen zu gelangen. Ich übergehe den von mir angewandten Algorithmus, weil es mir eine angenehmere Arbeit zu sein scheint, sich einen eignen zu erdenken als in solchen Dingen einer fremden Beschreibung zu folgen. Das Resultat ist, dass die erste Classe 1, die zweite 2, die dritte 8 verschiedene Netze enthält. Diese sind in folgender Tabelle aufgestellt.

	Anzahl der $n$kantigen Ecken			
	$n=3$	4	5	
I	4			Tetraeder.
II	2	3		dreiseitige Doppelpyramide.
III		6		Oktaeder.
IV	2	2	2	Verbindung von 3 anstossenden Tetraedern.
V	1	3	3	Oktaeder mit 1 aufgesetzten Tetraeder.
VI		5	2	fünfseitige Doppelpyramide.
VII	2		6	Oktaeder mit 2 auf Gegenseiten aufgesetzten Tetraedern.
VIII		4	4	Polyeder, das aus dem Oktaeder durch Spaltung einer Ecke und deren Kantenverbindungen in je 2 hervorgeht.
IX		3	6	dreiseitiges Prisma mit 3 aufgesetzten 4seitigen Pyramiden.
X		2	8	Verbindung zweier vierseitigen Pyramiden mit zugekehrten Oeffnungen durch einen Kranz von 8 Dreiecken.
XI			12	Ikosaeder.

Man sieht daraus, dass die 3 ersten Classen noch innerhalb der mehrfach symmetrischen Anordnung bleiben. Unter einem symmetrischen Netze ist ein solches zu verstehen, dessen Ecken zu beiden Seiten einer schneidenden Fläche, soweit sie nicht in dieselbe hineinfallen, einander paarweise entsprechen, und entsprechend durch Kanten und Seitenflächen verbunden sind, mit der weitern Bedingung, dass alle Kanten, welche jene Fläche schneiden, je 2 entsprechende Punkte verbinden. Die in der blossen Anordnung bestehende Symmetrie des Netzes lässt stets die ihr gemässe wirkliche Symmetrie des Polyeders zu. Lässt man die genannte weitere Bedingung fallen, so können die beiden Teile des Netzes und des Polyeders symmetrisch sein ohne symmetrisch zu liegen. So wird z. B. ein Oktaeder geteilt durch eine Fläche, welche zwischen 2 Gegenseiten liegt.

§ 2. Minimumflächen der 11 Polyeder 1., 2. und 3. Classe. Die Variation eines von lauter Dreiecken begrenzten Polyeders sei durch die Bedingungen beschränkt, dass sein Volum constant, sein Netz vorgeschrieben sei, und jede diesem Netze zukommende Symmetrie auch am Polyeder statthabe; es wird seine kleinste Oberfläche gesucht. Bei dieser Stellung der Aufgabe wird die allgemeine Frage über-

gangen, ob es für gegebenes Netz ein Polyeder von kleinster Oberfläche bei constantem Volum geben könne, in welchem nicht jede durch das Netz zulässige Symmetrie realisirt ist. Es handelt sich demnach hier nur um einige Specialrechnungen, über deren Gang in Betreff der genannten 11 Netze ich nur die notwendigsten Angaben machen will, um hernach die Resultate zusammenzustellen.

Bei Bestimmung dreikantiger Ecken kommt folgender Satz zustatten:

Die Oberfläche einer dreiseitigen Pyramide von fester Basis ist ein Minimum bei constantem Volum, wenn die Spitze auf der im Inkreiscentrum errichteten Normale der Basis liegt.

Hieraus folgt nämlich, dass der Scheitel jeder dreikantigen Ecke auf derjenigen Normale der Ebene der 3 umliegenden Punkte liegen muss, welche durch das Inkreiscentrum des durch letztere bestimmten Dreiecks geht.

Die Netze I, III und XI verlangen keine Untersuchung: die regelmässigen 3 Polyeder lösen die Aufgabe.

Alle übrigen Netze, bloss IV und VIII ausgenommen, haben eine Axe der Symmetrie, um welche herum die Ecken und Kanten in regelmässigen Kränzen liegen müssen. Unter ihnen lassen sich die Doppelpyramiden II, III, VI zusammenfassen. Die Basis eines solchen, ein regelmässiges Polygon, sei $= a^2g$, wo a deren Seite bezeichnet, ihr kleiner Radius $= ar$, die Neigung aller Seitenflächen gegen die Basis $= \vartheta$. Setzen wir hier, wie auch künftig, das Volum $= p$, die Oberfläche $= q$, so ist

$$p = \frac{2}{3}a^3gr\operatorname{tg}\vartheta; \qquad q = \frac{2a^2g}{\cos\vartheta}$$

und a, ϑ allein variabel. Eliminirt man ∂a zwischen $\partial p = 0$ und $\partial q = 0$, so kommt:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{2}$$

ein Wert, der dem regelmässigen Oktaeder zukommt, und der hiernach auch für alle andern Doppelpyramiden gilt.

Jetzt können wir wieder die Netze VII, X, XI zusammenfassen. Sie werden gebildet durch 2 einander mit den Oeffnungen zugekehrte $n$seitige Pyramiden verbunden durch einen Kranz von $2n$ Dreiecken. Sei nun a die Seite, ar der grosse, $a\varrho$ der kleine Radius, a^2g der Inhalt der Grundflächen der Pyramiden, ak ihr Abstand, a^2f der Inhalt des Mittelschnitts zwischen beiden, ϑ, η die Neigung der Seitenflächen der Pyramiden und des Kranzes gegen die Grundflächen, so dass $k = (r-\varrho)\operatorname{tg}\eta$, n die Seitenzahl der Pyramiden. Dann wird

$$p = \tfrac{1}{3} a^3 \{2g\varrho \operatorname{tg} \vartheta + (2f+g)(r-\varrho) \operatorname{tg} \eta\}; \quad q = a^2 \left(\frac{2g}{\cos\vartheta} + n \frac{r-\varrho}{\cos\eta}\right)$$

Hier variiren nur a, ϑ, η. Eliminirt man ∂a zwischen $\partial p = 0$ und $\partial q = 0$, so erhält man als Bedingungen des Minimums q:

$$2\varrho \left(\frac{2g}{\cos\vartheta} + n \frac{r-\varrho}{\cos\eta}\right) = 3 \sin\vartheta \{2g\varrho \operatorname{tg}\vartheta + (2f+g)(r-\varrho) \operatorname{tg}\eta\}$$

$$n\varrho \sin\eta = (2f+g) \sin\vartheta$$

Eliminirt man jetzt η, so ergiebt sich eine kubische Gleichung für $\sin^2\vartheta$.

Einfacher gestalten sich die Gleichungen für $n = 3$. Hier wird

$$p = \frac{1}{12} a^3 (\operatorname{tg}\vartheta + 2 \operatorname{tg}\eta); \quad q = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \left(\frac{1}{\cos\vartheta} + \frac{1}{\cos\eta}\right)$$

und die Bedingungen des Minimums q:

$$\sin\eta = 2 \sin\vartheta; \quad 3 \cos\vartheta \cos\eta = 1$$

woraus:

$$\cos^2\vartheta = \frac{\sqrt{97}+9}{24}; \qquad \cos^2\eta = \frac{\sqrt{97}-9}{6}$$

$$p = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{\frac{\sqrt{97}+5}{2}}; \qquad q = \frac{3}{4} a^2 \sqrt{\frac{5\sqrt{97}-11}{2}}$$

als Lösung für VII.

Ist $n = 4$, so lautet die reducirte kubische Gleichung für $\sin^2\vartheta$:

$$N^3 - 9 \frac{5-3\sqrt{2}}{2} N + 36 - 29\sqrt{2} = 0$$

wo

$$N = 2\sqrt{2} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sin^2\vartheta} - 1\right)$$

gesetzt ist. Nach ihrer Auflösung findet man

$$\sin\eta = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \sin\vartheta$$

Hiermit ist die Minimalfläche für X bestimmt.

Mit den vorigen Netzen hat noch IX gemein, dass es ausser der Symmetrieaxe eine Symmetrieebene besitzt, die normal zur Axe hier durch die 3 Pyramidenspitzen geht. Die Kante an der Endfläche des Kernprismas von IX sei $= a$, die Höhe des Prismas $= \sqrt{3}\, ah \operatorname{tg}\vartheta$, die Höhe der aufgesetzten Pyramiden $= \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,ah$; dann wird

$$p = \tfrac{3}{4} a^3 h (2h+1) \operatorname{tg} \vartheta; \quad q = \tfrac{1}{2} \sqrt{3} \,.\, a^2 \left(1 + \frac{3h}{\cos \vartheta} + 3h\sqrt{1+3h^2} \operatorname{tg} \vartheta\right)$$

Nach Elimination von ∂a zwischen $\partial p = 0$ und $\partial q = 0$ erhält man als Bedingungen des Minimums q:

$$(4h+1) \sin^2\vartheta + h \frac{2-3h}{\sqrt{1+3h^2}} \sin \vartheta = 2h+1$$

$$3 \sin^2\vartheta + \sqrt{1+3h^2} \sin \vartheta - 2 = \frac{2 \cos \vartheta}{3h}$$

Die numerische Auflösung ergiebt:

$$h = 0{,}4778405; \qquad \log \sin \vartheta = 9{,}8946302$$

Das Netz V ist nur symmetrisch zu einer Axe, die durch die Spitze der Pyramide geht. Seien A, B zwei Gegenseiten des Oktaeders, auf B stehe die Pyramide C. Der grosse Radius von A sei $= ab$, der von $B = b$, der Abstand zwischen (den parallelen Ebenen) A und $B = bk$, die Höhe von $C = bh$, und zur Abkürzung

$$k_1 = \sqrt{k^2 + (1 - \tfrac{1}{2}a)^2}; \quad k_2 = \sqrt{k^2 + (a - \tfrac{1}{2})^2}; \quad h_1 = \sqrt{h^2 + \tfrac{1}{4}}$$

dann ist

$$p = \frac{\sqrt{3}}{4} b^3 \{(a+1)^2 k + h\}; \quad q = \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 (ak_1 + k_2 + h_1 + \tfrac{1}{2}a^2)$$

Die Bedingungen des Minimus q werden:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{k}{(a+1)^2} \left(\frac{a}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

$$a + \frac{1-a}{k_1} \left(\frac{k^2}{a+1} + 1 - \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{k_2} \left(\frac{2k^2}{a+1} + \tfrac{1}{2} - a\right)$$

$$\tfrac{1}{2}a^2 + ak_1 + k_2 + h_1 = \frac{3}{2} \frac{h}{h_1} \{(a+1)^2 k + h\}$$

und geben die Werte:

$$a = 0{,}766274; \quad k = 1{,}124911; \quad h = 0{,}310284$$

Die beiden noch übrigen Netze IV und VIII haben nur 2 Ebenen der Symmetrie, doch hat VIII den Vorzug, dass es sich selbst wieder deckt, wenn man ihm um den Durchschnitt beider Ebenen eine Viertelumdrehung und um die eine ihrer beiden Normalen eine halbe Umdrehung erteilt. In der ersten Ebene liegen die Ecken A, A' und B, B' (die gleichen Buchstaben bezeichnen die symmetrischen Ecken); diese gehen bei den 2 genannten Rotationen über in die entsprechen-

den Eckpunkte in der zweiten Ebene A_1, A_1' und B_1, B_1', und umgekehrt. Verbunden durch Kanten sind $BAA'B'$, $B_1A_1A_1'B_1'$, und die A der einen Ebene mit den B der andern. Sei $AA' = 2ab$, $BB' = 2b$, der normale Abstand der Kanten AA' und $A_1A_1 = 2bhk$, der der Diagonalen BB' und $B_1B_1' = 2bk$, und zur Abkürzung

$$r = \sqrt{1 + k^2(h-1)^2}; \quad \varrho = \sqrt{2k^2\{(h+a)^2 + (1-a)^2\} + (1-a)^2}$$

dann ist

$$p = \tfrac{4}{3}b^3k(h+2a); \quad q = 4b^2(ar+\varrho)$$

und die Bedingungen des Minimums q werden:

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{a(a+\frac{1}{2})(h-1)}{1-a(h+2)}$$

$$k^2 = \frac{1-(1-a)\dfrac{r}{\varrho}}{-(h-1)(h-1-2a)+2(h+1)\dfrac{r}{\varrho}}$$

$$a\{k^2(h-1)^2 - 2\} + 2\{k^2[(h+a)^2 + (1-a)^2] - (1-a)^2\}\frac{r}{\varrho} = 0$$

$$k^2(h-1)^2 + 1 - \{2k^2[(h+a)^2 + (1-a)^2] + (1-a)^2\}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 = 0$$

Aus ihnen ergeben sich die Werte:

$$a = 0{,}1752692; \quad h = 2{,}3837234$$

Die 3 Tetraeder, aus denen das Netz IV besteht, haben eine gemeinsame Kante, Axe der z, diese wird normal halbirt von der einen Symmetrieebene, Ebene der xy, auf welcher die allein noch übrigen 4 Ecken liegen; die andre Symmetrieebene, Ebene der zx, geht durch die gemeinsame Kante und halbirt normal die Gegenkante des mittleren Tetraeders. Die gemeinsame Kante sei $= 2h$, die Radienvectoren der Ecken in der xy Ebene seien l, k, die Amplituden von der x Axe an β, $\alpha+\beta$ (gegenüber $-\beta$, $-\alpha-\beta$). Ausserdem seien ϑ, η die Neigungen der schrägen Seitenflächen gegen die xy Ebene, so dass

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{h}{kl\sin\alpha}\sqrt{k^2+l^2-2kl\cos\alpha}; \quad \operatorname{tg}\eta = \frac{h}{l\cos\beta}$$

dann ist

$$p = \tfrac{2}{3}hl(k\sin\alpha + l\sin\beta\cos\beta)$$

$$q = 2\left(hk + \frac{kl\sin\alpha}{\cos\vartheta} + \frac{l^2\sin\beta\cos\beta}{\cos\eta}\right)$$

Da das Polyeder 2 nicht gleichseitige, obwol gleichschenklige, dreikantige Ecken hat, so sind nach dem im Anfang von §. 2. aufgestellten Satze im voraus die Geraden bekannt, auf denen diese Ecken liegen müssen. Man findet demzufolge die Relation:

$$h^2(l-2k\cos\alpha) = k^2 l\cos^2\alpha$$

Erfüllt man sie durch die Werte:

$$k = \frac{h\cos\gamma}{\cos\alpha}; \qquad l = \frac{2h\cos\gamma}{\sin^2\gamma}$$

so ergeben sich als Bedingungen des Minimums q die Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\eta = \frac{\sin^2\gamma}{2\cos\beta\cos\gamma}$$

$$\sin\alpha = \left(1+\frac{\sin^4\gamma}{4\cos^2\gamma\cos 2\beta}\right)\cos\gamma\cos\eta$$

$$1+\frac{2\sin^2\alpha}{1+\cos^2\gamma} - 3\sin^2\alpha + \cos\alpha\sin\beta\left(\sin\eta - \frac{2\sin\alpha\cos\beta}{\sin^2\gamma}\right) = 0$$

$$1-\frac{2\sin^2\alpha}{1+\cos^2\gamma} + \frac{2\cos\alpha\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\gamma}\left(\cos\gamma\frac{1+\cos^2\eta}{\cos\eta} - 2\sin\alpha\right) = 0$$

welche numerisch aufgelöst ergeben:

$$\alpha = 0{,}4916193 \text{ Rechte}$$
$$\beta = 0{,}2458096 \text{ Rechte}$$
$$\gamma = 0{,}6560191 \text{ Rechte}$$
$$\eta = 0{,}4183803 \text{ Rechte}$$

Es zeigt sich, dass bis auf 7 Decimalstellen $\alpha = 2\beta$ ist. Das Verhältniss algebraisch nachzuweisen ist mir nicht gelungen.

In den folgenden Tabellen sind die Werte der Coordinaten der Ecken der 8 nicht regelmässigen Polyeder für kleinste Oberfläche und Volum = 1, und zwar die Polarcoordinaten r, φ und die zur Ebene der $r\varphi$ normale Coordinate z aufgeführt:

II

Nummer der Ecke.	r	φ			z
1	0				$-h$
2, 3, 4	a	$-\frac{4}{3}$R	0	$\frac{4}{3}$R	0
5	0				h

$a = 1{,}17759$
$h = 0{,}83268$

VI

Nummer der Ecke.	r	φ					z
1	0						$-h$
2, 3, 4, 5, 6	a	$-\frac{8}{5}$R	$-\frac{4}{5}$R	0	$\frac{4}{5}$R	$\frac{8}{5}$R	0
7	0						h

$a = 0{,}82002$
$h = 0{,}93820$

IV

Nummer der Ecke.	r	φ		z
1	0			$-h$
2, 3	a	$-\lambda$	λ	0
4, 5	b	-3λ	3λ	0
6	0			h

$a = 1{,}40441$
$b = 0{,}72087$
$h = 1{,}00388$
$\lambda = 0{,}24581\,R$

V

Nummer der Ecke.	r	φ			r
1	0				0
2, 3, 4	a	$-\frac{4}{3}R$	0	$\frac{4}{3}R$	h
5, 6, 7	b	$-\frac{2}{3}R$	$2R$	$\frac{2}{3}R$	k

$a = 0{,}84678$
$b = 0{,}64886$
$h = 0{,}26274$
$k = 1{,}21529$

VII

Nummer der Ecke.	r	φ			z
1	0				$-h$
2, 3, 4	a	$-\frac{4}{3}R$	0	$\frac{4}{3}R$	$-k$
5, 6, 7	a	$-\frac{2}{3}R$	$2R$	$\frac{2}{3}R$	k
8	0				h

$a = 0{,}75113$
$h = 0{,}85724$
$k = 0{,}60181$

VIII

Nummer der Ecke.	r	φ		z
1, 2	a	0	$2R$	$-h$
3, 4	b	0	$2R$	k
5, 6	a	R	$3R$	h
7, 8	b	R	$3R$	$-k$

$a = 0{,}16120$
$b = 0{,}91972$
$h = 0{,}77298$
$k = 0{,}32427$

IX

Nummer der Ecke.	r	φ			z
1, 2, 3	a	$-\frac{4}{3}R$	0	$\frac{4}{3}R$	$-h$
4, 5, 6	b	$-\frac{2}{3}R$	$2R$	$\frac{2}{3}R$	0
7, 8, 9	a	$-\frac{4}{3}R$	0	$\frac{4}{3}R$	h

$a = 0{,}60093$
$b = 0{,}73119$
$h = 0{,}54501$

X

Nummer der Ecke.	r	φ				z
1	0					$-h$
2, 3, 4, 5	a	0	R	$2R$	$3R$	$-k$
6, 7, 8, 9	a	$\frac{1}{2}R$	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	k
10	0					h

$a = 0{,}68502$
$h = 0{,}70295$
$k = 0{,}37086$

Die Oberflächen aller 11 Polyeder haben für ein Volum = 1 folgende kleinste Werte:

Polyeder	Oberfläche	Polyeder	Oberfläche
I	7,20562	VII	5,55106
II	6,24025	VIII	5,98543
III	5,71911	IX	5,31612
IV	5,67443	X	5,26016
V	5,62806	XI	5,14835
VI	5,53841	Kugel	4,83598

R. Hoppe.

XXVII.

Kriterien der singulären Integrale der Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von
Herrn *W. Veltmann*,
Realschullehrer zu Düren.

Von einer Differentialgleichung der ersten Ordnung

(1) $$f(x, y, y') = 0,$$

wo y' die Fluxion von y nach x, sei eine Auflösung

(2) $$y = \varphi(x)$$

gegeben. Es soll untersucht werden, ob diese Auflösung eine singuläre oder particuläre ist. Folgende Definitionen legen wir hierbei zu Grunde.

Wenn für die Auflösung $y = \varphi(x)$ in der ganzen Ausdehnung, in welcher y als Function $\varphi(x)$ von x gegeben ist, keine benachbarte Auflösungen existiren, so nennen wir sie eine singuläre. Unter benachbarten Auflösungen verstehen wir hier solche, die entstehen, wenn man in Gleich. (2) die Function $\varphi(x)$ unendlich wenig variiren lässt. Stellen wir $y = \varphi(x)$ durch eine Curve in x als Abscisse, y als Ordinate dar, so nennen wir also die Gleichung dann ein singuläres Integral, wenn die Curve keine noch so geringe Formänderung erleiden kann, ohne das sie aufhört, eine Lösung der Differentialgleichung darzustellen.

Wenn dagegen in der ganzen Ausdehnung, in welcher $\varphi(x)$ gegeben ist, benachbarte Lösungen existiren, wenn also obige Curve

durch stetige Formänderung in andere Curven übergehen kann, ohne das sie aufhört, eine Auflösung der Gleichung (1) darzustellen, so nennen wir $y = \varphi(x)$ eine particuläre Lösung.

Verhält sich die Gleichung $y = \varphi(x)$ teils in der einen, teils in der anderen Weise, hat sie in einem Teile der Ausdehnung der Function $\varphi(x)$ benachbarte Lösungen, in anderen Teilen nicht, so ist sie aus singulären und particulären Lösungen zusammengesetzt. Wir wollen zunächst annehmen, dass $y = \varphi(x)$ in ihrer ganzen Ausdehnung entweder eine singuläre oder particuläre Lösung sei. Lassen wir in Gleichung (2) die Function $\varphi(x)$ unendlich wenig variiren, addiren wir also zu y eine unendlich kleine Function δy von x. Dann ist in Gleichung (1):

$$(3)\qquad \begin{aligned} \delta f(x,y,y') = \frac{df}{dy}\delta y &+ \frac{d^2f}{dy^2}\frac{\delta y^2}{1.2} + \frac{d^3f}{dy^3}\frac{\delta y^3}{1.2.3} \cdots \\ &+ \frac{df}{dy'}\delta y' + \frac{d^2f}{dy\,dy'}\delta y\delta y' + \frac{d^3f}{dy^2dy'}\frac{\delta y^2}{1.2}\delta y' \cdots \\ &+ \frac{d^2f}{dy'^2}\frac{\delta y'^2}{1.2} + \frac{d^3f}{dy\,dy'^2}\delta y\frac{\delta y'^2}{1.2} \cdots \\ &+ \frac{d^3f}{dy'^3}\frac{\delta y'^3}{1.2.3} \cdots \end{aligned}$$

Wenn nun die durch die Variation von $\varphi(x)$ veränderte Gleichung (2) ebenfalls ein Integral von (1) sein soll, so muss die rechte Seite der Gleichung (3), wenn man y und y' als Functionen von x aus (2) entnommen in (3) einsetzt, $= 0$ werden für alle Werte von x, für welche $\varphi(x)$ gegeben ist. Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. $\frac{df}{dy}$ und $\frac{df}{dy'}$ sind nicht beide gleich 0. Dann ist das Integral ein particuläres oder singuläres, je nachdem

$$(4)\qquad \frac{df}{dy}\delta y + \frac{df}{dy'}\delta y'$$

für irgend ein von Null verschiedenes δy der Null gleich gemacht werden kann oder nicht, da die übrigen Glieder in (3) rechts von höherer Ordnung sind. Wir betrachten nun hier wieder folgende Fälle:

a) Es ist nicht

$$\frac{df}{dy'} = 0.$$

Dann können wir die Gleichung (4) so schreiben:

(5)
$$\frac{1}{\delta y}\frac{d\delta y}{dx} = -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dy'}}$$

Der Quotient rechts ist eine Function von x, welche auch identisch $=0$ oder $=\infty$ sein kann. Setzen wir denselben $=\psi'(x)$, wo $\psi'(x)$ die Fluxion einer Function $\psi(x)$ nach x ist, so erhalten wir durch Integration

(6)
$$\delta y = c\,e^{\psi(x)}$$

wo e die Basis der Neper'schen Logarithmen und c eine unendlich klein zu nehmende Constante.

Wenn $\psi'(x)$ und also auch $\psi(x)$ unendlich gross ist, so kann die unendlich kleine Constante c nur dann so gewählt werden, dass δy überall unendlich klein wird, wenn $\psi(x)$ ein constantes unendlich Grosses und deshalb $e^{\psi(x)}$ für alle Werte von x ein unendlich Grosses von gleichbleibender Ordnung ist. Ist das nicht der Fall, so hat man ein singuläres Integral.

Wenn $\psi'(x) = 0$ oder endlich ist, so liefert die Gleichung (6) stets eine brauchbare Variation; der Gleichung (2) sind andere Auflösungen benachbart und das Integral ist particulär.

In letzterem Falle könnte man ein zweites particuläres Integral, welches mit dem gegebenen stetig zusammenhängt, sich aber um eine endliche Grösse davon unterscheidet, auf folgende Weise erhalten:

Man setze

$$\begin{aligned}
y_1 &= y + c\,e^{\psi(x)}\\
y_2 &= y_1 + c\,e^{\psi_1(x)}\\
y_3 &= y_2 + c\,e^{\psi_2(x)}\\
&\vdots\\
y_n &= y_{n-1} + c\,e^{\psi_{n-1}(x)},
\end{aligned}$$

wo y_m aus y_{m-1} auf dieselbe Weise abgeleitet wird, wie y_1 aus y. Die Grösse c sei der $n$te Teil einer willkürlich, aber hinreichend klein gewählten Grösse C. Beim Uebergange von y_{m-1}, auf y wächst $f(x, y, y')$ um eine Grösse, welche nach Obigem bei gegen 0 convergirenden c, also unendlich grossem n, im Vergleich zu c unendlich klein wird. Der gesammte Zuwachs von $f(x, y, y')$ bleibt daher gegen nc oder C ebenfalls unendlich klein. Nun sind aber die gesammten Zuwachse von y, nämlich $c\,e^{\psi(x)}$, $c\,e^{\psi_1(x)}$ etc. mit c von gleicher Ordnung, stellen also zusammen gleich wie cn eine endliche Grösse dar.

Mithin wächst y um eine Function von endlicher Grösse, während der Zuwachs von $f(x, y, y')$ unendlich klein bleibt, d. h. $= c : Q$. Demnach ist

$$y = y_n$$

ein particuläres Integral von (1), welches von (2) um eine endliche Grösse abweicht, jedoch stetig durch andere particuläre Integrale in dasselbe übergehen kann.

b) Es sei

$$\frac{df}{dy'} = 0.$$

Da, wie vorausgesetzt in Gleichung (2) nicht auch

$$\frac{df}{dy} = 0$$

ist, so muss $\delta y = 0$ sein. Es existirt also dann keine benachbarte Auflösung; das gegebene Integral ist ein singuläres.

2. Es sei

$$\frac{df}{dy} = \frac{df}{dy'} = 0.$$

Dann müssen in (3) die Glieder der 2ten Ordnung zusammen $= 0$ sein, also

$$\frac{d^2f}{dy^2}\delta y^2 + 2\frac{d^2f}{dy\,dy'}\delta y\,\delta y' + \frac{d^2f}{dy'^2}\delta y'^2 = 0$$

oder

$$\frac{d^2f}{dy^2} + 2\frac{d^2f}{dy\,dy'}\frac{\delta y'}{\delta y} + \frac{d^2f}{dy'^2}\left(\frac{\delta y'}{\delta y}\right)^2 = 0$$

oder

$$\frac{d^2f}{dy^2} + 2\frac{d^2f}{dy\,dy'}\frac{d(\lg\delta y)}{dx} + \frac{d^2f}{dy'^2}\left(\frac{d(\lg\delta y)}{dx}\right)^2 = 0. \tag{7}$$

Wenn nun $\frac{d^2f}{dy'^2} = 0$ ist, so wird (7) eine Gleichung 1ten Grades für $\frac{d(\lg\delta y)}{dx}$, für welche dieselbe Discussion gilt, wie oben für (4). Ist dagegen $\frac{d^2f}{dy'^2}$ nicht $= 0$, so kann man die Gleichung 2ten Grades auflösen und erhält für $\frac{d(\lg\delta y)}{dx}$ einen Ausdruck, den man ebenfalls auf obige Weise zu untersuchen hat.

3. Wenn auch die Glieder 2ter Ordnung in der Gleichung (3) verschwinden, so setzt man die der 3ten $= 0$, wenn auch diese verschwinden, die der 4ten u. s. w. Es seien nun die Glieder der $n$ten

Ordnung die niedrigsten, welche nicht sämmtlich verschwinden. Setzt man ihre Summe $= 0$ und dividirt durch δy^n, so erhält man eine Gleichung $n$ten Grades in $\frac{d(\lg \delta y)}{dx}$. In dieser Gleichung sei die $m$te Potenz die höchste, deren Coefficient nicht verschwindet. Dividirt man durch diesen Coefficienten, so hat man eine Gleichung von der Form

$$(8) \qquad a + a_1 \frac{dz}{dx} + a_2 \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \ldots + a_{m-1} \left(\frac{dz}{dx}\right)^{m-1} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^m = 0,$$

worin $a, a_1, \ldots$ Functionen von x sind, und $z = \lg \delta y$ ist.

Da $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\delta y} \frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d\delta z}{dx}$ aber eine Grösse von gleicher Ordnung mit δy ist, so ist $\frac{dz}{dx}$ eine endliche Grösse. Wenn also die Gleichung (8) für $\frac{dz}{dx}$ einen endlichen Wert gibt, d. h. wenn alle Coefficienten endliche Grössen sind, so ist das gegebene Integral ein particuläres, im entgegengesetzten Falle ein singuläres.

Soll ein singuläres Integral einer gegebenen Differentialgleichung erst gefunden werden, so stelle man nur nach Obigem die Gleichungen auf, deren jede die Existenz eines solchen bedingt und eliminire dann y' zwischen jeder von diesen Gleichungen und der gegebenen Differentialgleichung.

XXVIII.

Ueber eine besondere Art von successiven linearen Substitutionen.

Von

W. Veltmann.

Durch eine Untersuchung über die Wirkungsweise der Influenzmaschine wurde ich zu einem Verfahren geführt, die Resultate von

Als stetige Function von x_0 und n, welche für ganze Werte von n dieselben Werte annimmt, welche die auf einander folgenden Substitutionen liefern, kann man daher x durch die Gleichung darstellen

$$x = a^n x_0.$$

Wir werden sehen, dass bei einer grösseren Anzahl von Variabeln die Resultate der Substitutionen aus den Gliedern einer gleichen Anzahl von geometrischen Reihen zusammengesetzt sind.

2. Zwei abhängige Variabeln x und y. Die Substitutionsgleichungen seien

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a x_n + b y_n \\ y_{n+1} &= \alpha x_n + \beta y_n \end{aligned} \tag{2}$$

wo a, b, α, β irgend welche Constanten. Diese Gleichungen gelten zunächst nur für ganze Werte von n. Man kann durch dieselben x_1 und y_1 aus x_0 und y_0, daraus dann x_2 und y_2 etc. erhalten. Um die Functionen x und y auch auf gebrochene Werte von n auszudehnen, ohne dass sie aufhören, für ganze n die auf obige Weise sich ergebenden Werte anzunehmen, könnte man auf folgende Weise verfahren.

Man setze z. B.

$$\begin{aligned} x_{n+\frac{1}{2}} &= a_1 x_n + b_1 y_n \\ y_{n+\frac{1}{2}} &= \alpha_1 x_n + \beta_1 y_n \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_1 x_{n+\frac{1}{2}} + b_1 y_{n+\frac{1}{2}} \\ y_{n+1} &= \alpha_1 x_{n+\frac{1}{2}} + \beta_1 y_{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4}$$

Substituirt man aus (3) in (4), so erhält man

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (a_1^2 + b_1 \alpha_1) x_n + (a_1 b_1 + b_1 \beta_1) y_n \\ y_{n+1} &= (\alpha_1 a_1 + \beta_1 \alpha_1) x_n + (\alpha_1 b_1 + \beta_1^2) y_n \end{aligned} \tag{5}$$

Diese Gleichungen müssen mit (2) übereinstimmen, also

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1 \alpha_1 &= a, \quad a_1 b_1 + b_1 \beta_1 = b \\ \alpha_1 a_1 + \beta_1 \alpha_1 &= \alpha, \quad \alpha_1 b_1 + \beta_1^2 = \beta \end{aligned}$$

Hieraus könnte man nun a_1, b_1, α_1, β_1 berechnen und die Gleichungen (3) oder (4) würden dann für ganze Werte von n dieselben Werte für x und y liefern, wie (2), ausserdem aber auch noch welche für $n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \ldots$

Ebenso könnte man setzen

$$\begin{aligned} x_{n+\frac{1}{3}} &= a_1 x_n + b_1 y_n \\ y_{n+\frac{1}{3}} &= \alpha_1 x_n + \beta_1 y_n \end{aligned} \tag{6}$$

$$(7) \qquad \begin{aligned} x_{n+\frac{2}{3}} &= a_1 x_{n+\frac{1}{3}} + b_1 y_{n+\frac{1}{3}} \\ y_{n+\frac{2}{3}} &= \alpha_1 x_{n+\frac{1}{3}} + \beta_1 y_{n+\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$(8) \qquad \begin{aligned} x_{n+1} &= a_1 x_{n+\frac{2}{3}} + b_1 y_{n+\frac{2}{3}} \\ y_{n+1} &= \alpha_1 x_{n+\frac{2}{3}} + \beta_1 y_{n+\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Dann aus (6) in (7), darauf aus (7) in (8) substituiren, die Coefficienten von (8) denen in (2) gleichsetzen und aus den erhaltenen Gleichungen a_1, b_1, α_1, β_1 berechnen. Die Functionen x und y wären dann auch für $n = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\frac{1}{3} \ldots$ gegeben, hätten aber für $n = 1, 2$ etc. noch dieselben Werte wie früher.

Auf dieselbe Weise könnte man das Intervall 1 der ganzen Werte von n in beliebig viele Teile zerlegen und die Functionen x und y auf die entsprechenden Bruchzahlen ausdehnen. Wir wollen die Zahl dieser Teile unendlich gross nehmen und jeden derselben $= dn$ setzen, so dass wir x und y als continuirliche Functionen von n erhalten, die aber für ganze Werte des n die den Gleichungen (2) entsprechenden Werte annehmen. Da, wenn n sich um ein unendlich kleines dn ändert, x und y ebenfalls nur unendlich kleine Aenderungen erleiden dürfen, so können x_{n+dn} und y_{n+dn} resp. von x_n und y_n nur um Grössen von gleicher Ordnung mit dn verschieden sein. Wir müssen daher setzen

$$\begin{aligned} x_{n+dn} &= (1 + a_1\,dn)\,x_n + b_1\,dn\,y_n \\ y_{n+dn} &= \alpha_1\,dn\,x_n + (1 + \beta_1\,dn)\,y_n \end{aligned}$$

Wenn wir auf beiden Seiten in der ersten dieser Gleichungen x_n, in der zweiten y_n subtrahiren, so können wir dieselben so schreiben:

$$\frac{dx_n}{dn} = a_1 x_n + b_1 y_n$$

$$\frac{dy_n}{dn} = \alpha_1 x_n + \beta_1 y_n$$

Die Auflösung dieser Differentialgleichungen hat die Form

$$(9) \qquad \begin{aligned} x_n &= f_1 k_1 r_1^n + f_2 k_2 r_2^n \\ y_n &= g_1 k_1 r_1^n + g_2 k_2 r_2^n \end{aligned}$$

wo k_1 und k_2 die Integrationsconstanten sind, f_1, g_1, f_2, g_2, r_1 und r_2 aber von a_1, b_1, α_1 und β_1 abhängen. Letztere sowie auch die Differentialgleichungen berücksichtigen wir jedoch nicht weiter; vielmehr gehen wir, nachdem wir als die Form der gesuchten Functionen diejenige in den Gleichungen (9) erkannt haben, unmittelbar von diesen aus und bestimmen sämmtliche Constanten in derselben der Bedingung gemäss, dass x_n und y_n für ganze Werte von n dieselben Werte an-

nehmen, welche sie gemäss den Gleichungen (2) erhalten. Hierzu ist nun zunächst erforderlich, dass x_n und y_n in den Gleichungen (9) für $n=0$ die Werte x_0 und y_0 annehmen, also dass

$$(10)\qquad \begin{aligned} x_0 &= f_1 k_1 + f_2 k_2 \\ y_0 &= g_1 k_1 + g_2 k_2 \end{aligned}$$

sei. Setzen wir jetzt in den Gleichungen (2) $n=0$, und nehmen für x_0 und y_0 die Werte aus (10), so müssen sich hierdurch für x_1 und y_1 aus den Gleichungen (2) dieselben Werte ergeben, wie aus (9), wenn wir dort $n=1$ setzen. Dieselbe Uebereinstimmung zwischen den Gleichungen (2) und (9) muss bestehen beim Uebergange von x_1, y_1 auf x_2, y_2, von x_2, y_2 auf x_3, y_3 u. s. w. Allgemein: Wenn wir in (2) für x_n und y_n die Werte aus (9) setzen, so müssen sich für x_{n+1} und y_{n+1} dieselben Werte ergeben, wie aus (9), wenn wir hier $n+1$ statt n setzen. Wir haben daher die Gleichungen

$$(11)\qquad \begin{aligned} f_1 k_1 r_1^{n+1} + f_2 k_2 r_2^{n+1} &= (af_1 + bg_1) k_1 r_1^n + (af_2 + bg_2) k_2 r_2^n \\ g_1 k_1 r_1^{n+1} + g_2 k_2 r_2^{n+1} &= (\alpha f_1 + \beta g_1) k_1 r_1^n + (\alpha f_2 + \beta g_2) k_2 r_2^n \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können für alle ganzen Werte von n nur stattfinden, wenn man die Glieder mit gleicher Potenzbasis gleichsetzt, und sie gelten dann überhaupt für alle Werte von n. Es muss also

$$(12)\qquad \begin{aligned} f_1 r_1 &= af_1 + bg_1, & f_2 r_2 &= af_2 + bg_2 \\ g_1 r_1 &= \alpha f_1 + \beta g_1, & g_2 r_2 &= \alpha f_2 + \beta g_2 \end{aligned}$$

sein. Die beiden Gleichungen links unterscheiden sich von denen rechts nur durch die Indices. Beide Paare können daher repräsentirt werden durch die Gleichungen ohne Indices:

$$\begin{aligned} fr &= af + bg \\ gr &= \alpha f + \beta g \end{aligned}$$

oder

$$(13)\qquad \begin{aligned} (r-a)f - bg &= 0 \\ -\alpha f + (r-\beta) g &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen haben in Bezug auf f und g die Auflösung

$$(14)\qquad f : g = r - \beta : \alpha$$

unter der Bedingung, dass die Determinante der Coefficienten

$$(15)\qquad (r-a)(r-\beta) - b\alpha = 0$$

sei. Letztere Gleichung liefert

$$(16)\qquad \begin{aligned} r &= \frac{a+\beta}{2} \pm \sqrt{b\alpha - a\beta + \left(\frac{a+\beta}{2}\right)^2} \\ &= \frac{a+\beta}{2} \pm \sqrt{b\alpha + \left(\frac{a-\beta}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Wir wollen

$$\sqrt{b\alpha+\left(\frac{a-\beta}{2}\right)^2}=w \tag{17}$$

setzen und den Wert von r mit $+w$ für r_1, den mit $-w$ für r_2 nehmen. Wenn wir dann in der Gleichung (14) auch zu f und g die entsprechenden Indices setzen, so können wir

$$\begin{aligned} \left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} &= \frac{a+\beta}{2} \pm w \\ \left.\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}\right\} &= \frac{a-\beta}{2} \pm w \\ g_1 = g_2 &= \alpha \end{aligned} \tag{18}$$

nehmen.

Aus den Gleichungen (10) erhält man

$$k_1 = \frac{x_0 g_2 - f_2 y_0}{f_1 g_2 - f_2 g_1} \qquad k_2 = \frac{f_1 y_0 - x_0 g_1}{f_1 g_2 - f_2 g_1}$$

oder nach (18):

$$k_1 = \frac{\alpha x_0 - \left(\frac{a-\beta}{2} - w\right) y_0}{2\alpha w}$$

(19)

Aus (17) ergibt sich

$$\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+w\right)\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-w\right)=-b\alpha$$

und man kann daher die Gleichungen (20) verwandeln in

$$(21)\quad \begin{aligned} x &= \frac{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+w\right)x_0+by_0}{2w}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+w\right)^n \\ &+ \frac{-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-w\right)x_0-by_0}{2w}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-w\right)^n \\ y &= \frac{\alpha x_0-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}-w\right)y_0}{2w}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+w\right)^n \\ &+ \frac{-\alpha x_0+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+w\right)y_0}{2w}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-w\right)^n \end{aligned}$$

Für ganze Werte von n erhalten diese Ausdrücke dieselben Werte, welche man für x_n und y_n durch successive Substitutionen gemäss den Gleichungen (2) erhält.

Ferner: Wenn man statt von x_0 und y_0 von den Werten der x und y ausgeht, welche sich aus den Gleichungen (21) für einen zwischen 0 und 1 liegenden Wert $\frac{p}{q}$ von n ergeben, so liefern die Gleichungen (2) für $n=\frac{p}{q}+1, \frac{p}{q}+2 \ldots$ die nämlichen Werte, welche man aus (2) für $n=\frac{p}{q}+1, \frac{p}{q}+2 \ldots$ erhält. Hätte man also mittels der Gleichungen (21) die Functionen x und y für alle gebrochenen Werte von n zwischen 0 und 1 berechnet, so könnte man sie für die übrigen gebrochenen Werte des n auch mittels der Gleichungen (2) erhalten.

3. Wenn die Wurzel w imaginär $= ui$ ist, so kann man

$$(22)\quad \begin{aligned} \left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} &= \frac{\alpha+\beta}{2}\pm ui = \varrho(\cos\sigma\pm i\sin\sigma) \\ \left.\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}\right\} &= \frac{\alpha-\beta}{2}\pm ui = \varphi(\cos\tau\pm i\sin\tau) \end{aligned}$$

setzen, wo

$$\varrho = \sqrt{a\beta - b\alpha} \qquad \varphi = -b\alpha$$

$$\cos\sigma = \frac{a+\beta}{2\varrho} \qquad \cos\tau = \frac{a-\beta}{2\varphi}$$

$$\sin\beta = \frac{u}{\varrho} \qquad \sin\tau = \frac{u}{\varphi}$$

Wenn wir aus (22) in (21) einsetzen, so wird

$$x = \frac{\varphi(\cos\tau + i\sin\tau)x_0 + by_0}{2ui}\varrho^n(\cos n\sigma + i\sin n\sigma)$$

$$+ \frac{-\varphi(\cos\tau - i\sin\tau)x_0 - by_0}{2ui}\varrho^n(\cos n\sigma - i\sin n\sigma)$$

$$y = \frac{\alpha x_0 - \varphi(\cos\tau - i\sin\tau)y_0}{2ui}\varrho^n(\cos n\sigma + i\sin n\sigma)$$

$$+ \frac{-\alpha x_0 + \varphi(\cos\tau + i\sin\tau)y_0}{2ui}\varrho^n(\cos n\sigma - i\sin n\sigma)$$

oder, wenn man die Glieder mit x_0 sowie die mit y_0 zusammenzieht:

$$x = \frac{\varphi x_0 \sin(n\sigma + \tau)}{u}\varrho^n + \frac{b y_0 \sin n\sigma}{u}\varrho^n$$

sein, also

$$(25)\qquad \begin{aligned} x &= (x_0 + g_1 n) r^n \\ y &= (y_0 + g_2 n) r^n \end{aligned}$$

Die den Gleichungen (11) entsprechenden sind jetzt

$$\begin{aligned} [x_0 + g_1(n+1)] r^{n+1} &= a(x_0 + g_1 n) r^n + b(y_0 + g_2 n) r^n \\ [y_0 + g_2(n+1)] r^{n+1} &= \alpha(x_0 + g_1 n) r^n + \beta(y_0 + g_2 n) r^n \end{aligned}$$

Damit dieselben für jeden Wert von n stattfinden, muss

$$\begin{aligned} (x_0 + g_1) r &= a x_0 + b y_0 \\ g_1 r &= a g_1 + b g_2 \\ (y_0 + g_2) r &= \alpha x_0 + \beta y_0 \\ g_2 r &= \alpha g_1 + \beta g_2 \end{aligned}$$

oder

$$(26)\qquad \begin{aligned} g_1 r &= (a - r) x_0 + b y_0 \\ g_2 r &= \alpha x_0 + (\beta - r) y_0 \end{aligned}$$

$$(27)\qquad \begin{aligned} (a - r) g_1 + b g_2 &= 0 \\ \alpha g_1 + (\beta - r) g_2 &= 0 \end{aligned}$$

sein. Nehmen wir nun für r den einzigen Wurzelwert der Gleichung (15), also

$$(28)\qquad r = \frac{a+\beta}{2}$$

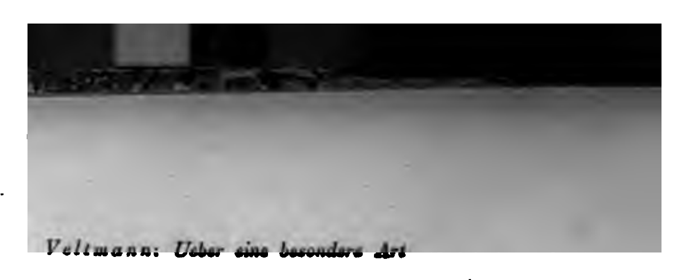
und setzen diesen in die Gleichungen (26), so erhalten wir aus diesen

$$(29)\qquad \begin{aligned} g_1 &= \frac{\frac{a-\beta}{2} x_0 + b y_0}{\frac{a+\beta}{2}} \\ g_2 &= \frac{\alpha x_0 + \frac{\beta - a}{2} y_0}{\frac{a+\beta}{2}} \end{aligned}$$

Da aber die Gleichung (15) stattfindet, welche die Bedingung der Auflösbarkeit der Gleichungen (27) nach g_1 und g_2 darstellt, so erhält man aus diesen

$$(30)\qquad g_1 : g_2 = \frac{\beta - a}{2} : -\alpha = b : \frac{\beta - a}{2}$$

Die Gleichungen (29) und (30) harmoniren mit einander, da in ersteren die Coefficienten sowohl von x_0 als von y_0 dasselbe Verhältniss



haben wie g_1 und g_2 in (30). Setzen wir nun aus (28) und (29) die Werte von g_1, g_2 und r in (25), so wird

$$x = \left[x_0 + \frac{\frac{\alpha-\beta}{2}x_0 + by_0}{\frac{\alpha+\beta}{2}} n \right] \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^n$$

$$y = \left[y_0 + \frac{\alpha x_0 + \frac{\beta-\alpha}{2} y_0}{\frac{\alpha+\beta}{2}.} n \right] \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^n$$

5. Drei Variable x, y, z. Die Substitutionen seien dargestellt durch die Gleichungen

$$(31) \qquad \begin{aligned} x_{n+1} &= a\,x_n + b\,y_n + c\,z_n \\ y_{n+1} &= a_1 x_n + b_1 y_n + c_1 z_n \\ z_{n+1} &= a_2 x_n + b_2 y_n + c_2 z_n \end{aligned}$$

Dieselben liefern x_n, y_n und z_n nach und nach für alle ganzen Werte von n. Um auch solche für alle Zwischenwerte von n einzuschalten, gelangen wir ganz auf dieselbe Weise wie früher zu zwei, so jetzt zu drei simultanen linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten, woraus sich dann die Form der gesuchten Functionen ergibt. Die den Gleichungen (9) entsprechenden sind nämlich jetzt

$$\begin{aligned} x &= f_1 k_1 r_1^n + f_2 k_2 r_2^n + f_3 k_3 r_3^n \\ y &= g_1 k_1 r_1^n + g_2 k_2 r_2^n + g_3 k_3 r_3^n \\ z &= h_1 k_1 r_1^n + h_2 k_2 r_2^n + h_3 k_3 r_3^n \end{aligned}$$

Den Gleichungen (10) entsprechen diese:

$$(33) \qquad \begin{aligned} x_0 &= f_1 k_1 + f_2 k_2 + f_3 k_3 \\ y_0 &= g_1 k_1 + g_2 k_2 + g_3 k_3 \\ z_0 &= h_1 k_1 + h_2 k_2 + h_3 k_3 \end{aligned}$$

und den Gleichungen (11) folgende:

(34)

$$f_1 k_1 r_1^{n+1} + f_2 k_2 r_2^{n+1} + f_3 k_3 r_3^{n+1}$$
$$= (af_1 + bg_1 + ch_1) r_1^n + (af_2 + bg_2 + ch_2) r_2^n + (af_3 + bg_3 + ch_3) r_3^n$$

$$g_1 k_1 r_1^{n+1} + g_2 k_2 r_2^{n+1} + g_3 k_3 r_3^{n+1}$$
$$= (a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1) r_1^n + (a_1 f_2 + b_1 g_2 + c_1 h_2) r_2^n + (a_1 f_3 + b_1 g_3 + c_1 h_3) r_3^n$$

$$h_1 k_1 r_1^{n+1} + h_2 k_2 r_2^{n+1} + h_3 k_3 r_3^{n+1}$$
$$= (a_2 f_1 + b_2 g_1 + c_2 h_1) r_1^n + (a_2 f_2 + b_2 g_2 + c_2 h_2) r_2^n + (a_2 f_3 + b_2 g_3 + c_2 h_3) r_3^n$$

Setzt man die Glieder mit gleicher Potenzbasis einander gleich und dividirt r_1^n, r_2^n, r_3^n, sowie k_1, k_2 und k_3 heraus, so erhält man 9 Gleichungen in 3 Gruppen, die sich nur durch die Indices unterscheiden und die daher repräsentirt werden können durch die Gleichungen ohne Indices

$$\begin{aligned} fr &= a\,f + b\,g + c\,h \\ gr &= a_1 f + b_1 g + c_1 h \\ hr &= a_2 f + b_2 g + c_2 h \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (a-r)f + bg + ch &= 0 \\ a_1 f + (b_1 - r)g + c_1 h &= 0 \\ a_2 f + b_2 g + (c_2 - r)h &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind auflösbar in Bezug auf f, g und h und ihre Auflösung ist

$$f:g:h = [(b_1 - r)(c_2 - r) - c_1 b_2]:[c_1 a_2 - a_1(c_2 - r)]:[a_1 b_2 - (b_1 - r)a_2] \tag{35}$$

unter der Bedingung, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} a-r & b & c \\ a_1 & b_1 - r & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 - r \end{vmatrix} = 0 \tag{36}$$

sei. Wenn diese Gleichung 3ten Grades drei verschiedene Wurzeln hat, so nehmen wir eine für r_1, eine andere für r_2, die dritte für r_3.

Der Proportion (35) gemäss können wir nun

$$\begin{aligned} f_1 &= (b_1 - r_1)(c_2 - r_1) - c_1 b_1 \\ g_1 &= c_1 a_2 - a_1(c_2 - r_1) \\ h_1 &= a_1 b_2 - (b_1 - r_1) a_2 \\ f_2 &= (b_1 - r_2)(c_2 - r_2) - c_1 b_1 \\ g_2 &= c_1 a_2 - a_1(c_2 - r_2) \\ h_2 &= a_1 b_2 - (b_1 - r_2) a_2 \\ f_3 &= (b_1 - r_3)(c_2 - r_3) - c_1 b_1 \\ g_3 &= c_1 a_2 - a_1(c_2 - r_3) \\ h_3 &= a_1 b_2 - (b_1 - r_3) a_2 \end{aligned}$$

nehmen. Setzen wir diese Werte in (33) ein, so liefern uns diese k_1, k_2 und k_3. Damit sind dann alle Constanten der Gleichungen (32) bestimmt und können in diese eingesetzt werden.

Sollten zwei Wurzeln der Gleichung (36) oder auch alle drei einander gleich sein, so verfährt man ganz in derselben Weise, wie in den entsprecchenden Fällen bei der Auflösung von linearen Differentialgleichungen. Für den Fall von zwei gleichen Wurzeln r und einer dritten ϱ z. B. würden x, y und z folgende Formen erhalten:

$$x = (f_1 + f_2 n) r^n + f_3 \varrho^n$$
$$y = (g_1 + g_2 n) r^n + g_3 \varrho^n$$
$$z = (h_1 + h_2 n) r^n + h_3 \varrho^n$$

Im Falle dreier gleichen Wurzeln r wären die Formen

$$x = (f_1 + f_2 n + f_3 n^2) r_1^n$$
$$y = (g_1 + g_2 n + g_3 n^2) r_1^n$$
$$z = (h_1 + h_2 n + h_3 n^2) r_1^n$$

6. Ganz in derselben Weise wie bei zwei oder drei verfährt man auch bei einer beliebigen Anzahl Variablen. Hat man deren m, so ist die Lösung der Aufgabe von einer Gleichung $m$ten Grades abhängig.

XXIX.

Theorie der Holtz'schen Influenzmaschine zweiter Art.

Von

W. Veltmann.

In Band 151 von Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie pag. 513 habe ich Apparate beschrieben und deren Wirkungsweise theoretisch abgeleitet, welche dem Princip nach im Wesentlichen mit der Holtz'schen Maschine erster Art übereinstimmen. Das dort angewandte Verfahren war jedoch nicht geeignet, alle Eigentümlichkeiten jener Apparate erkennen zu lassen; namentlich ergab sich dadurch nicht, dass bei den unter gewissen Voraussetzungen eintretenden beständigen Umkehrungen der Ladung eine fortwährende Zunahme der positiven Maxima und negativen Minima stattfindet. Inzwischen haben mich die der gegenwärtigen Abhandlung vorhergehenden Entwickelungen successiver linearen Substitutionen in den Stand gesetzt, die aufeinander folgenden Ladungen durch analytische Ausdrücke darzustellen, wodurch man dann eine vollständige klare Einsicht in die Wirkungsweise jener Apparate erhält. Da letztere noch nicht ausgeführt sind, so unterlasse ich es vorläufig, darüber Weiteres zu veröffentlichen. Dagegen soll eine auf dieselbe Weise erhaltene Theorie der Holtz'schen Maschine zweiter Art hier auseinandergesetzt werden.

1. Mehreren von einander isolirten Leitern $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ etc. mögen beliebige elektrische Ladungen A, B etc. erteilt werden. Im Zustande des Gleichgewichts ist dann die Dichte in irgend einem Punkte so wie auch die Ladung eines beliebigen Teils der Gesammtoberfläche eine lineare Function der einzelnen Ladungen.

Man erkennt die Richtigkeit dieses Satzes leicht, wenn man zuerst $\mathfrak{A}$, dann $\mathfrak{B}$ u. s. w. allein elektrisch macht und dann die so erhaltenen einzelnen elektrischen Zustände übereinander lagert, d. h. in jedem Punkte die stattgefundenen Dichten addirt. Die in den

einzelnen Leitern constanten Potentiale addiren sich dann ebenfalls und das Gleichgewicht bleibt also bestehen. Da nun die der Ladung eines einzelnen Leiters entsprechenden Dichten derselben proportional sind, so kann man, wenn E die Dichte in irgend einem Punkte oder die Ladung irgend eines Flächenteils ist,

$$E = aA + bB + cC \ldots$$

setzen, wo a, b etc. constante Grössen sind. Wir nennen dieselben die Coefficienten der Influenz des betreffenden Punktes oder Flächenteils resp. durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ etc.

2. Eine Ladung der Maschine, bei welcher einander diametral gegenüberliegende und von der geometrischen Axe gleichabstehende Punkte entgegengesetzt und gleichstark elektrisch sind, nennen wir eine symmetrische.

3. Die Maschine habe zunächst statt der Glasscheiben zwei einander umschliessende Ringe von sehr dünnen, zur Axe parallelen und deshalb in der Fig. 1 als Punkte erscheinenden Metallstäbchen, die einander sehr nahe aber zugleich so isolirt sind, das ein Uebergang von Elektricität zwischen denselben nicht eintritt. Die Conductoren enden hier in Spitzen S, S', T, T'. Die Stäbchen des äusseren Ringes seien in der rechten Hälfte alle gleich stark positiv, in der linken ebenso stark negativ elektrisch. Die Ladungen, welche die den Spitzen S und S' gegenüberstehenden Stäbchen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ des inneren Ringes erhalten, sind dann lineare Functionen der Ladungen der äusseren Stäbchen und, da diese dem absoluten Werte nach alle gleich sind, einer derselben proportional. Man kann also, wenn man die Ladungen mit den entsprechenden lateinischen Buchstaben bezeichnet:

$$K = -qk \tag{1}$$

setzen, wo $-q$ die Summe der (sämmtlich negativen) Coefficienten der Influenz von $\mathfrak{K}$ durch die äusseren Stäbchen ist. Obschon nun jeder einzelne der letzteren kleiner als 1 ist, so wird doch ihre Summe bedeutend grösser sein. Die benachbarten Stäbchen k_1 und k_2 so wie k_1' und k_2' stehen nur wenig seitwärts und wirken daher beinahe ebenso stark, wie $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}'$. Da nun für letztere beiden allein die Influenzcoefficienten zusammen nur wenig kleiner als 1 sind, so werden sie blos für die sechs $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{k}_1'$, $\mathfrak{k}_2'$ schon beträchtlich grösser sein *).

*) Vergleiche die Abhandlung von W. Holtz in Bd. 130 von Poggend. Ann. pag. 128.

Lassen wir die Stäbchen einander unendlich nahe rücken, so erhalten wir zusammenhängende Hohlcylinder. In der Gleichung (1) können wir nur dann, um dieselbe zwischen endlichen Grössen zu haben, unter K und k die elektrischen Dichten auf dem inneren und dem äusseren Cylinder verstehen. Verwirklichen lässt sich dieser Fall durch dünne Ringe aus nichtleitendem Material; die innere Fläche des inneren und die äussere des äusseren Ringes stellen dann jene beiden Cylinder dar. An die Stelle der einfachen Spitzen müssen dann an den Enpen der Conductoren Metallkämme treten. Dass wir hier solche Ringe statt der Scheiben nehmen, geschieht blos der grösseren Deutlichkeit der Zeichnungen wegen.

Nehmén wir, gemäss Vorigem statt der Stäbchen gläserne Ringe voraussetzend, auf dem äusseren Ringe wieder eine solche symmetrische Ladung an, dass die ganze rechte Hälfte positiv eleksrisch ist; jedoch sei die Dichte in den beiden Hälften nicht constant, ohne sich übrigens in der Nähe der Kämme S und S' schnell zu ändern. Wenn man dann die Wirkung der entfernteren Punkte vernachlässigt, so kann man auch hier

$$K = -qk$$

setzen.

Zugleich sei auch der innere Ring in der Weise symmetrisch geladen, dass die obere Hälfte positiv elektrisch und die Aenderung der Dichte wenigstens in der Nähe der Spitzen T und T' keine rasche ist. Der Conductor wird dann auch durch die benachbarten Punkte des inneren Ringes influenzirt und die Dichte, welche hierdurch den Punkt ꝭ erhält, kann man der mittleren Dichte der benachbarten (entgegengesetzt elektrischen) Punkte proportional setzen. Wenn also etwas oberhalb S die Dichte $= K_1$ und etwas unterhalb $= K_2$ ist, so kann man den betreffenden Teil von K

$$= -b(K_1 + K_2) \tag{2}$$

setzen, wo b eine positive Constante, bei welcher hinsichtlich ihrer Grösse zu berücksichtigen ist, dass in ihr der Divisor 2 mit enthalten ist. Der Wert von K ist also jetzt

$$K = -qk - b(K_1 + K_2). \tag{3}$$

Dabei ist es gestattet, für K_1 und K_2 die Dichten zu nehmen, welche der Punkt, der augenblicklich dem Kamme S gegenüber ist, kurz vorher und kurz nachher hat.

Alles hier Gesagte gilt auch für die Ladung des äusseren Ringes durch die Kämme T und T' in Folge der Influenzwirkung des inneren Ringes so wie der benachbarten Punkte des äusseren.

3. Jeder Punkt jedes der beiden Ringe geht während einer halben Umdrehung einmal an einem denselben landenden Kamme vorüber. Wir wollen deshalb die Ladungsänderungen in Intervallen von einer halben Umdrehung bestimmen. Verfolgen wir zu dem Ende die Wechselwirkung zweier Flächenelemente A des inneren und B des äusseren Ringes (Fig. 2.), welche nach der $n$ten Halbdrehung der Maschine in A_1 und B_1 befindlich um den gleichen Winkel φ von der Linie SS' abstehen. Wir nehmen an, dass beide Ringe mit derselben Geschwindigkeit sich drehen, der innere nach rechts, der äussere nach links. Es ist ohne Weiteres klar, dass, wenn die Ladung anfänglich eine symmetrische von der in 2. angegebenen Art war, sie dies auch stets bleibt.

Nach der $n$ten Halbdrehung bezeichnen wir die Dichten in den Punkten A_1 und B_1 mit x_n und y_n. Wird nun weiter gedreht, so treffen die beiden Ringelemente A und B dem Kamme S gegenüber zusammen und A erhält durch Influenz von Seiten des B aus dem Kamme S die Dichte:

$$-q y_n.$$

Unmittelbar vorher war die Dichte des $A' = x_n$; unmittelbar nachher ist sie dieselbe, mit welcher nach der $n+1$ten Halbdrehung A in A_1' ankommt, also $= -x_{n+1}$; mithin erhält A ferner noch durch Influenz von Seiten der benachbarten Punkte des inneren Ringes die Dichte:

$$-b(x_n - x_{n+1}).$$

Die gesammte Dichte wird demnach

$$= -q y_n - b(x_n - x_{n+1}).$$

Mit dieser kommt nach der $n+1$ten Halbdrehung A in A_1' an; folglich ist sie dann in A_1:

$$x_{n+1} = q y_n + b(x_n - x_{n+1}). \tag{4}$$

Nachdem A und B nach ihrem Zusammentreffen bei S sich noch um 90° weiter bewegt haben, stehen sie einander und den Kämmen T und T' gegenüber in A_2' und B_2. Die Dichte in A_2' ist dann dieselbe, mit welcher A nach der $n+1$ten Halbdrehung in A_1' ankommt, also $-x_{n+1}$, mithin $+x_{n+1}$ die in A_2, so das also B durch Influenz von Seiten des inneren Ringes die Dichte

$$-q x_{n+1}$$

erhält. Unmittelbar vorher hatte B die Dichte y_n, unmittelbar nachher diejenige, mit der es nach der $n+1$ten Halbdrehung in B_1' ankommt, also $-y_{n+1}$; mithin erhält B noch durch Influenz von Seiten der auf dem äusseren Ringe benachbarten Punkte die Dichte

$$-b(y_n - y_{n+1}).$$

Die gesammte Dichte wird also

$$= -q x_{n+1} - b(y_n - y_{n+1}).$$

Mit dieser kommt B nach der $n+1$ten Halbdrehung in B_2' an; folglich ist sie dann in B_1:

(5) $$y_{n+1} = q x_{n+1} + b(y_n - y_{n+1}).$$

Wenn man die Gleichungen (4) und (5) anders ordnet und zugleich den Wert von x_{n+1} aus (4) in (5) einsetzt, so kommt:

$$x_{n+1} = \frac{q}{1+b} y_n + \frac{b}{1+b} x_n$$

$$y_{n+1} = \frac{q}{1+b}\left(\frac{q}{1+b} y_n + \frac{b}{1+b} x_n\right) + \frac{b}{1+b} y_n$$

oder

(6)
$$x_{n+1} = \frac{b}{1+b} x_n + \frac{q}{1+b} y_n$$

$$y_{n+1} = \frac{qb}{(1+b)^2} x_n + \frac{b+b^2+q^2}{(1+b)^2} y_n.$$

Diese Gleichungen stimmen mit den Gleichungen (2) in der vorhergehenden Abhandlung überein, wenn wir dort

$$a = \frac{l}{1+l} \qquad b = \frac{q}{1+l}$$

$$\alpha = \frac{ql}{(1+l)^2} \qquad \beta = \frac{l+l^2+q^2}{(l+l)^2}$$

setzen. Wir können daher auch die dort erhaltenen Formeln

(7)
$$x = \frac{\left(\frac{a-\beta}{2} + w\right)x_0 + b y_0}{2w}\left(\frac{a+\beta}{2} + w\right)^n + \frac{-\left(\frac{a-\beta}{2} - w\right)x_0 - b y_0}{2w}\left(\frac{a+\beta}{2} - w\right)^n$$

$$y = \frac{\alpha x_0 - \left(\frac{a-\beta}{2} - w\right)y_0}{2w}\left(\frac{a+\beta}{2} + w\right)^n + \frac{-\alpha x_0 + \left(\frac{a-\beta}{2} + w\right)y_0}{2w}\left(\frac{a+\beta}{2} - w\right)^n$$

anwenden, worin jetzt x_0 und y_0 die anfänglichen Ladungen in den Punkten A_1 und B_1 sind, und n die Anzahl der Halbdrehungen ist.

Es ist jetzt

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\alpha+\beta}{2} \pm w = \frac{\alpha+\beta \pm \sqrt{(\alpha-\beta)^2 - 4b\alpha}}{2}$$

$$= \frac{2l + 2l^2 + q^2 \pm \sqrt{q^4 + 4q^2 l + 4q^2 l^2}}{2(1+l)^2}.$$

Die Quadratwurzel ist, da $q > 1$, grösser als $q^2 + 2l$; wäre sie dieser gleich, so würde

$$r_1 = \frac{q^2 + 2l + l^2}{1 + 2l + l^2}.$$

Aus $q > 1$ folgt also auch $r_1 = \frac{\alpha+\beta}{2} + w > 1$ und es wachsen daher die Ausdrücke für x und y in's Unendliche. Die Ladung der Maschine wird demnach zunehmen so weit es die Unvollkommenheit der Isolirung zulässt. Was r_2 betrifft, so sieht man leicht, dass es in jedem Falle positiv ist.

Die Gleichungen (7) liefern den elektrischen Zustand nach einer beliebigen Anzahl von Halbdrehungen für alle Punkte der Quadranten II des inneren und III des äusseren Ringes und somit auch für die diametral gegenüberliegenden IV des inneren und I des äusseren. Um die entsprechenden Gleichungen auch für die übrigen Quadranten zu erhalten, kann man von den Punkten C des inneren und D des äusseren Ringes ausgehen. Da von diesen D zuerst, bei dem Kamme T nämlich, zu einer neuen Ladung gelangt, so braucht man nur die Dichte in D mit x und in C mit y zu bezeichnen und kann dann die Formeln (7) unverändert zur Anwendung bringen. Da die Quadratwurzel $w = \sqrt{q^4 + 4q^2 l + 4q^2 l^2}$ in den Gleichungen (7) bei jedem Werte von q und l reell ist, so können periodische Grössen in den Gleichungen nicht erscheinen; eine Umkehrung der Ladung kann also niemals eintreten.

Um die Maschine in der hier angenommenen Weise in Tätigkeit zu setzen, könnte man aus den Kämmen S und S' durch gleich stark wirkende entgegengesetzt elektrische Inducenten während einer halben Umdrehung Elektricität herausziehen. Wenn man statt dessen nur einen dieser Kämme influenzirt, so wird die Ladung zunächst eine unsymmetrische; indes stellt sich der symmetrische Zustand durch die Tätigkeit der Maschine nach und nach von selbst her.

4. Die Maschine sei in der vorhin betrachteten Weise in Tätigkeit, so dass also in den Quadranten II und IV beide Ringe gleichnamig, in I und III entgegengesetzt elektrisch sind. Wenn man dann auf dem einen Ringe, etwa dem inneren, zwischen den Quadranten II und IV einen dritten, unterbrochenen Conductoren (mit verschiebbaren

Elektroden) anbringt, so wird hierdurch die Tätigkeit der beiden anderen nicht beeinträchtigt. Obgleich nämlich anfänglich durch die aus den Kämmen des neuen Conductors ausströmende Elektricität die des inneren Ringes neutralisirt wird, so treten denselben doch immer wieder neue Punkte des letzteren gegenüber, welche ebenso stark elektrisch sind, wie die früheren. Indem nun hierbei die beiden Hälften des neuen Conductors sich mit immer grösseren Mengen von entgegengesetzten Elektricitäten laden, wird die Ausströmung aus denselben immer geringer und schliesslich = 0. Dann ist also der innere Ring den Spitzen des neuen Conductors gegenüber ebenso stark elektrisch, wie früher, und da an diesen Stellen beide Ringe gleichnamig elektrisch sind, so wird die Spannung in den Elektroden sehr bedeutend sein. Ist die Distanz derselben klein genug, damit bei dem Maximum der Ladung oder noch früher Funken überspringen, so wird diese Erscheinung in regelmässigen Zeitintervallen fortdauern. Eine Umkehrung des Stromes kann auch hier in keinem den drei Conductoren eintreten.

Die hier beschriebene Einrichtung entspricht der Holtz'schen Maschine mit einem sogenannten schrägen Conductor (Poggendorff, Annalen Bd. 150. pag. 21.), nur dass hier der schräge Conductor nicht einer der geschlossenen, sondern der unterbrochene ist. Diese Anordnung ist auch wohl die natürlichere. Die Glasringe mit den geschlossenen Conductoren stellen den eigentlichen die Elektricität stets in gleicher Stärke erzeugenden Apparat dar; der offene Conductor wird hinzugefügt, um die erzeugte Elektricität zu irgend welchen Zwecken zu benutzen.

Wenn man, statt einen besonderen unterbrochenen Conductor hinzuzufügen, einen der beiden anderen, etwa den horizontalen selbst unterbricht, so muss dann die Schlagweite aus zwei Gründen geringer sein. Erstlich ladet sich nämlich jede Hälfte des Conductors schon bei den ersten Umdrehungen mit der entgegengesetzten derjenigen Elektricität, welche sie ausströmt. Hierdurch wird aber dem influenzirenden Einfluss der Ringe entgegengewirkt und die Ausströmung gegen letztere vermindert. Ferner ist oberhalb und unterhalb der Spitzen dieses Conductors der innere Ring entgegengesetzt elektrisch, während er dem schrägen Conductor gegenüber, wenigstens so oft das Maximum der Ladung eintrat, an beiden Seiten gleichnamig elektrisch war.

Dass auch die einander zugewendeten Flächen der Scheiben der Holtz'schen Maschine zweiter Art nicht unelektrisch bleiben, wofür Hr. Poggendorff in Bd. 150. der „Annalen der Physik und Chemie" gewisse Lichterscheinungen an derselben als Beweise ansieht, konnte

von vorn herein keinem Zweifel unterliegen. Wenn man eine isolirende Platte auch blos auf einer Fläche elektrisirt, so wirkt sie doch nach beiden Seiten hin auf die Luft. In den Quadranten der Maschine, wo beide Scheiben dieselbe Elektricität haben, wird die entgegengesetzte auf beiden inneren Flächen aus der Luft herbeigezogen; die gleichnamige muss deshalb in den äusseren Raum entweichen und verursacht dort die bekannte Lichterscheinung. In dem anderen Quadranten, wo die Scheiben entgegengesetzt elektrisch sind, begiebt sich die positive Elektricität der Luft nach der einen Scheibe, die negative nach der anderen und ein Ausströmen findet desshalb nicht Statt. Für die Theorie der Maschine kommen diese Vorgänge unmittelbar nicht in Betracht. Da nämlich die Punkte der äusseren Flächen ihren elektrischen Zustand während jeder Umdrehung zweimal wechseln, so gilt dasselbe auch für die inneren Flächen und diese haben also nicht Zeit, irgend erhebliche Ladungen anzunehmen. Die Influenz im Glase selbst, auf welche Hr. Rieck ein besonderes Gewicht legt, kommt aus demselben Grunde noch viel weniger in Betracht.

Die hier dargelegte Theorie steht mit der Erklärung, welche Hr. Poggendorff in Bd. 150. pag. 5. seiner Annalen von der Wirkungsweise der doppeltrotirenden Maschine gibt, in einem wesentlichen Punkte in Widerspruch. Er sagt nämlich (pag. 6.), die aus einem Kamme ausströmende Elektricität werde immer zur Hälfte durch die Ladung der Scheibe neutralisirt, während die andere Hälfte zur neuen Ladung diene. Wäre das richtig, so würde die Ladung ihrem absoluten Werte nach constant bleiben und blos beständig in allen Punkten ihr Zeichen wechseln, also eine fortwährende Zunahme gar nicht eintreten.

Es sei noch bemerkt, dass bei den Maschinen, welche Stromumkehrungen zeigen, in den Formeln, welche man für die Ladungen erhält, sich dies durch imaginäre Wurzeln zu erkennen gibt, die sich zu periodischen Factoren vereinigen.

Düren, 15. Juni 1875.

XXX.

Note über Differentialgleichungen der Form

$$(a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y=0 \qquad (1)$$

Von

Simon Spitzer.

Ich habe die Gleichungen der Form (1), in welcher a_2, a_1, a_0, b_2, b_1 und b_0 constante Zahlen bezeichnen, oft in Betracht gezogen. Bekanntlich erscheint das Integrale der Gleichung (1) nach Laplace in der Form:

$$y=\int_{u_1}^{u_2} e^{ux}V\,du \qquad (2)$$

in welcher

$$V=\frac{1}{U_1}\,e^{\int\frac{U_0}{U_1}du} \qquad (3)$$

ist, und die Integrationsgrenzen u_1 und u_2 solche constante Zahlen bezeichnen, welche sich aus der Auflösung der Gleichung

$$e^{ux+\int\frac{U_0}{U_1}du}=0 \qquad (4)$$

ergeben. U_0 und U_1 haben in obiger Gleichung (3) nachstehende Werte:

$$U_0=a_2u^2+a_1u+a_0$$
$$U_1=b_2u^2+b_1u+b_0$$

Will man das in (2) stehende y weiter entwickeln, so hat man (Bruch

$$\frac{U_0}{U_1}$$

in Partialbrüche zu zerlegen. Hierbei kommen zunächst 4 verschiedene Fälle in Betracht, je nachdem nämlich $\frac{U_0}{U_1}$ eine der 4 nachstehenden Formen hat:

$$m + \frac{A}{u-\alpha} + \frac{B}{u-\beta}$$

$$m + \frac{A}{(u-\alpha)^2} + \frac{B}{u-\alpha}$$

$$m + nu + \frac{A}{u-\alpha}$$

$$a_2 u^2 + a_1 u + a_0$$

Ich will nun in diesem Memoire jenen Fall besprechen, wo

$$\frac{U_0}{U_1} = m + nu + \frac{A}{u-\alpha} \tag{6}$$

ist, wo also die Gleichung (1) folgende Gestalt hat:

und für negative Werte von n

$$u = \alpha, \qquad u = \pm\infty$$

Demnach ist das vollständige Integrale der Gleichung (7) für positive Werte von A und n

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{+\infty\sqrt{-1}} (u-\alpha)^{A-1} e^{u(m+x)+\frac{n}{2}u^2} du + C_2 \int_{\alpha}^{-\infty\sqrt{-1}} (u-\alpha)^{A-1} e^{u(m+x)+\frac{n}{2}u^2} du \tag{10}$$

und für einen positiven Wert von A und einen negativen Wert von n

$$y = C_1 \int_{\alpha}^{+\infty} (u-\alpha)^{A-1} e^{u(m+x)+\frac{n}{2}u^2} du + C_2 \int_{\alpha}^{-\infty} (u-\alpha)^{A-1} e^{u(m+x)+\frac{n}{2}u^2} du \tag{11}$$

hierbei bedeuten C_1 und C_3 willkürliche Constanten.

Im Falle A eine ganze positive Zahl ist, habe ich das vollständige Integrale der Gleichung (7) in folgender Form gefunden:

$$y = e^{\alpha x} \frac{\partial^{A-1}}{\partial x^{A-1}} \left[e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx \right]$$

und im Falle A Null ist, oder ganz und negativ, fand ich

$$y = e^{-\frac{(m+x)^2}{2n}} \frac{\partial^{-A}}{\partial x^{-A}} \left[e^{+\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} \int e^{-\frac{(m+x+n\alpha)^2}{2n}} dx \right]$$

Es bleibt also nur noch jener Fall zu besprechen übrig, woselbst A negativ und gebrochen ist, und die Untersuchung dieses Falles bildet den eigentlichen Gegenstand dieser Abhandlung.

Es sei also gegeben die Gleichung

$$ny'' + (m + x - n\alpha)y' + [A - \alpha(m+x)]y = 0 \tag{7}$$

Ich setze in selber

$$y = e^{\alpha x} z \tag{12}$$

unter z eine neue Variable verstanden, und erhalte hierdurch

$$nz'' + (m + x + n\alpha)z' + Az = 0$$

Nun führe ich weiter für x eine neue Variable ξ in Rechnun
mittelst der Substitution

$$m + x + n\alpha = n\lambda\xi \tag{14}$$

woselbst λ eine einstweilen noch unbestimmte Constante bezeichnet. Da nun

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{n\lambda} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

$$z'' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{n^2\lambda^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$$

ist, so hat man:

$$\frac{1}{n\lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial z}{\partial \xi} + Az = 0$$

oder von Brüchen befreit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + n\lambda^2 \xi \frac{\partial z}{\partial \xi} + An\lambda^2 z = 0 \tag{15}$$

Wählt man nun λ dermassen, dass

$$n\lambda^2 = -1 \tag{16}$$

wird, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = \xi \frac{\partial z}{\partial \xi} + Az \tag{17}$$

welche ich nun auf folgende Weise weiter behandle.

Ich differentiire die Gleichung (17) μ mal nach ξ, unter μ eine

$$z = \int_0^{\pm\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \Big[e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2\xi^2}{2!} - \frac{u^3\xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-1}\xi^{\mu-1}}{(\mu-1)!}$$

$$+ \varphi_1(u) + \xi\varphi_2(u) + \xi^2\varphi_3(u) + \dots + \xi^{\mu-1}\varphi_\mu(u) \Big] du \quad (21)$$

denn diese Gleichung führt, μ mal differentiirt, wieder auf die Gleichung (20) zurück, aus welcher sie durch Integration hervorging, $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u)$, ... $\varphi_\mu(u)$ bezeichnen willkürliche Functionen von u.

Der in der Gleichung (21) gewonnene Wert von z soll aber nicht blos der Gleichung (20) genügen, sondern er soll genügen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = \xi \frac{\partial z}{\partial \xi} + Az \quad (17)$$

Dies beschränkt die Willkürlichkeit der mit $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u)$, ... $\varphi_\mu(u)$ bezeichneten Functionen von u, wie sogleich dargetan werden soll. Zu dem Zwecke ist es nötig $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$ zu bestimmen. Es ist

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \int_0^{\pm\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \Big[u\Big(e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2\xi^2}{2!} - \frac{u^3\xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-2}\xi^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\Big)$$

$$+ \varphi_2(u) + 2\xi\varphi_3(u) + 3\xi^2\varphi_4(u) + \dots + (\mu-1)\xi^{\mu-2}\varphi_\mu(u) \Big] du$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = \int_0^{\pm\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \Big[u^2\Big(e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2\xi^2}{2!} - \frac{u^3\xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-3}\xi^{\mu-3}}{(\mu-3)!}\Big)$$

$$+ 1.2\varphi_3(u) + 2.3\xi\varphi_4(u) + 3.4\xi^2\varphi_5(u) + \dots + (\mu-2)(\mu-1)\xi^{\mu-3}\varphi_\mu(u) \Big] du$$

folglich hat man:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \xi \frac{\partial z}{\partial \xi} - Az =$$

$$\int_0^{\pm\infty} u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \Big[u^2\Big(e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2\xi^2}{2!} - \frac{u^3\xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-3}\xi^{\mu-3}}{(\mu-3)!}\Big)$$

$$- \xi u\Big(e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2\xi^2}{2!} - \frac{u^3\xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-2}\xi^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\Big)$$

$$- A\Big(e^{u\xi} - 1 - u\xi - \frac{u^2\xi^2}{2!} - \frac{u^3\xi^3}{3!} - \dots - \frac{u^{\mu-1}\xi^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\Big)$$

$$+ 1.2\,\varphi_3(u) - A\varphi_1(u)$$

$$+ \xi(2.3\,\varphi_4(u) - (A+1)\varphi_2(u))$$

$$+\xi^2(3.4\,\varphi_5(u)-(A+2)\,\varphi_3(u))$$
$$+\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$+\xi^{\mu-4}((\mu-3)(\mu-2)\,\varphi_{\mu-1}(u)-(A+\mu-4)\,\varphi_{\mu-3}(u))$$
$$+\xi^{\mu-3}((\mu-2)(\mu-1)\,\varphi_{\mu}(u)-(A+\mu-3)\,\varphi_{\mu-2}(u))$$
$$-(A+\mu-2)\,\xi^{\mu-2}\,\varphi_{\mu-1}(u)$$
$$-(A+\mu-1)\,\xi^{\mu-1}\,\varphi_{\mu}(u)\Big]\,du \qquad (22)$$

Setze ich nun das unbestimmte Integrale des soeben aufgestellten Ausdruckes gleich

$$-u^{A}\,e^{-\frac{u^2}{2}}\left[e^{u\xi}-1-u\xi-\frac{u^2\xi^2}{2!}-\frac{u^3\xi^3}{3!}-\dots-\frac{u^{\mu-1}\xi^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\right] \qquad (23)$$

so muss der mit du multiplicirte unter dem Integralzeichen in (22) stehende Ausdruck gleich sein dem nach u genommenen Differentialquotienten des Ausdruckes (23), d. h. es muss sein:

$$u^{A-1}\,e^{-\frac{u^2}{2}}\left[u^2\left(e^{u\xi}-1-u\xi-\frac{u^2\xi^2}{2!}-\frac{u^3\xi^3}{3!}-\dots-\frac{u^{\mu-3}\xi^{\mu-3}}{(\mu-3)!}\right)\right.$$
$$-\xi u\left(e^{u\xi}-1-u\xi-\frac{u^2\xi^2}{2!}-\frac{u^3\xi^3}{3!}-\dots-\frac{u^{\mu-2}\xi^{\mu-2}}{(\mu-2)!}\right)$$

Dividirt man beide Teile dieser Gleichung durch

$$u^{A-1} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

und lässt man die, sich auf beiden Seiten der Gleichung aufhebenden Glieder weg, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&1.2\,\varphi_3(u) - A\,\varphi_1(u)\\
&+\xi[2.3\,\varphi_4(u) - (A+1)\,\varphi_2(u)]\\
&+\xi^2[3.4\,\varphi_5(u) - (A+2)\,\varphi_3(u)]\\
&+\;\ldots\ldots\\
&+\xi^{\mu-4}[(\mu-3)(\mu-2)\,\varphi_{\mu-1}(u) - (A+\mu-4)\,\varphi_{\mu-3}(u)]\\
&+\xi^{\mu-3}[(\mu-2)(\mu-1)\,\varphi_{\mu}(u) - (A+\mu-3)\,\varphi_{\mu-2}(u)]\\
&+(A+\mu-2)\,\xi^{\mu-2}\varphi_{\mu-1}(u) - (A+\mu-1)\,\xi^{\mu-1}\varphi_{\mu}(u) =\\
&\qquad -\frac{u^{\mu}\,\xi^{\mu-2}}{(\mu-2)!} - \frac{u^{\mu+1}\,\xi^{\mu-1}}{(\mu-1)!}
\end{aligned} \tag{25}$$

und aus dieser Gleichung, welche für jeden Wert von ξ stattfinden soll, gehen hervor nachstehende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
1.2\,\varphi_3(u) &= A\,\varphi_1(u)\\
2.3\,\varphi_4(u) &= (A+1)\,\varphi_2(u)\\
3.4\,\varphi_5(u) &= (A+2)\,\varphi_3(u)\\
&\vdots\\
(\mu-3)(\mu-2)\,\varphi_{\mu-1}(u) &= (A+\mu-4)\,\varphi_{\mu-1}(u)\\
(\mu-2)(\mu-1)\,\varphi_{\mu}(u) &= (A+\mu-3)\,\varphi_{\mu-2}(u)\\
(A+\mu-2)\,\varphi_{\mu-1}(u) &= \frac{u^{\mu}}{(\mu-2)!}\\
(A+\mu-1)\,\varphi_{\mu}(u) &= \frac{u^{\mu+1}}{(\mu-1)!}
\end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mu}(u) &= \frac{u^{\mu+1}}{(A+\mu-1).(\mu-1)!}\\
\varphi_{\mu-1}(u) &= \frac{u^{\mu}}{(A+\mu-2).(\mu-2)!}\\
\varphi_{\mu-2}(u) &= \frac{u^{\mu+1}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3).(\mu-3)!}\\
\varphi_{\mu-3}(u) &= \frac{u^{\mu}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4).(\mu-4)!}\\
\varphi_{\mu-4}(u) &= \frac{u^{\mu+1}}{(A+\mu-1)(A+\mu-3)(A+\mu-5).(\mu-5)!}\\
\varphi_{\mu-5}(u) &= \frac{u^{\mu}}{(A+\mu-2)(A+\mu-4)(A+\mu-6).(\mu-6)!}\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{26}$$

Der in (23) stehende Ausdruck lässt sich auch so schreiben:

$$-e^{-\frac{u^2}{2}}\left[\frac{u^{A+\mu}\xi^{\mu}}{\mu!}+\frac{u^{A+\mu+1}\xi^{\mu+1}}{(\mu+1)!}+\frac{u^{A+\mu+2}\xi^{\mu+2}}{(\mu+2)!}+\ldots\right] \tag{27}$$

und in dieser Form ist ersichtlich, dass er Null wird, sowohl

$$\text{für } u=0 \text{ als auch für } u=\pm\infty$$

folglich ist wirklich der in (21) stehende Wert von z das Integrale der Gleichung (17) unter der Voraussetzung, dass $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u)$, $\ldots\, \varphi_\mu(u)$ die in (26) angegebenen Bedeutungen haben.

Recapituliren wir das bisher Gefundene, so hat man:

Ist zu integriren die Differentialgleichung:

$$ny''+(m+x-n\alpha)y'+[A-\alpha(m+x)]y=0 \tag{7}$$

in welcher m, n und α beliebige constante Zahlen, A aber eine negative und gebrochene Zahl bezeichnet, so setze man

$$y=e^{\alpha x}z \tag{12}$$

woselbst z eine neue Variable bezeichnet, man erhält dann:

$$nz''+(m+x+n\alpha)z'+Az=0 \tag{13}$$

In diese Gleichung führe man für x eine neue Varihble ξ ein mittelst der Substitution

$$m+x+n\alpha=\xi\sqrt{-n}$$

man kömmt hierdurch zu der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}=\xi\frac{\partial z}{\partial \xi}+Az \tag{17}$$

und diese gibt integrirt:

$$z=C_1\int_0^{+\infty} u^{A-1}e^{-\frac{u^2}{2}}\Big[e^{u\xi}-1-u\xi-\frac{u^2\xi^2}{2!}-\frac{u^3\xi^3}{3!}-\ldots-\frac{u^{\mu-1}\xi^{\mu-1}}{(\mu-1)!}$$
$$+\varphi_1(u)+\xi\varphi_2(u)+\xi^2\varphi_3(u)+\ldots+\xi^{\mu-1}\varphi_\mu(u)\Big]du$$
$$+C_2\int_0^{-\infty} u^{A-1}e^{-\frac{u^2}{2}}\Big[e^{u\xi}-1-u\xi-\frac{u^2\xi^2}{2!}-\frac{u^3\xi^3}{3!}-\ldots-\frac{u^{\mu-1}\xi^{\mu-1}}{(\mu-1)!}$$
$$+\varphi_1(u)+\xi\varphi_2(u)+\xi^2\varphi_3(u)+\ldots+\xi^{\mu-1}\varphi_\mu(u)\Big]du$$

unter μ eine solche ganze positive Zahl verstanden, auf dass

$$A+\mu$$

ein positiver echter Bruch wird. C_1 und C_2 bezeichnen willkürliche Constanten, $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u)\ldots$, ergeben sich aus den Gleichungen (26).

XXXI.

Einige Wünsche, die Planimetrie betreffend.

Von

L. Graf *von Pfeil.*

Die Lehrbücher der Planimetrie enthalten vielfach Aufgaben und Sätze, welche gar keine practische Bedeutung haben: was ich im Allgemeinen nicht tadeln will; dabei aber entbehren sie der Lösung solcher Aufgaben, die in der Praxis vorzugsweise, ja allein, gebraucht werden, und die gleichwohl, auch theoretisch betrachtet, nicht minder correct sind, als jene. So sind, mit Ausnahme des Kreises, wo man sie nicht umgehen kann, alle Annäherungsmethoden gleichsam verpönt, und doch halbirt kein Mensch einen Bogen oder eine gerade Linie durch zwei gleichschenkliche Dreiecke. Um Parallelen zu ziehen, wird eine weitläufige Construction angegeben, während man solche bekanntlich durch Verschieben eines anliegenden Winkels leichter und sicherer herstellt. Man schneidet nur Teile von Linien ab, während man sie häufiger absticht.

Ferner fehlt in der Planimetrie der Begriff des Symmetrischen und damit der des Positiven und Negativen, der entgegengesetzten Grössen, den die Alten allerdings nicht gekannt zu haben scheinen. Man subsumirt ihn, sehr uneigentlich, unter den Begriff der Congruenz. Es sind jedoch z. B. die beiden Hälften eines gleichschenklichen Dreiecks keineswegs congruent, sondern nur symmetrisch, denn man kann sie nicht auf einander decken, ohne Eines davon aus der Ebene heraus zu nehmen und es umzukehren; was doch nicht erlaubt ist, da man alle Constructionen der Planimetrie als in einer Ebene liegend denkt.

Auch die Lehre der Parallellinien, insbesondere der berüchtigte 11te Grundsatz des Euklid, dieser Scandal für die heutige Wissenschaft, sie lässt sich völlig correct behandeln, sobald man die, durchaus unrichtige Annahme fallen lässt, welche die grade Linie als einen einfachen Begriff betrachtet*), und wenn man alsdann die Eigenschaften derselben in gewohnter Weise regelmässig entwickelt. — Eine correcte Behandlung der graden Linie und der Parallellinien würde noch den Nebenvorteil haben, dass sich die Sätze der Planimetrie harmonischer anordnen liessen, als es jetzt möglich ist.

Endlich fehlt überall die Lösung der Aufgabe, deren Entdeckung ich mich rühmen darf, Kreise oder Kreisbogen nach beliebigen Verhältnissen einzuteilen: eine Aufgabe gleichwohl, welche sich mit den elementarsten Kenntnissen lösen lässt. Die Lösung, theoretisch wie practisch gleich wichtig, gleich richtig und gleich leicht und einfach wurde von mir bereits vor 12 Jahren veröffentlicht, und dann noch in ein technisches Journal abgedruckt, dass man sie aber in irgend ein Lehrbuch der Planimetrie aufgenommen hätte, ist mir nicht bekannt geworden. Die Lehrbücher enthalten nur die Halbteilung des Bogens und Kreises, die practisch wenig genaue Teilung des Letzteren in 6 Teile, und eine practisch ganz unbrauchbare in 10 Teile. Sollte die allgemeine Teilung des Kreises und Kreisbogens vielleicht weniger wichtig sein, als die in 10 Teile, als die Teilung der graden Linie, welche doch die Lehrbücher, wiewohl in sehr unvollkommener Weise, bringen?

Die allgemeine Teilung des Kreises könnte zweckmässig nach den Sätzen folgen, welche das Verhältniss des Durchmessers zum Umfang darstellen, weil jene Sätze ebenfalls eine Annäherungsmethode enthalten. Nur die Halbirung des Kreises und Kreisbogens, wie der graden Linie durch die, bei Weitem genauere Annäherungsmethode müsste früher, gleich neben der sogenannten strengen Methode gebracht werden.

Ich gebe hier die Andeutung der Sätze, indem ich mich wegen der genaueren Ausführung, welche die Neuheit der Entdeckung wegen nötig ist, auf den bereits citirten Aufsatz in Teil 49. des Archivs berufe. Dort sind auch zahlreiche Beispiele und Figuren zu finden, welche ein umsichtiger Lehrer beliebig vermehren oder verändern kann.

---

*) Die grade Linie umschliesst sogar drei völlig verschiedenartige Begriffe: Länge, Richtung, und deren Unveränderlichkeit. Es müssen viele Sätze über die grade Linie erwiesen werden. Ich zähle deren acht auf. (Mein Aufsatz Teil 49. Heft 2. des Archivs).

Die Sätze könnten etwa in folgender Ordnung in die Planimetrie eingefügt werden.

Unmittelbar hinter der correcten Halbirung der graden Linie und des Kreisbogens.

* * *

Halbirung einer graden Linie, eines Kreisbogens oder Kreises durch Annäherung.

Man schneide von den Endpunkten der zu halbirenden Linie Teile ab, indem man kleine Kreisbogen durch die zu teilende Linie zieht. Diese Kreisbogen lassen sich einander beliebig nähern, und die Mitte zwischen den genäherten Bogen ist der Punkt der Halbteilung, weil dieser Punkt von den beiden Kreisbogen, und damit auch von den beiden Endpunkten der zu teilenden Linie gleichweit entfernt ist.

Soll der ganze Kreis geteilt werden, oder ein Bogen, der sich dem Kreise sehr nähert, so muss man zuvor gleiche Teile davon abstechen, um den Bogen zu verkürzen. Erst dann wird man den Ueberrest des Kreises durch zwei kreuzende Bogen halbiren.

Hinter der Ermittelung des Verhältnisses vom Durchmesser zum Umkreise würden folgende Sätze kommen.

* * *

Ein, im Verhältniss zum Ganzen gegebenes Stück des Kreises, des Kreisbogens, oder der graden Linie*) abzuschneiden, so dass der dabei vorkommende Fehler kleiner wird, als eine gegebene Grösse.

Man denkt die zu teilende Linie durch Halbteilung so geteilt, dass die einzelnen Teile kleiner sind, als die gegebene Grösse. Darauf setzt man

$$Z = q \times \frac{m}{n}$$

wobei Z das abzuschneidende Stück der Linie, m und n das Zahlenverhältniss eben desselben, von dem Ganzen n abzuschneidenden Stückes, q eine Potenz von 2 bedeutet, deren einzelne Teile kleiner sind, als die gegebene Minimalgrösse.

*) Die gewöhnliche Methode, ein gegebenes Stück einer graden Linie abzuschneiden, hat, wo es sich um grosse Genauigkeit handelt, keinen practischen Wert.

Nunmehr halbirt man q nach einer Reihe, welche die Form hat

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{8} \pm \frac{1}{16} \pm \cdots \pm \frac{1}{2^n}$$

bis man auf den verlangten Teil gelangt ist.

Beispiel. Man wolle ein Stück eines Kreises abschneiden, welches die Länge des Durchmessers hat, und es solle der Fehler dabei weniger betragen, als $\frac{1}{314}$ des Umfangs, so dass das Verhältniss des Durchmessers zum Umfang, wie $1:3{,}14$ angenommen, noch als richtig dargestellt betrachtet werden kann.

Man setze q grösser als 314. Die nächst grössere Potenz von 2 ist 512. Es folgt

$$Z = 512 \cdot \frac{1}{\pi} = 162{,}97.$$

Durch fortgesetztes Halbiren findet man aus 512, 256, 128 also $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ des Ganzen und dann

zwischen 256 und 128 192 + 1

also das Stück von 162 bis 163, kleiner ist als $\frac{1}{314}$ des Umkreises, so kann der Teilpunkt von 163 als der richtige betrachtet werden*).

* * *

Durch Anwendung dieses Satzes lässt sich der Kreis oder Kreisbogen oder die grade Linie in jede beliebige Anzahl gleicher Teile teilen.

Man kann nämlich die Anzahl der verlangten Teile n stets in zwei Summanden zerlegen, deren einer p eine Potenz von 2 ist, sich also durch Halbteilung bis auf 1 teilen lässt.

Der nach der Hinwegnahme von p noch bleibende Rest sei m, so wird man stets setzen können

$$n = p + m, \text{ also } p = n - m \quad \ldots\ldots\ldots \text{A.}$$

Um z. B. den Kreis oder Kreisbogen oder die grade Linie in $n = 19$ Teile zu teilen, kann man setzen $p = 16$, $m = 3$, also $19 = 16 + 3$.

Da jedoch die Zahl m grösser sein könnte als p, und dieses Verhältniss für die Ausführung der Teilung Unbequemlichkeiten bietet, so wird man in solchen Fällen den Bogen oder die grade Linie verlängern, was nach bekannten Sätzen stets angeht, so dass p grösser wird als n.

Beim Kreise fällt die Verlängerung in die Kreislinie selbst. Es entsteht daraus ein Bogen, dessen Länge den Kreisumfang *überschreitet*.

Ich habe solche Bogen von mehr als 360 Graden *übergreifende Bogen* genannt. Sie werden bei der Kreisteilung oft gebraucht.

In einem solchen Falle ist also

$$n = p - m \text{ und } p = n + m \quad \ldots\ldots\ldots \text{B.}$$

---

*) Der Punkt 163 weicht von dem richtigen Teilpunkt um $\frac{1}{512} \cdot 0{,}03 = 0{,}000059$ also um etwa $\frac{6}{100000}$ des Umkreises ab.

In der Praxis geht man mit der Halbteilung nicht so weit. Man betrachtet den zuletzt bleibenden Bogen als eine grade Linie und nimmt den verhältnissmässigen Teil davon.

Um einen Kreis, einen Kreisbogen oder eine grade Linie zu teilen wird zuerst ein Stück von m Teilen nach dem vorigen §. berechnet und durch Halbteilung abgemessen, dessen Hinwegnahme von n, oder dessen Hinzufügung zu n die nächstliegende Potenz von 2 giebt, d. h. eine solche Zahl, bezüglich einen solchen Bogen, deren Halbteilung bis auf 1 möglich ist.

Ob man die Form $n = p + m$ oder $n = p - m$ wählen will, ist im Allgemeinen willkürlich und richtet sich lediglich nach der Bequemlichkeit der Ausführung. So kann man z. B. für die Teilung in 23 Teile entweder setzen

$$23 = 16 + 7$$

oder

$$23 = 32 - 9.$$

Im letzten Falle überschreitet der Bogen $m = 9$ den ganzen Kreis um $\frac{9}{23}$ desselben, also um $140^0\, 52'\, 10\frac{10''}{23}$. Der übergreifende Bogen wird also $500^0\, 52'\, 10\frac{10''}{23}$ lang sein.

Dagegen würde es unbequem sein, wollte man für $n = 17$ setzen, $17 = 32 - 15$ anstatt $17 = 16 + 1$. Ebenso wäre es unvorteilhaft, wollte man für $n = 31$ setzen, $31 = 16 + 15$ anstatt $31 = 32 - 1$.

Die Teilung des Bogens p teilt auch gleichzeitig den Bogen m, weil dessen Teile in p enthalten sind, und damit wird auch $p \pm m = n$, also der ganze Kreis, der Kreisbogen oder die grade Linie geteilt sein.

* * *

Der letztere Umstand gewährt ein leichtes und sicheres Mittel, einen Fehler zu entdecken und zu berichtigen, der bei der Abmessung von m vorgekommen sein könnte.

Es sei dieser Fehler x, wo x eine kleine positive oder negative Grösse bedeutet. Es sei also $m' = m \pm x$.

Es ist dann in dem Falle A

$$p = n - (m \pm x) = n - m \mp x$$

und in dem Falle B

$$p = n + (m \pm x) = n + m \pm x.$$

Es ist also, da n und m ihrem sein sollenden Wert nach genau bestimmte Grössen sind, in dem Falle A die Länge von p Teilen um x zu klein, wenn m' zu gross war, und umgekehrt.

In dem Falle B wird p um x zu gross oder zu klein, wenn m' zu gross oder zu klein war.

Da die Länge von m Teilen einmal unmittelbar bezeichnet, das andere Mal aus der Halbteilung von p ermittelt wird, so müssen beide Längen genau übereinstimmen, sobald m im Anfange richtig bestimmt war.

Wurde dagegen m' um die angenommene Grösse x fehlerhaft abgemessen, so muss sich der Fehler auch in der Länge der m Teile, welche aus der Halbteilung von p gefunden wurde, verhältnissmässig zeigen. Beide Längen werden dann eine Differenz d geben.

Es ist nun in allen Fällen der begangene Fehler $x = \frac{p}{n}.d$, und kann somit durch die bekannten Grössen p, n und d corrigirt werden.

Beweis. Ist die fehlerhafte Länge $m' = m \pm x$ um x zu gross oder zu klein, so ist im Falle A, wie gezeigt wurde, p um x zu klein oder zu gross. Mithin ist 1 Teil von p um $\frac{x}{p}$ zu klein oder zu gross, und m Teile sind um $\frac{mx}{p}$ zu klein oder zu gross.

Der Unterschied beider fehlerhafter Längen, nämlich der Länge von $m' = m \pm x$, und der Länge $m \mp \frac{mx}{p}$, beträgt $d = m \pm x - \left(m \mp \frac{mx}{p}\right) = \pm x \pm \frac{mx}{p} = \pm \frac{px + mx}{p} = \pm \frac{p+m}{p}.x$, und da in dem Falle A

$$p + m = n, \text{ so ist}$$

$$d = \pm \frac{n}{p}.x \text{ und also } x = \pm \frac{p}{n}.d.$$

Im Falle B, wenn man $n = p - m$, also $p = n + m$ gesetzt hatte, ist p um x zu gross oder zu klein, wenn m' um x zu gross oder zu klein war. Mithin sind m Teile, aus der Halbteilung von p bestimmt, um $\frac{mx}{p}$ zu gross oder zu klein, wenn $m' = m \pm x$ um x zu gross oder zu klein war.

Der Unterschied von $m \pm x$ und $m \pm \frac{mx}{p}$ beträgt also $d = m \pm x - \left(m \pm \frac{mx}{p}\right) = \pm x \mp \frac{mx}{p} = \pm \frac{px - mx}{p} = \pm \frac{p-m}{p}.x.$

Da nun in dem Falle B der Wert $p-m=n$, so ist ebenfalls

$$d=\pm\frac{n}{p}.x \text{ und } x=\pm\frac{p}{n}.d.$$

ebenso wie im Falle A.

* * *

Um den Kreis, den Kreisbogen oder die grade Linie nach einem gegebenen Verhältniss in ungleiche Teile zu teilen, sucht man für die Teile ein gemeinschaftliches Maass, summirt nach diesem Maass die Teile, und bestimmt die Teilung nach der Summe. Man führt jedoch die Teilung nur an den betreffenden Stellen aus.

Beispiel. Es sei ein Kreis zu teilen nach dem Verhältniss $3:4:6:9$, so setze man $3+4+6+9=22$, teile den Kreis in $\frac{22}{2}=11$ Teile, indem man $11=8+3$ oder $11=16-5$ setzt, und halbire zwischen 2 Teilen, wo es nötig ist. Die Bezeichnung der Teile würde dann lauten 3, 7, 13, 22. Der Bogen von 22 (als dem Anfangspunkt) bis 7 giebt beiläufig die Länge des Durchmessers, ein Weniges genauer als 3,14 *).

Die Genauigkeit des, in dem Aufsatz in Teil 41. des Archivs ausgeführten, hier nur angedeuteten Teilungsverfahrens hängt lediglich von der Schärfe der dabei verwendeten optischen und mechanischen Hülfsmittel ab. Sobald ein Fehler noch wahrnehmbar bleibt, ebensobald lässt er sich nach diesem Verfahren auch berichtigen.

Ich will hier diese Gegenstände verlassen, indem ich in Beziehung auf die ausführlichere Behandlung, wie sie dem Lehrer gegenüber seinen Schülern entspricht, auf die bereits citirten Aufsätze in Teil 41. und 49. des Archivs verweise. Dass die angeregten Gegenstände nicht geeignet, oder nicht würdig seien, in einem Lehrbuch behandelt zu werden, dürfte sich schwerlich behaupten lassen: man müsste dann mathematische Entdeckungen der Neuzeit verwerfen, nicht obgleich, sondern weil sie in das Gebiet gewerblicher Tätigkeit mächtig eingreifen.

Meine Anregung hat ihren Zweck erfüllt, wenn sie denkende Lehrer veranlasst, die hier berührten Gegenstände in den Kreis ihres Lehrplans aufzunehmen.

---

*) $22:7=3{,}1428571$
$\pi=3{.}1415927$

Differenz $\frac{22}{7}$ und $\pi=0{,}0012644$

Differenz π und $3{,}14=0{,}0015927$.

XXXII.

Einrichtung des Messtisches auf drei Punkte.

(Hierzu ein Plan).

Von

L. Graf *von Pfeil.*

Die hier folgende Methode, den Messtisch auf drei Punkte einzurichten, ist in den mir bekannten Lehrbüchern nicht enthalten.

Es seien Fig. I. (1. und 2. in zwei Lagen gezeichnet) A, B, C drei, ihrer Lage auf dem Felde nach bekannte, und auf dem Messtisch unter a, b, c bezeichnete Punkte. Ein vierter Punkt, über dem man den Messtisch einstellen will, sei L. (Die Punkte A, B, C sind auf dem Plan nicht gezeichnet, sondern nur aus der Richtung der Visirlinien zu erkennen).

Man stelle den Messtisch über L und drehe ihn so, dass das Dreieck abc ungefähr nach der Richtung ABC zu liegen kommt.

Von einem beliebigen Punkte e des Messtisches visire man nach A, B und C und ziehe die Visirlinien eA, eB und eC.

Man habe ein, aus recht steifem und festen Papier geschnittenes, dem Dreieck abc congruentes (oder ähnliches) Blatt*). Man lege dasselbe in $\alpha\beta\gamma$ so über die drei Visirlinien, dass dessen Winkelspitzen über die drei Visirlinien fallen.

---

*) Am zweckmässigsten ist die Form Fig. III., bei welcher die gezogenen Linien die kleinen Kreise sehr scharf halbiren. Man kann sich anstatt des Dreiecks auch eines dreifüssigen Zirkels bedienen.

Es werden alsdann, nach bekannten Sätzen, die Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ und $\gamma\alpha$ den Linien auf dem Felde AB, BC und CA bezüglich parallel sein.

Hierdurch ist also der Winkel bekannt, welchen die Linien ab, bc und ca gegen die Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ und $\gamma\alpha$, also auch gegen die Linien des Feldes AB, BC und CA bilden.

Es ist darum leicht, den Messtisch so zu drehen, dass das Dreieck abc des Messtisches mit dem Dreieck ABC des Feldes parallel wird. Man darf zu diesem Zweck nur den Winkel, welchen irgend eine der Seiten von $\alpha\beta\gamma$ mit der correspondirenden Seite von abc bildet, an irgend eine der Visirlinien entsprechend anlegen, den neu gezogenen Schenkel des Winkels als neue Visirlinie betrachten, und nach dieser den Messtisch drehen.

Man habe z. B. den Winkel gewählt, welchen $\alpha\gamma$ (oder ihre Parallele $f\gamma'$, Fig. I, 1.) mit der correspondirenden ac bildet, den Winkel f. Man lege $\gamma''f'\alpha = f$ an irgend einen Punkt irgend einer der von e aus gezogenen Visirlinien, etwa an den Punkt f' und die Visirlinie $e\alpha$, bringe das Diopterlineal an $f''f'\gamma''$ und drehe den Messtisch, bis die Diopter γ'' auf A eingestellt ist. Fig. II. bezüglich 1. und 2.

Es ist dann der Messtisch um den Winkel $\gamma''f'\alpha$ gedreht worden, welcher Winkel gleich f, gleich dem Winkel ist, den die Seiten des Dreiecks abc mit den Seiten von $\alpha\beta\gamma$, und also auch mit ABC bildeten, und es wird darum jetzt $\triangle\, abc$ parallel $\triangle\, ABC$ sein.

Fig. II. zeigt die neue Stellung des Messtisches.

Um nun den Punkt L auf den Messtisch zu legen, ist es nur nötig, über a, b und c in der neuen, richtigen Lage des Messtisches nach A, B und C zu visiren. Die Visirlinien werden sich alle drei in l schneiden müssen, wenn man mit Sorgfalt verfahren ist.

Es bestimmen übrigens, nach der Parallelstellung von abc und ABC, schon zwei Visirlinien die Lage des Punktes l; die dritte dient nur zur Controlle.

Es ist darum der Punkt l auf dem Messtisch der richtig übertragene Punkt L des Feldes.

Das hier dargelegte Verfahren beruht auf der Annahme, dass die Punkte e und l des Messtisches bei der Drehung des Letzteren ihre räumliche Lage auf dem Felde nur unmerklich verändern, oder genau,

dass die Entfernung el, auf das Feld bezogen, als Null betrachtet werden kann. Es wird diese Annahme in der Praxis jederzeit richtig sein, zumal wenn man e in der ungefähren Lage von l wählt.

Der Beweis der Richtigkeit des angegebenen Verfahrens beruht auf folgenden Gründen.

Visirt man Fig. IV. von einem Punkt l des Messtisches, der über L auf dem Felde liegt, nach A, B und C, und denkt die Linien ab, bc und ca parallel AB, BC und CA auf dem Felde, so sind die Dreiecke abc und ABC ähnlich, und die Seiten, wie die Entfernungen stehen in Proportion. Es ist also der Punkt l auf dem Messtisch über L auf dem Felde richtig eingestellt und bestimmt.

Das Dreieck abc lässt sich über den Visirlinien lA, lB und lC schieben und drehen, so dass der Punkt a in lA, und der Punkt b in lB bleibt: eine Bedingung, welche ausführbar ist, bis a oder b in l fällt, und so lange die kürzeste Entfernung beider Linien Al und Bl nicht grösser wird als ab.

Die neue Lage des Dreiecks abc sei $a'b'c'$.

Wird das Dreieck abc in der angezeigten Weise geschoben und gedreht, so wird der Punkt c' die Visirlinie lC in der Regel verlassen und nach c' rücken.

Fiele dagegen der Punkt c' ebenfalls in die Visirlinie lC, so müsste $\angle b'lc' = \angle blc$ sein, weil es ihn deckte.

Diese Bedingung findet bekanntlich nur dann statt, wenn a, b, c und l in der Peripherie eines Kreises liegen: ein Fall, bei welchem die Lage des Punktes L durch A, B und C nicht bestimmt wird.

In jedem andern Falle wird $\triangle abc$ parallel $\triangle ABC$ sein, wenn a, b und c in die bezüglichen Visirlinien fallen. Es wird also auch l auf dem Messtisch richtig angegeben sein, wenn man es aus zwei Punkten unter den drei bekannten durch Rückwärtseinschneiden bestimmt hat.

Man dürfte durch das hier gezeigte Verfahren bequemer, kürzer und genauer zum Zweck kommen, als durch das fehlerzeigende Dreieck und durch die Methode, welche z. B. in Vegas' Math[illegible] B. 2 S. 360. der 5. Auflage angegeben ist.

XXXIII.

Ueber den Umkreis des Dreiecks.

Von

Emil Hain.

I.

P sei ein beliebiger Punkt der Ebene eines Dreiecks ABC, p_a seine Normale auf $BC = a$, A' ihr Fusspunkt; es ist dann:

$$\triangle A'B'C' = \frac{\Sigma a p_b p_c}{abc} \triangle ABC.$$

Liegt P auf die Peripherie des Umkreises, so ist:

$$\triangle A'B'C' = 0 = \Sigma a p_b p_c$$

Schreibt man statt p_a die trimetrischen Punktcoordinaten x_a, so ist demnach die Gleichung des Umkreises:

$$\Sigma a x_b x_c = 0$$

Setzen wir hier:

$$x_a = l\xi_a + m\xi_a'$$

wo ξ_a, ξ_a' zwei beliebige Punkte, also $l\xi_a + m\xi_a'$ der Schnittpunkt der Secante $\xi_a \xi_a'$ mit dem Umkreis, so folgt:

$$\Sigma a x_b x_c = l^2 \Sigma a \xi_b \xi_c + lm \Sigma a(\xi_b \xi_c' + \xi_b' \xi_c) + m^2 \Sigma a \xi_b' \xi_c' = 0$$

Die beiden so durch $\frac{l}{m}$ bestimmten Schnittpunkte fallen zusammen, wenn

$$[\Sigma a(\xi_b \xi_c' + \xi_b' \xi_c)]^2 = 4 \Sigma a \xi_b \xi_c . \Sigma a \xi_b' \xi_c'$$

Wird nun ξ_a' selbst als ein Punkt des Kreises angenommen, so ist:

$$\Sigma a(\xi_b \xi_c' + \xi_b' \xi_c) = 0 = \Sigma \xi_a (b \xi_c' + c \xi_b')$$

Dieser Bedingung muss der Punkt ξ_a genügen, d. h. er muss ein Punkt der Geraden

$$\Sigma x_a (b \xi_c' + c \xi_b') = 0$$

sein und dies ist die Gleichung der Tangente an den Kreispunkt ζ_a'. Obige nach $\frac{l}{m}$ quadratische Gleichung gibt zwei (absolut genommen) gleiche aber entgegengesetzt gleiche Werte für $\frac{l}{m}$, wenn

$$\Sigma a(\xi_b \xi_c' + \xi_b' \xi_c) = 0$$

Dann wird die Strecke $\xi_a \xi_a'$ durch den Kreis harmonisch geteilt. Lassen wir ξ_a constant d. h. bilden wir ein Secantenbüschel aus dem Scheitel ξ_a, so gibt es nach der letzten Gleichung eine Gerade, die alle Punkte ξ_a' enthält, für welche die Strecke $\xi_a \xi_a'$ durch den Kreis harmonisch geteilt wird. Diese Gerade heisst die Polare des Punktes ξ_a und ihre Gleichung ist:

$$\Sigma x_a (b \xi_c + c \xi_b) = 0.$$

II.

Trifft PA die Seite BC in A' und construirt man den in Bezug auf BC harmonisch zugeordneten Punkt A''; so liegen die A'' in einer Geraden, welche die Harmonikale des Punktes P heisst. Ihre Gleichung ist $\Sigma \frac{x_a}{\xi_a} = 0$, wenn ξ_a die Coordinaten von P sind. Umgekehrt kann man, wenn $\Sigma a_1 x_a = 0$ die Gleichung einer Geraden ist, den Punkt $\frac{1}{a_1}$ den harmonischen Pol dieser Geraden nennen.

Die Gleichung des Umkreises ist $\Sigma a x_b x_c = 0$; ξ_a sei ein Punkt seiner Peripherie; seine Harmonikale hat die Gleichung $\Sigma \frac{x_a}{\xi_a} = 0$.

Diese Gerade geht aber durch einen festen Punkt, weil $\Sigma \frac{a}{\xi_a} = 0$ welche Gleichung eben die Voraussetzung einschliesst, dass ξ_a auf der Peripherie des Umkreises liegt. Der feste Punkt, in welchem sich die Harmonikalen der Peripheriepunkte des Umkreises sch[illegible] den, ist also der Symmetriepunkt a d. i. der Grebe'sche [illegible] (Schendel, Elemente der analytischen Geometrie der Ebene i[illegible] linearen Coordinaten, Seite 44). Um den geometrischen Ort des [illegible]

monischen Poles aller Tangenten des Umkreises zu erhalten, bestimmen wir zunächst den harmonischen Pol der Tangente an den Punkt ξ_a des Umkreises.

Nach I. ist ihre Gleichung

$$\Sigma x_a (b\xi_c + c\xi_b) = 0$$

somit ist

$$(c\xi_a + a\xi_c)(a\xi_b + b\xi_a) = bc\xi_a$$

der harmonische Pol der Tangente von ξ_a. Setzen wir

$$bc\xi_a^2 = x_a$$

so ist

$$\xi_a = \sqrt{\frac{x_a}{bc}}$$

$$\Sigma a\xi_b\xi_c \equiv \Sigma \sqrt{a x_b x_c} = 0$$

Die Gleichung des gesuchten Ortes ist also:

$$\Sigma a^2 x_b^2 x_c^2 - 2\,\Pi x_a\, \Sigma a b x_c = 0$$

eine Curve 4. Grades, welche durch die Ecken des Urdreieckes hindurchgeht.

III.

Die Umkreispolare des Punktes ξ_a ist die Gerade $b\xi_c + c\xi_b$; für $\xi_a = a$, d. i. für den Grebe'schen Punkt wird die Umkreispolare die Gerade bc; dies ist aber auch die Harmonikale desselben Punktes.

Die Umkreispolare des Grebe'schen Punktes ist die Harmonikale dieses Punktes.

Es sei ξ_a der Ort der Punkte, deren Harmonikale mit der Umkreispolare zusammenfällt. Dann ist die Gerade $\xi_b \xi_c$ die Harmonikale von ξ_a und $b\xi_c + c\xi_b$ die Umkreispolare desselben Punktes.

Die Auflösung der drei Gleichungen:

$$b\xi_c + c\xi_c = \xi_b\xi_c$$

gibt $\xi_a \equiv a$ d. h. der Grebe'sche Punkt ist der einzige, der die Eigenschaft hat, dass seine Harmonikale mit der Umkreispolare zusammenfällt; er kann also auch durch diese Eigenschaft definirt werden.

Die Harmonikale des Grebe'schen Punktes ist auch diejenige Gerade, in welcher die Schnittpunkte der Seiten des Urdreiecks mit den Umkreistangenten an den Gegenecken liegen.

Nach I. hat die Tangente an den Punkt $A \equiv 1, 0, 0$ die Gleichung:

$$cx_b + bx_c = 0$$

Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Seite BC, deren Gleichung $x_a = 0$ ist, hat die Coordinaten $0, -b, +c$ und liegt also in der Symmetriegeraden bc.

IV.

Die Umkreispolare des Inkreiscentrums ist $b+c$. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Harmonikalen desselben Punktes ist:

$$\begin{vmatrix} 1, & c+a \\ 1, & a+b \end{vmatrix} = b-c$$

d. h. er gehört der unendlich fernen Geraden der Dreieckebene an.

Die Umkreispolare des Inkreiscentrums ist parallel seiner Harmonikale.

Es sei x_a ein Punkt, dessen Umkreispolare parallel seiner Harmonikale ist.

Es muss dann sein:

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ bx_c + cx_b, & cx_a + ax_c, & ax_b + bx_a \\ x_b x_c, & x_c x_a, & x_a x_b \end{vmatrix} = 0$$

Der Ort von x_a ist also:

$$\Sigma a x_a^2 (bx_c - cx_b) = 0$$

eine Curve 3. Grades, welche durch die Mitten des Dreiecks und sein Inkreiscentrum hindurchgeht.

V.

Die Harmonikale des Inkreiscentrums ist die Gerade 1; es sei ξ_a ihr Umkreispol, der Punkt L. Es ist dann:

$$b\xi_c + c\xi_b = 1$$

woraus

$$\xi_a \equiv a(b+c-a) \equiv a(s-a).$$

Wenn mit G der Symmetriepunkt a bezeichnet wird, so ist $LG \equiv bc(b-c)$; ihr Umkreispol sei L_1, er ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{\xi_a}{b}+\frac{\xi_c}{c}=b-c$$

L_1 ist somit der Symmetriepunkt $a(b-c)$; er liegt in der Polare von G und in der Harmonikalen des Umkreiscentrums.

Die LG trifft die Harmonikale von G in dem Symmetriepunkt

$$a(b+c-2a).$$

Es sei X der Umkreispol der Geraden

$$a_1x_a+b_1x_b+c_1x_c=0$$

es ist dann für ihn:

$$b\xi_c+c\xi_b=a_1$$

woraus

$$\xi_a \equiv \begin{vmatrix} a_1 & c & b \\ b_1 & o & a \\ c_1 & a & o \end{vmatrix} \equiv a(bb_1+cc_1-aa_1)$$

aus welcher Formel sich durch Linealconstructionen eine unbegrenzte Menge von Symmetriepunkten ergibt. Man bestimmt z. B. den Umkreispol X einer gegebenen Geraden und die Harmonikale von X, welche die erste Gerade in Y schneidet. Man bestimmt den Umkreis = und harmonischen Pol der XY u. s. w.

Wien, März 1875.

XXXIV.

Ueber symmetrische Punktsysteme des Dreiecks.

Von

Emil Hain.

I.

Ist p_a die Normale eines Punktes P in der Ebene eines Dreiecks ABC auf die Seite $BC = a$ desselben; so heisst P ein Symmetriepunkt des Dreiecks, wenn p_a eine nach b und c symmetrische Function der Seiten a, b, c ist und p_b, p_c durch cyklische Vertauschung aus p_a folgen.

Ist p_a aber nicht nach b und c symmetrisch, folgen aber noch immer p_a, p_b, p_c durch cyklische Vertauschung der a, b, c auseinander; so kann ein solcher Punkt ein Halbsymmetriepunkt des Dreiecks genannt werden. Und zwar entspricht einem jeden solchen ein zweiter. Es sei z. B.

$$p_a = f[\varphi(a), \quad \psi(b), \quad \chi(c)]$$

wo φ, ψ, χ beliebige Functionen nur von der eingeschlossenen Variablen sind, f aber ganz beliebig ist; man hat somit:

$$p_b = f[\varphi(b), \quad \psi(c), \quad \chi(a)]$$
$$p_c = f[\varphi(c), \quad \psi(a), \quad \chi(b)]$$

Dann gibt es einen Punkt p_a', so dass:

$$p_a' = f[\varphi(a), \quad \psi(c), \quad \chi(b)]$$
$$p_b' = f[\varphi(b), \quad \psi(a), \quad \chi(c)]$$
$$p_c' = f[\varphi(c), \quad \psi(b), \quad \chi(a)]$$

Die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte hat zum Coefficienten von x_a in ihrer Gleichung die Determinante:

$$\begin{vmatrix} f[\varphi(b),\ \psi(c),\ \chi(a)], & f[\varphi(b),\ \psi(a),\ \chi(c)] \\ f[\varphi(c),\ \psi(a),\ \chi(b)], & f[\varphi(c),\ \psi(b),\ \chi(a)] \end{vmatrix}$$

Werden in dieser Determinante b und c mit einander vertauscht, so ändert sie nicht ihren Wert; sie ist somit nach b und c symmetrisch. Somit ist die Verbindungsgerade dieser Halbsymmetriepunkte eine Symmetriegerade.

Wie die Symmetriepunkte nach der Dimension ihrer Coordinaten in Symmetriepunkte 1. 2. 3. ... Grades eingeteilt werden können; ist dies hier auch bei den Halbsymmetriepunkten möglich.

P_1, P_2 seien Halbsymmetriepunkte ersten Grades, so dass

$$P_1 \equiv \varphi b + \psi c + \chi a$$
$$P_2 \equiv \varphi c + \psi b + \chi a,$$

wo φ, ψ, χ constante Grössen vorstellen.

Dann ist:

$$P_1 P_2 \equiv \begin{vmatrix} \varphi c + \psi a + \chi b, & \varphi a + \psi c + \chi b \\ \varphi a + \psi b + \chi c, & \varphi b + \psi a + \chi c \end{vmatrix}$$
$$\equiv (\varphi + \psi)(a^2 - bc) + \chi(ab + ac - b^2 - c^2)$$

woraus sich ergibt:

Die $P_1 P_2$ gehen durch den Schnittpunkt der Geraden $a^2 - bc$ und $ab + ac - b^2 - c^2$ d. i. durch den Punkt:

$$\begin{vmatrix} b^2 - ca, & bc + ba - c^2 - a^2 \\ c^2 - ab, & ca + cb - a^2 - b^2 \end{vmatrix} \equiv b - c$$

d. h. die Verbindungsgeraden je zweier conjugirten Halbsymmetriepunkte obiger Form sind einander parallel und zwar der Harmonikale des Inkreiscentrums.

Denn die Gerade $x_a + x_b + x_c = 0$ geht durch die Halbsymmetriepunkte $b - c$, $c - b$, welche mit ihrem unendlich fernen zusammenfallen.

Ist $\chi = 0$, so ist die Gerade $P_1 P_2$ die Symmetriegerade $a^2 - bc$ d. h. alle Halbsymmetriepunkte der Form $\varphi b + \psi c$, $\varphi c + \psi b$ liegen in der Geraden $a^2 - bc$.

Ist $\varphi = -\psi$, so ist $P_1 P_2 \equiv ab + ac - b^2 - c^2$ und die Halb-

symmetriepunkte sind von der Form $\varphi b-\varphi c+\chi a$, $\varphi c-\varphi b+\chi a$ oder $b-c+\chi a$, $c-b+\chi a$.

Die Punkte endlich der Form

$$\varphi b+\psi c+(\varphi+\psi)a,\quad \varphi c+\psi b+(\varphi+\psi)a$$

liegen in der Geraden:

$$a^2-b^2-c^2+ab+ac-bc.$$

II.

Bezeichnen wir den Symmetriepunkt a mit G, die Halbsymmetriepunkte b, c mit G_1, G_2; so sind die Normalen von G_1 und G_2 auf a:

$$\frac{2F}{\Sigma ab}.b \quad \text{und} \quad \frac{2F}{\Sigma ab}.c$$

wo $F=\triangle ABC$.

Die Entfernung zweier Punkte P, P', deren Seitennormalen p_a und p_a' sind, wird durch die Formel ausgedrückt:

$$\overline{PP'^2}=\frac{abc}{4F^2}\Sigma a(p_b-p_b')(p_c'-p_c)$$

sie gibt:

$$\overline{G_1G_2}^2=\frac{abc}{(\Sigma ab)^2}\Sigma a(a-b)(a-c)$$

$$G_1G_2=\frac{\sqrt{abc[3abc+\Sigma a^3-\Sigma ab(a+b)]}}{\Sigma ab}$$

Sind P_1, P_2, P_3 drei Punkte mit den x_a Coordinaten α_1, α_2, α_3 und sind $\lambda_1\alpha_1$, $\lambda_2\alpha_2$, $\lambda_3\alpha_3$ ihre Normalen auf a, so ist:

$$\triangle P_1P_2P_3=\frac{abc}{8F^2}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}$$

oder weil

$$\lambda_1=\frac{2F}{a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1}\quad \text{ist,}$$

$$\triangle P_1P_2P_3=\frac{abc\,\Sigma\alpha_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)}{\Pi(a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1)}.F$$

Diese Formel gibt:

$$\triangle G_1PG_2=\frac{abc\,\Sigma\alpha_1(bc-a^2)}{(\Sigma ab)^2.\Sigma a\alpha_1}.F$$

wo α_1 die Coordinaten des Punktes P_1 sind. Für specielle P_1 ergibt sich z. B.

$$\triangle\, G_1 G G_2 = \frac{abc(3abc - \Sigma a^3)}{\Sigma a^2 . (\Sigma ab)^2} . F$$

$$\triangle\, G_1 J G_2 = \frac{abc\varrho(\Sigma ab - \Sigma a^2)}{2(\Sigma ab)^2}$$

wo J das Inkreiscentrum und ϱ den Inkreisradius bezeichnet.

Die Entfernung eines Punktes ξ_a von der Geraden α_1 ist $\Sigma \alpha_1 \xi_a : N$, wenn ξ_a die Seitennormale auf a und $N_1 = \Sigma \alpha_1{}^2 - 2\Sigma \alpha_1 b_1 \cos\gamma$ (α, β, γ die Winkel des Fundamentaldreiecks).

Ist $\alpha_1 = 1$, ist also der Abstand eines Punktes von der Harmonikalen des Inkreiscentrums zu bestimmen, so ist $N = d : r$, wo d den Abstand des Umkreiscentrums vom Inkreiscentrum und r den Umkreisradius des Fundamentaldreiecks bezeichnet.

Für $\xi_a \equiv G_1$ erhalten wir:

$$\frac{\Sigma \alpha_1 \xi_a}{N} = \frac{r}{d}(a+b+c) \cdot \frac{2F}{\Sigma ab} = \frac{st}{2d}$$

wo

$$2s = a+b+c, \quad t = \frac{2abc}{\Sigma ab}$$

Für G_2 erhält man denselben Ausdruck mit demselben Zeichen, weil die Gerade $G_1 G_2 \equiv a^2 - bc$ nach I. parallel zur Harmonikalen des Inkreiscentrums ist.

Um nun zur Construction der Punkte G_1 und G_2 zu gelangen, denken wir uns G_1 mit A verbunden.

Die AG_1 schneidet BC in $A_1 \equiv 0, c, a$. Die Seitennormale von A_1 sind:

$$0, \quad \frac{2F}{a+b}, \quad \frac{2aF}{c(a+b)}$$

Fällen wir von A_1 auf AB eine Senkrechte, so hat diese die Länge:

$$BA_1 \sin\beta = \frac{2aF}{c(a+b)},$$

somit ist:

$$BA_1 = \frac{a^2}{a+b}, \quad CA_1 = \frac{ab}{a+b},$$

welche Gleichungen zur Construction von G_1 führen. Dabei kann bemerkt werden, dass

$$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2 = \frac{2abcF}{\Pi(a+b)}$$

Die Transversalenfusspunktdreiecke der dem Grebe'schen Punkt zugeordneten Halbsymmetriepunkten haben gleichen Flächeninhalt mit dem Fusspunktdreieck der inneren Winkelhalbirenden des Urdreiecks.

III.

Der Symmetriequnkt bc werde mit S, die Halbsymmetriepunkte ab, ac mit S_1, S_2 bezeichnet. Dann ist $S_1S_2 \equiv bc(bc-a^2)$. Ist also in einem Dreieck die eine Seite die mittlere Proportionale der beiden andern, so gehen durch das Gegeneck der Mittelseite die Verbindungsgeraden der conjugirten Punkte sowol des Schwerpunktes als auch des Grebe'schen Punktes.

Die Harmonikalen von S_1 und S_2 haben die Formen c, a, b und b, c, a. Ihr Schnittpunkt hat die Coordinaten a^2-bc und liegt also für $a=\sqrt{bc}$ auf BC; er liegt zugleich mit S auf der Geraden $b-c$, in welcher die Symmetriepunkte der ersten Ordnung liegen.

Treffen AS_1 und AS_2 die BC in A_1 und A_2, so findet man wie in II.:

$$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2 = \frac{2a^2b^2c^2}{\Pi(a^2+bc)}F$$

$$BA_1 = \frac{a^2c}{ac+b^2}, \quad CA_1 = \frac{ab^2}{ac+b^2}$$

$$BA_1 : CA_1 = ac : b^2.$$

IV.

M_1, M_2 seien die Halbsymmetriepunkte $m+b$, $m+c$. Es ist dann:

$$\overline{M_1M_2}^2 = \frac{abc}{4F^2}\cdot\lambda_m^2\,\Sigma a(a-b)(a-c)$$

wo

$$\lambda_m = \frac{2F}{2ms+\Sigma ab}$$

Sind ebenso N_1, N_2 die Punkte $n+b$, $n+c$ so folgt:

$$\frac{M_1M_2}{N_1N_2} = \frac{\lambda_m}{\lambda_n} = \frac{2ns+\Sigma ab}{2ms+\Sigma ab}$$

Man findet ferner als Gleichungen der Verbindungsgeraden dieser Punkte:

$$M_1M_2 \equiv m(2a-b-c)+a^2-bc$$
$$N_1N_2 \equiv n(2a-b-c)+a^2-bc$$

Diese beiden Geraden schneiden sich im Symmetriepunkt:

$$\begin{vmatrix} m(2b-c-a)+b^2-ca, & n(2b-c-a)+b^2-ca \\ m(2c-a-b)+c^2-ab, & n(2c-a-b)+c^2-ab \end{vmatrix}$$
$$=(m-n)\begin{vmatrix} 2b-c-a, & b^2-ca \\ 2c-a-b, & c^2-ab \end{vmatrix} \equiv (b-c)$$

Die M_1M_2 sind also der Harmonikale des Inkreiscentrums parallel und fallen für jedes Dreieck zusammen, in dem eine Seite sowol das arithmetische als geometrische Mittel der beiden andern ist.

Man findet ferner:

$$M_1N_1 \equiv a-c, \quad M_2N_2 \equiv a-b$$

Die M_1N_1, M_2N_2 liegen also in zwei festen Geraden, die sich im Inkreiscentrum treffen.

V.

Im Vorigen wurden einige Punkte untersucht von der Form, dass durch Verschiebung der Coordinaten vollständige Symmetriepunkte entstehen. So wurden z. B. aus dem Schwerpunkt $S \equiv bc$ die Halbsymmetriepunkte ca und ab hergeleitet. Aus der allgemeinen Form der Halbsymmetriepunkte in I. folgt aber, dass durch die Verschiebung der Coordinaten nicht immer vollständige Symmetriepunkte sich ergeben müssen.

So geben die Halbsymmetriepunkte

$$ab^2, \quad bc^2, \quad ca^2 \equiv U_1$$
$$ac^2, \quad ba^2, \quad cb^2 \equiv U_2$$

durch Verschiebung der Coordinaten folgendes System von Halbsymmetriepunkten:

$$bc^2, \quad ca^2, \quad ab^2 \equiv V_1$$
$$b^2c, \quad c^2a, \quad a^2b \equiv V_2$$
$$a^2b, \quad b^2c, \quad c^2a \equiv W_1$$
$$a^2c, \quad b^2a, \quad c^2b \equiv W_2$$

Als Gleichungen ihrer Verbindungsgeraden erhält man:

$$U_1U_2 \equiv bc(a^4-b^2c^2)$$
$$V_1V_2 \equiv a(a^2-bc)$$
$$W_1W_2 \equiv b^2c^3(a^2-bc)$$

Diese Geraden gehen also für $a^2 = bc$ durch A.

Trifft AV_1 die BC in A_1, so findet man wie in II.

$$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2 = \frac{2abcF}{\Pi(a+b)}$$

Die Transversalfusspunktdreiecke der Punkte bc^2, b^2c haben mit dem Transversalfusspunktdreieck des Inkreiscentrums gleichen Flächeninhalt.

Trifft AU_1 die BC in A_1', so ist:

$$\triangle A_1'B_1'C_1' = \triangle A_2'B_2'C_2' = \frac{2a^2b^2c^2F}{\Pi(a^2+b^2)}$$

Wird G, der Symmetriepunkt a, mit A verbunden und trifft AG die BC in A'', so findet man ebenfalls:

$$\triangle A''B''C'' = \frac{2a^2b^2c^2F}{\Pi(a^2+b^2)}$$

VI.

Es ist möglich durch Constructionen, welche Halbsymmetriepunkte betreffen, vollständige Symmetriepunkte zu erhalten. So gelangt man z. B. zur Construction des Symmetriepunktes zweiten Grades:

$$(b+c)(b+c-a)$$

auf folgende Weise.

Man verlängere die Seite BC über B und C um BA_b und CA_c so hinaus, dass:

$$A_bB + BC + CA_c = A_bA_c = a+b+c$$

$$A_bB = c, \quad CA_c = b$$

Man erhält dann:

$$\begin{array}{lll} A_b \equiv 0, & a+c, & -b \\ B_c \equiv -c, & 0, & b+a \\ C_a \equiv c+b, & -a, & 0 \end{array}$$

Diese Coordinaten müssen der Reihe nach mit

$$\frac{2F}{ab}, \quad \frac{2F}{bc}, \quad \frac{2F}{ca}$$

multiplicirt werden, damit sie Seitennormalen werden.

Die Schwerpunkte der flächengleichen Dreiecke $A_b B_c C_a$ und $A_c B_a C_b$ seien S_1, S_2. Ihre Normalen auf a sind:

$$\frac{2F}{3abc}(b^2+bc-ac) \quad \text{und} \quad \frac{2F}{3abc}(c^2+bc-ab)$$

Der Halbirungspunkt der Strecke $S_1 S_2$ ist der Symmetriepunkt

$$(b+c)(b+c-a).$$

Es werde BC über B und C hinaus um m verlängert, so dass

$$A_b B = C A_c = m$$

Die Seitennormalen von A_b, A_c sind dann:

$$\begin{aligned} A_b &\equiv 0, \quad +(m+a)\sin\gamma, \quad -m\sin\beta \\ A_c &\equiv 0, \quad -m\sin\gamma, \quad +(m+a)\sin\beta \end{aligned}$$

Die Schwerpunkte S_1, S_2 dieser Dreiecke $A_b B_c C_a$, $A_c B_a C_b$ haben als Seitennormalen:

$$\frac{(m+c)\sin\beta - m\sin\gamma}{3}, \quad \frac{(m+b)\sin\gamma - m\sin\beta}{3}$$

Die Mitte von $S_1 S_2$ ist der Punct bc, der Schwerpunkt des Urdreiecks.

VII.

Ist p_a ein Symmetriepunkt, so kann aus seinen Coordinaten folgendes symmetrisches System abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} P_a &\equiv \varphi p_a, \quad p_b, \quad p_c \\ P_b &\equiv p_a, \quad \varphi p_b, \quad p_c \\ P_c &\equiv p_a, \quad p_b, \quad \varphi p_c \end{aligned}$$

wo φ constant oder eine beliebige symmetrische Function der Seiten a und zwar von der Dimension Null ist.

Die P_a können dann dem Symmetriepunkt $P \equiv p_a$ nach dem Index φ zugeordnet genannt werden, oder da sie erst in ihrer Dreiheit ein symmetrisches System bilden, analog den früheren Bezeichnungen, Drittelsymmetriepunkte.

Es ist $AP_a \equiv p_c x_b - p_b x_c$, woraus sich ergibt, dass die AP_a für jeden Index φ sich in P treffen. Die Ecktransversalen von P enthalten also alle in dieser Art zugeordneten Drittelsymmetriepunkte.

Vorzugsweise wurde bisjetzt der Fall $\varphi = -1$ untersucht. So z. B. sind die Punkte: -1, $+1$, $+1$ die Ankreiscentra des Funda-

mentaldreiecks. Construirt man über BC als Basis nach Aussen so ein gleichschenkliges Dreieck, dass die Winkel an der Basis gleich ihrem Gegenwinkel im Urdreieck sind; so erhält man als Spitzen dieser gleichschenkligen Dreiecke die Punkte: $-a$, $+b$, $+c$.

Für den Fall $\varphi = -1$ gilt noch die Bemerkung, dass die Harmonikalen der P_a die Seiten des Transversalenfusspunktdreiecks von P bilden.

Die Harmonikale von P_a hat nämlich die Gleichung:

$$\frac{x_a}{-p_a}+\frac{x_b}{p_b}+\frac{x_c}{p_c}=0$$

Wird BC von AP in A_1 geschnitten, so ist:

$$B_1 \equiv p_a, \quad 0, \quad p_c$$
$$C_1 \equiv p_a, \quad p_b, \quad 0$$

$$B_1C_1 \equiv -p_b p_c x_a + p_c p_a x_b + p_a p_b x_c$$

Die Harmonikale von P_a fällt mit B_1C_1 zusammen. P_a ist der harmonische Pol von B_1C_1 in Bezug auf das Urdreieck. Die P_a können somit, wenn P gegeben, durch Linealconstruction erhalten werden.

Wien, April 1875.

XXXV.

Ueber Bildung neuer Symmetriepunkte.

Von

Emil Hain.

I.

Da jeder Punkt in der Ebene eines Dreiecks in gewissen symmetrischen Beziehungen zu den Seiten desselben stehen kann: so ist die Untersuchung dieser verschiedenen Symmetrieverhältnisse unbegrenzt und ebenso wenig abzuschliessen, als die Theorie der Curven. Jeder Symmetriepunkt des Dreiecks kann auf unendlich viele Arten construirt werden, ebenso wie einer und derselben Curve verschiedene Bildungsweisen angehören. Ist eine gewisse Anzahl von Symmetriepunkten gegeben, so kann man aus ihnen als Constructionselementen eine Reihe neuer Symmetriepunkte durch mehr oder minder einfache Zeichnung erhalten. Im Folgenden wird besonders der Umkreis des Dreiecks, das Inkreiscentrum, der Schwerpunkt, der Grebe'sche Punkt als gegeben betrachtet.

Wenn ein neuer Punkt P mit den trimetrischen Coordinaten $\xi_a \xi_b \xi_c$ bestimmt ist, wo ξ_a der Normale von P auf die Seite $BC = a$ des Dreiecks ABC proportional ist; so ist die Gleichung seiner Harmonikalen (Archiv LVII. Seite 316.)

$$\frac{x_a}{\xi_a} + \frac{x_b}{\xi_b} + \frac{x_c}{\xi_c} = 0$$

Ist ξ_a ein Symmetriepunkt, so ist seine Harmonikale eine Symmetriegerade und man kann den Ausdruck gebrauchen: $\xi_b \xi_c$ ist die Harmonikale von ξ_a. Die Coefficienten von $x_b x_c$ werden dann durch cyklische Vertauschung der abc erhalten.

Der harmonische Pol der Symmetriegeraden:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

ist also der Symmetriepunkt $b_1 c_1$.

Die Polare des Punktes ξ_a in Bezug auf den Umkreis ist die Gerade $b\xi_c + c\xi_b$; der Umkreispol der Geraden: $\Sigma a_1 x_a = 0$ ist der Punkt: $a(bb_1 + cc_1 - aa_1)$.

Die Verbindungsgerade zweier Punkte ξ_a, ξ_a' ist die Gerade:

$$\begin{vmatrix} \xi_b & \xi_b' \\ \xi_c & \xi_c' \end{vmatrix}$$

Der Schnittpunkt zweier Geraden a_1, a_2 ist der Punkt:

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Trifft AP die Seite BC in A_1 und nehmen wir auf BC so einen Punkt A_2 an, dass $BA_2 = CA_1$, $CA_2 = BA_1$; so müssen die AA_2 sich in einem Punkte P' schneiden, welchen man als den zu P gehörigen Punkt mit denselben Seitenabschnitten bezeichnen kann. So gewinnt man also zu jedem Punkt (den Schwerpunkt ausgenommen) durch eine sehr einfache Construction einen zweiten.

Die so angedeuteten Erzeugungsarten neuer Symmetriepunkte werden in Folgendem angewendet. Betrachtet werden jedoch nur solche Punkte, deren trimetrische Punktcoordinaten rationale Functionen von abc sind und die fünfte Dimension nicht übersteigen.

II.

Der einzige Symmetriepunkt nullter Dimension ist das Inkreiscentrum J. Es treffe AJ die Seite BC in A_1, so sind die Coordinaten dieser Symmetriepunkte:

$$A_1 \equiv 0,\ 1,\ 1$$
$$B_1 \equiv 1,\ 0,\ 1$$
$$C_1 \equiv 1,\ 1,\ 0$$

Damit diese Coordinaten Seitennormalen werden, sind sie noch bzhw. mit

$$\frac{2F}{b+c},\quad \frac{2F}{c+a},\quad \frac{2F}{a+b}$$

zu multipliciren. So sind dann die Seitennormalen von A_1:

$$0,\ \frac{2F}{b+c},\ \frac{2F}{b+c}$$

$$P_1 J \equiv \begin{vmatrix} (c+a)(2b+c+a), & 1 \\ (a+b)(2c+a+b), & 1 \end{vmatrix}$$

Der harmonische Pol dieser Geraden ist:

$$(a^2-b^2)(a^2-c^2) \equiv P$$

und ihr Umkreispol:

$$a[b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)-a(b^2-c^2)] \equiv a(b-$$

Die Umkreispolare von J ist die Gerade b Pol ist:

$$(a+b)(a+c) \equiv P_4$$

sie trifft die $P_1 J$ im Punkte:

$$\begin{vmatrix} c^2-a^2, & c+a \\ a^2-b^2, & a+b \end{vmatrix} \equiv (a+b)(a+c)(b+$$

Die Normale von J auf BC treffe diese in A_2.

$$JA_2 = \varrho = \frac{2F}{a+b+c} = \frac{F}{s}$$

Die Normale von A_2 auf AC hat die Länge

$$CA_2 \sin\gamma = (s-c)\frac{2F}{ab}$$

Die Seitennormalen von A_2 sind also:

$$0, \quad \frac{(a+b-c)F}{ab}, \quad \frac{(a+c-b)}{ac}$$

Der Schwerpunkkt des Dreiecks $A_2B_2C_2$ ist also d

$b+a-$

Die $P_6 J$ schneidet die Umkreispolare von J in:

$$\begin{vmatrix} c+a, & (c-a)(c+a-b) \\ a+b, & (a-b)(a+b-c) \end{vmatrix} \equiv a(a^2-b^2-c^2+bc) \equiv P_8$$

III.

Trifft J die BC in A_1, so ist:

$$BA_1 = \frac{ac}{b+c}, \quad CA_1 = \frac{ab}{b+c}$$

Wir nehmen nun auf BC einen solchen Punkt A_2 an, dass

$$BA_2 = \frac{ab}{b+c}, \quad CA_2 = \frac{ac}{b+c}$$

Die Normale von A_2 auf AC hat die Länge:

$$CA_2 \sin\gamma = \frac{2F}{bc(b+c)} \cdot c^2$$

Somit ist:

$$A_2 \equiv 0, \quad c^2, \quad b^2$$
$$\equiv 0, \quad a^2c^2, \quad a^2b^2$$

Die AA_2 schneiden sich also im Symmetriepunkte

$$b^2c^2 \equiv P_9$$

Die Seitennormalen von A_2 sind:

$$0, \quad \frac{2Fc^2}{bc(b+c)}, \quad \frac{2Fb^2}{bc(b+c)}$$

Der Schwerpunkt des Dreiecks $A_2B_2C_2$ ist:

$$\frac{c^2}{ca(c+a)} + \frac{b^2}{ab(a+b)} \equiv bc(b+c)(ab+ac+2bc) \equiv P_{10}$$

Die Harmonikale von $P_9 \equiv b^2c^2$ ist die Gerade a^2; sie trifft die Umkreispolare von J in:

$$\begin{vmatrix} b^2, & c+a \\ c^2, & a+b \end{vmatrix} \equiv ab^2 - ac^2 + b^3 - c^3 \equiv P_{11}$$

Die Gerade a^2 trifft die $P_1 J \equiv b^2 - c^2$ (II.) in:

$$\begin{vmatrix} c^2-a^2, & b^2 \\ a^2-b^2, & c^2 \end{vmatrix} \equiv b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 \equiv P_{12}$$

Der Umkreispol der a^2 ist:

$$a(b^3+c^3-a^3)\equiv P_{13}$$

Man findet ferner:

$$P_3J\equiv a^2(b^2-c^2)$$

IV.

Die Harmonikale des Inkreiscentrums hat die Gleichung:

$$x_a+x_b+x_c=0$$

Ihr Umkreispol ist:

$$a(b+c-a)\equiv P_{14}$$

Verbinden wir diesen Punkt mit dem Inkreiscentrum, so erhalten wir:

$$P_{14}J\equiv\begin{vmatrix} bc+ba-b^2, & 1 \\ ca+cb-c^2, & 1 \end{vmatrix}\equiv(b-c)(b+c-a)\equiv P_6J \quad \text{(II.)}$$

Sonach liegen das Inkreiscentrum, der Schwerpunkt seines Normalenfusspunktdreiecks und der Umkreispol in einer Geraden. Diese trifft die Harmonikale von J in:

$$\begin{vmatrix} (c-a)(c+a-b), & 1 \\ (a-b)(a+b-c), & 1 \end{vmatrix}\equiv b^2+c^2-2a^2+ab+ac-2bc\equiv P_{15}$$

Die Harmonikale von $P_{14}\equiv a(b+c-a)$ trifft die Harmonikale von J in:

$$\begin{vmatrix} ca(a+b-c)(c+b-a), & 1 \\ ab(b+c-a)(a+c-b), & 1 \end{vmatrix}\equiv a(b-c)(b+c-a)^2\equiv P_{16}$$

Mit der Geraden a^2 (III.) bildet die Harmonikale von J den Punkt:

$$b^2-c^2\equiv P_{17}$$

Man findet:

$$P_{17}J\equiv b^2+c^2-2a^2\equiv P_{18}$$

wo P_{18} den Schnittpunkt der $P_1J\equiv b^2-c^2$ mit der Harmonikalen von J bezeichnet. Der harmonische Pol der $P_{17}J$ ist:

$$(a^2+b^2-2c^2)(a^2+c^2-2b^2)\equiv P_{19}$$

V.

Die Gerade $b-c$ ist die Verbindungsgerade aller Symmetriepunkte der ersten Dimensionen. Da in ihr der Grebe'sche Punkt $G\equiv a$ und das Inkreiscentrum liegt, so ist ihre Construction gegeben. Wenn wir den Punkt $b^2c^2\equiv P_3$ (III.) mit dem Schwerpunkt des Fundamentaldreiecks $S\equiv bc$ verbinden, so erhalten wir:

$$P_9 J \equiv \begin{vmatrix} c^2a^2, & ca \\ a^2b^2, & ab \end{vmatrix} \equiv a^2(b-c)$$

Diese Gerade trifft die $b-c$ im Punkte:

$$\begin{vmatrix} b^2(c-a), & c-a \\ c^2(a-b), & a-b \end{vmatrix} \equiv b+c \equiv P_{20}$$

Die Harmonikale dieses Punktes ist die Gerade $(a+b)(a+c)$, sie trifft die Umkreispolare von J in:

$$\begin{vmatrix} (b+c)(b+a), & c+a \\ (c+a)(c+b), & a+b \end{vmatrix} \equiv (b^2-c^2)(2a+b+c) \equiv P_{21}$$

Die Umkreispolare von $b+c$ ist: $ab+ac+b^2+c^2$; ihr harmonischer Pol:

$$(bc+ba+c^2+a^2)(ca+cb+a^2+b^2) \equiv P_{22}$$

Die Gerade $ab+ac+b^2+c^2$ trifft die Harmonikale von J in:

$$\begin{vmatrix} bc+ba+c^2+a^2, & 1 \\ ca+cb+a^2+b^2, & 1 \end{vmatrix} \equiv (b-c)(b+c-a) \equiv P_{23}$$

Wird P_{23} mit dem Punkt $a(b+c-a) \equiv P_{14}$ (IV.) verbunden, so folgt:

$$P_{14}P_{23} \equiv \begin{vmatrix} b(c+a-b), & (c-a)(c+a-b) \\ c(a+b-b), & (a-b)(a+b-c) \end{vmatrix}$$
$$\equiv (a+b-c)(a+c-b)(ab+ac-b^2-c^2)$$

Der harmonische Pol dieser Geraden ist:

$$(bc+ba-c^2-a^2)(ca+cb-a^2-b^2)(b+c-a) \equiv P_{24}$$

Es treffe AP_{20} die BC in A_1, so ist:

$$A_1 \equiv 0, \quad c+a, \quad a+b$$

Die Seitennormalen sind dann:

$$A_1 \equiv 0, \quad \frac{2F(c+a)}{bc+\Sigma ab}, \quad \frac{2F(a+b)}{bc+\Sigma ab}$$

Der Schwerpunkt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ ist:

$$\frac{b+c}{ca+\Sigma ab} + \frac{b+c}{ab+\Sigma ab} \equiv (b+c)(ab+ac+2bc)(3ab+3ac+2bc) \equiv P_{25}$$

Bestimmen wir auf BC so den Punkt A_2, dass $BA_2 = CA_1$, $CA_2 = BA_2$. Dann ist CA_1 gleich der Normale von A_1 auf AC dividirt durch den Sinus des Winkels C, sonach:

$$CA_1 = \frac{2F(c+a)}{bc+\Sigma ab} \cdot \frac{1}{\sin\gamma} = \frac{ab(a+c)}{bc+\Sigma ab}$$

$$BA_2 = \frac{ab(a+c)}{bc+\Sigma ab}, \quad CA_2 = \frac{ac(a+b)}{bc+\Sigma ab}$$

Die Normale von A_2 auf AC hat also die Länge:

$$A_2C\sin\gamma = \frac{ac(a+b)}{bc+\Sigma ab}\cdot\frac{2F}{ab} = \frac{2F(a+b)c^2}{bc(bc+\Sigma ab)}$$

Die Coordinaten von A_2 sind:

$$0,\quad (a+b)c^2,\quad (a+c)b^2$$

Die AA_2 schneiden sich im Punkte: $b^2c^2(a+b)(a+c)$. Verbindet man diesen Punkt mit dem Punkte b^2c^2, so erhält man die Gerade: $a^2(b^2-c^2) \equiv P_9J$ (III.) Sie trifft die Harmonikale von J in:

$$\begin{vmatrix} b^2(c^2-a^2), & 1 \\ c^2(a^2-b^2), & 1 \end{vmatrix} \equiv a^2b^2+a^2c^2-2b^2c^2 \equiv P_{26}$$

Die Harmonikale des Punktes: $b^2c^2(a+b)(a+c)$ ist $a^2(b+c)$ und bildet mit der Geraden a^2 (III.) den Punkt:

$$\begin{vmatrix} b^2(c+a), & b^2 \\ c^2(a+b), & c^2 \end{vmatrix} \equiv b^2c^2(b-c) \equiv P_{27}$$

VI.

Der Grebe'sche Punkt wird erhalten, wenn man über den Seiten des Dreiecks nach Aussen oder nach Innen Quadrate construirt; die den Dreieckseiten parallelen Quadratseiten bilden ein Dreieck, dessen Homologiepunkt in Bezug auf das Urdreieck der Grebe'sche Punkt ist. Seine Seitennormalen sind: $2aF : \Sigma a^2$. Die Umkreispolare von $G \equiv a$ fällt mit der Harmonikalen desselben Punktes zusammen, sie ist die Gerade bc. Sie schneidet die Harmonikale von J in:

$$a(b-c) \equiv P_{28}$$

Es ist:

$$P_{28}J \equiv \begin{vmatrix} bc-ba, & 1 \\ ca-cb, & 1 \end{vmatrix} \equiv ab+ac-2bc$$

Der harmonische Pol dieser Geraden ist:

$$(bc+ba-2ca)(ca+cb-2ab) \equiv P_{29}$$

Ferner ist:

$$P_{28}G \equiv \begin{vmatrix} bc-ba, & b \\ ca-cb, & c \end{vmatrix} \equiv bc(b+c-2a)$$

Der harmonische Pol dieser Geraden ist:

$$a(a+b-2c)(a+c-2b) \equiv P_{30}$$

und ihr Umkreispol:

$$a(b+c-2a) \equiv P_{31}$$

Ferner hat man:

$$P_{31}G \equiv \begin{vmatrix} b(c+a-2b), & b \\ c(a+b-2c), & c \end{vmatrix} \equiv bc(b-c)$$

Diese Gerade, deren harmonischer Pol:

$$a(a-b)(a-c) \equiv P_{32}$$

schneidet die Harmonikale von J in:

$$\begin{vmatrix} ca(c-a), & 1 \\ ab(a-b), & 1 \end{vmatrix} \equiv a(b^2+c^2-ab-ac) \equiv P_{33}$$

Es treffe AG die BC in A_1, dann ist:

$$A_1 \equiv 0, \quad \frac{2bF}{b^2+c^2}, \quad \frac{2cF}{b^2+c^2}$$

Der Schwerpunkt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ ist also:

$$\frac{a}{c^2+a^2}+\frac{a}{a^2+b^2} \equiv a(b^2+c^2)(b^2+c^2+2a^2) \equiv P_{34}$$

Die Mitte von AG sei A'. Die Seitennormalen von A, G, A' sind:

$$A \equiv \frac{2F}{a}, \quad 0, \quad 0$$

$$G \equiv \frac{2aF}{\Sigma a^2} \quad \frac{2bF}{\Sigma a^2}, \quad \frac{2cF}{\Sigma a^2}$$

$$A' \equiv \frac{F}{a}+\frac{aF}{\Sigma a^2}, \quad \frac{bF}{\Sigma a^2}, \quad \frac{cF}{\Sigma a^2}$$

Somit ist der Schwerpunkt des Dreiecks $A'B'C'$:

$$\frac{1}{a}+\frac{3a}{\Sigma a^2} \equiv bc(4a^2+b^2+c^2) \equiv P_{35}$$

VII.

Trifft AG die BC in A_1, so ist:

$$BA_1 = \frac{ac^2}{b^2+c^2}, \quad CA_1 = \frac{ab^2}{b^2+c^2}$$

Vertauschen wir diese Seitenabschnitte, so dass:

$$BA_2 = CA_1 = \frac{ab^2}{b^2+c^2}$$

$$CA_2 = BA_1 = \frac{ac^2}{b^2+c^2}$$

so hat die Normale von A_2 auf AC die Länge:

$$CA_2 \sin\gamma = \frac{2F}{bc(b^2+c^2)} \cdot c^3.$$

Es ist also:

$$A_2 \equiv 0, \quad c^3, \quad b^3$$

Die AA_2 schneiden sich also im Punkte b^3c^3. Obwol dieser Punkt von der sechsten Dimension ist, so werden doch einige niederer Dimension von ihm abgeleitet. So ist z. B. a^3 die Harmonikale dieses Punktes, sie trifft die Harmonikale von J in:

$$b^3 - c^3 \equiv P_{36}$$

und die Harmonikale von G in:

$$a(b^4 - c^4) \equiv P_{37}$$

Der Umkreispol der a^3 ist:

$$a(b^4 + c^4 - a^4) \equiv P_{38}$$

Die Verbindungsgerade der Punkte b^3c^3 und b^2c^2 (III) ist $a^3(b-c)$, sie trifft die Harmonikale von J in:

$$b^3c + bc^3 - ab^3 - ac^3 \equiv P_{39}$$

Dieselbe Gerade trifft die $b-c$ in:

$$\begin{vmatrix} b^3(c-a), & c-a) \\ c^3(a-b), & a-b) \end{vmatrix} \equiv b^2 + bc + c^2 \equiv P_{40}$$

und die $b^2 - c^2$ in:

$$\begin{vmatrix} b^3(c-a), & c^2-a^2 \\ c^3(a-b), & a^2-b^2 \end{vmatrix} \equiv ab^2 + ac^2 + bc^2 + b^2c + b^3 + c^3 + abc \equiv P_{41}$$

VIII.

Die Gerade $b-c$ enthält alle Symmetriepunkte erster Dimension. Ihr harmonischer Pol ist:

$$(a-b)(a-c) \equiv P_{42}$$

und ihr Umkreispol:

$$a^2(b-c) \equiv P_{43}$$

Die Gerade $P_{43}J$ ist von der Form:

$$\begin{vmatrix} b^2(c-a), & 1 \\ c^2(a-b), & 1 \end{vmatrix} \equiv b^2c + bc^2 - ab^2 - ac^2$$

Sie trifft die Harmonikale von J in:

$$\begin{vmatrix} c^2a+ca^2-bc^2-ba^2, & 1 \\ a^2b+ab^2-ca^2-cb^2, & 1 \end{vmatrix} \equiv (b-c)(2a^2+ab+ac-bc) \equiv P_{44}$$

Die $b-c$ trifft die Harmonikale von J in:

$$b+c-2a \equiv P_{45}$$

und die $P_1J \equiv b^2-c^2$ (II) in:

$$\begin{vmatrix} c^2-a^2, & c-a \\ a^2-b^2, & a-b \end{vmatrix} \equiv (a-b)(a-c)(b+c-2a) \equiv P_{46}$$

Die $b-c$ trifft die Umkreispolare von J in:

$$\begin{vmatrix} c-a, & c+a \\ a-b, & a+b \end{vmatrix} \equiv bc-a^2 \equiv P_{47}$$

Die Harmonikale von P_{47} ist die Gerade: $(ab-c)(ac-b^2)$, sie schneidet die Harmonikale von J in:

$$\begin{vmatrix} (bc-a^2)(ba-c^2), & 1 \\ (ca-b^2)(cb-a^2), & 1 \end{vmatrix} \equiv (b-c)(bc-a^2) \equiv P_{48}$$

Mit der Harmonikale des Grebe'schen Punktes bildet die $b-c$ den Punkt:

$$\begin{vmatrix} ca, & c-a \\ ab, & a-b \end{vmatrix} \equiv a(ab+ac-2bc) \equiv P_{49}$$

Die Harmonikale von $P_{45} \equiv b+c-2a$ ist die Gerade $(c+a-2b)$ $(a+b-2c)$; ihr Durchschnitt mit der Harmonikalen von J ist:

$$\begin{vmatrix} (a+b-2c)(b+c-2a), & 1 \\ (b+c-2a)(c+a-2b), & 1 \end{vmatrix} \equiv (b-c)(b+c-2a) \equiv P_{50}$$

IX.

Eine der einfachsten Formen der Symmetriepunkte zweiter Dimension hat der Schwerpunkt $S \equiv bc$. Seine Umkreispolare ist die Gerade $a(b^2+c^2)$, sie trifft die Harmonikale von G in:

$$\begin{vmatrix} b(c^2+a^2), & ca \\ c(a^2+b^2), & ab \end{vmatrix} \equiv a^3(b^2-c^2) \equiv P_{51}$$

Die SJ ist die Gerade $a(b-c)$, ihr harmonischer Pol ist:

$$bc(a-b)(a-c) \equiv P_{52}$$

und ihr Umkreispol:

$$a(b-c)(a^2+ab+ac-bc) \equiv P_{53}$$

Dieselbe Gerade $a(b-c)$ schneidet die $b+c$ in:

$$\begin{vmatrix} b(c-a), & c+a \\ c(a-b), & a+b \end{vmatrix} \equiv 2abc-a^2b-a^2c-ab^2-ac^2+b^2c+bc^2 \equiv P_{54}$$

und die Harmonikale von J in:

$$\begin{vmatrix} b(c-a), & 1 \\ c(a-b), & 1 \end{vmatrix} \equiv ab+ac-2bc \equiv P_{55}$$

Wird das Inkreiscentrum J mit den Ecken A verbunden, so entstehen die Dreiecke BJC, deren Schwerpunkte S_a seien. Es ist dann, wenn:

$$\varrho = \frac{2F}{a+b+c}, \quad h_a = \frac{2F}{a}$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} J &\equiv \varrho, \quad \varrho, \quad \varrho \\ B &\equiv 0, \quad h_b, \quad 0 \\ C &\equiv 0, \quad 0, \quad h_c \\ S_a &\equiv \varrho, \quad \varrho+h_b, \quad \varrho+h_c \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt des Dreiecks $S_a S_b S_c$ ist dann:

$$3\varrho+2h_a = bc(5a+2b+2c) \equiv P_{56}$$

Wird in dieser Construction G statt J gesetzt, so sind die dreifachen Seitennormalen des Schwerpunktes S_a des Dreiecks BGC:

$$\frac{2aF}{\Sigma a^2}, \quad \frac{2bF}{\Sigma a^2}+\frac{2F}{b}, \quad \frac{2cF}{\Sigma a^2}+\frac{2F}{c}$$

Der Schwerpunkt dieses Dreiecks $S_a S_b S_c$ ist:

$$bc(5a^2+2b^2+2c^2) \equiv P_{57}$$

Dieselbe Construction allgemein für den Punkt P, dessen Seitennormalen p_a sind, ausgeführt, gibt:

$$\begin{aligned} P &\equiv p_a, \quad p_b, \quad p_c \\ B &\equiv 0, \quad h_a, \quad 0 \\ C &\equiv 0, \quad 0, \quad h_c \\ S_a &\equiv p_a, \quad p_b+h_b, \quad p_c+h_c \\ S' &\equiv 3p_a+2h_a \end{aligned}$$

So erhält man z. B. für $P \equiv b^2c^2 \equiv P_9$ (III.)

$$p_a = \frac{2F.b^2c^2}{\Sigma ab^2c^2} = \frac{2F}{a} \cdot \frac{bc}{\Sigma ab}$$

$$3p_a+2h_a \equiv bc(5bc+2ab+2ac) \equiv P_{58}$$

Ferner für $P \equiv bc - a^2 \equiv P_{47}$ (VIII.)

$$p_a = \frac{2F(bc-a^2)}{\Sigma a(bc-a^2)} = \frac{2F(bc-a^2)}{3abc - \Sigma a^3}$$

$$3p_a + 2h_a \equiv bc(9abc - 5a^3 - 2b^3 - 2c^3) \equiv P_{59}$$

Wird $P_{57} \equiv bc(5a^2 + 2b^2 + 2c^2)$ mit S verbunden, so entsteht die Gerade $a(b^2-c^2)$; sie trifft die Harmonikale von J in:

$$\begin{vmatrix} b(c^2-a^2), & 1 \\ c(a^2-b^2), & 1 \end{vmatrix} \equiv (b+c)(bc-a^2) \equiv P_{60}$$

Trifft die Normale von S auf BC diese in A_2, so ist:

$$BA_2 = \frac{3a^2+c^2-b^2}{6a}, \quad CA_2 = \frac{3a^2+b^2-c^2}{6a}$$

Die Seitennormalen von A_2 sind:

$$0, \quad \frac{3a^2+b^2-c^2}{6a} \cdot \frac{2F}{ab}, \quad \frac{3a^2+c^2-b^2}{6a} \cdot \frac{2F}{ac}$$

Der Schwerpunkt des Dreiecks $A_2 B_2 C_2$ ist:

$$\frac{3b^2+a^2-c^2}{b^2a} + \frac{3c^2+a^2-b^2}{c^2a} \equiv a(6b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 - b^4 - c^4) \equiv P_{61}$$

X.

Eine der einfachsten Formen unter den Symmetriepunkten dritter Dimension ist: $bc(b+c)$; dieser Punkt ist das Inkreiscentrum des Mittendreiecks und wurde zuerst von Spieker untersucht. Es sei nun $k \equiv bc(b+c)$; wird k mit dem Punkt $b+c \equiv P_{20}$ (V.) verbunden, so ist $a(b-c)(a+b)(a+c)$ die Form dieser Verbindungsgeraden; ihr harmonischer Pol ist:

$$bc(a-b)(a-c)(b+c) \equiv P_{62}$$

Die Harmonikale von k ist die Gerade $a(a+b)(a+c)$; sie trifft die $P_{20}k \equiv a(b-c)(a+b)(a+c)$ in:

$$\begin{vmatrix} b(b+c)(b+a), & b(c-a)(b+c)(b+a) \\ c(c+a)(c+b), & c(a-b)(c+a)(c+b) \end{vmatrix} \equiv bc(b+c)(b+c-2a) \equiv P_{63}$$

AK trifft BC in A_1, dann sind die Coordinaten von A_1: 0, $ac(a+c)$, $ab(a+b)$ und die Seitennormalen:

$$0, \quad \frac{2ac(a+c)F}{abc(2a+b+c)}, \quad \frac{2ab(a+b)F}{abc(2a+b+c)}$$

Der Schwerpunkt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ ist:

$$\frac{bc(b+c)}{2b+c+a}+\frac{bc(b+c)}{2c+a+b}\equiv bc(b+c)(2a+b+c)(2a+3b+3c)\equiv P_{64}$$

Ferner ist:

$$BA_1=\frac{a(a+b)}{2a+b+c},\quad CA_1=\frac{a(a+c)}{2a+b+c}$$

Vertauschen wir BA_1 mit CA_1, so erhalten wir auf BC den Punkt A_2, so dass:

$$BA_2=\frac{a(a+c)}{2a+b+c},\quad CA_2=\frac{a(a+b)}{2a+b+c}$$

Die Normale von A_2 auf AC hat die Länge:

$$CA_2\sin\gamma=\frac{a(a+b)}{2a+b+c}\,\frac{2F}{ab}=\frac{2F}{bc(2a+b+c)}\cdot c(a+b)$$

Somit ist:

$$A_2\equiv 0,\quad c(a+b),\quad b(a+c)$$

oder:

$$A_2\equiv 0,\quad ac(a+b)(b+c),\quad ab(a+c)(b+c)$$

Die AA_2 treffen sich in:

$$bc(a+b)(a+c)\equiv P_{65}$$

Die Harmonikale dieses Punktes ist $a(b+c)$; sie trifft die $b-c$ in:

$$\begin{vmatrix} b(c+a), & c-a \\ c(a+b), & a-b \end{vmatrix}\equiv 2abc+a^2b+a^2c-ab^2-ac^2-bc^2-b^2c\equiv P_{66}$$

XI.

Das Umkreiscentrum hat die Coordinaten:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\equiv a(b^2+c^2-a^2)\equiv U$$

Man findet:

$$UG\equiv\begin{vmatrix} b(c^2+a^2-b^2), & b \\ c(a^2+b^2-c^2), & c \end{vmatrix}\equiv bc(b^2-c^2)$$

Der harmonische Pol von UG ist:

$$a(a^2-b^2)(a^2-c^2)\equiv P_{67}$$

UG trifft die Umkreispolare von G in:

$$\begin{vmatrix} ca(c^2-a^2), & ca \\ ab(a^2-b^2), & ab \end{vmatrix}\equiv a(b^2+c^2-2a^2)\equiv P_{68}$$

ferner die Gerade $b^2-c^2 \equiv P_1 J$ (II) in:

$$\begin{vmatrix} ca(c^2-a^2), & c^2-a^2 \\ ab(a^2-b^2), & a^2-b^2 \end{vmatrix} \equiv a(a+b)(a+c) \equiv P_{69}$$

und die Harmonikale von J in:

$$\begin{vmatrix} ca(c^2-a^2), & 1 \\ ab(a^2-b^2), & 1 \end{vmatrix} \equiv a(b+c)(b^2+c^2-a^2-bc) \equiv P_{70}$$

Die Harmonikale von U ist die Gerade $bc(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)$; ihr Umkreispol ist:

$$a(2a^2b^2+2a^2c^2-2b^2c^2+b^4+c^4-3a^4) \equiv P_{71}$$

Dieselbe Gerade trifft die Harmonikale von G in:

$$\begin{vmatrix} ca(b^2+c^2-a^2)(b^2+a^2-c^2), & ca \\ ab(c^2+a^2-b^2)(c^2+b^2-a^2), & ab \end{vmatrix} \equiv a(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2) \equiv P_{72}$$

XII.

Treffen die äusseren Berührungskreise des Fundamentaldreiecks die BC in A_1, so ist:

$$BA_1 = \frac{a+b-c}{2}, \quad CA_1 = \frac{a+c-b}{2}$$

$$A_1 \equiv 0, \quad \frac{(a+c-b)F}{ab}, \quad \frac{(a+b-c)F}{ac}$$

Die AA_1 treffen sich im Punkt $bc(b+c-a)$. Der Schwerpunkt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ ist:

$$\frac{b+c-a}{ba} + \frac{c+b-a}{ca} \equiv (b+c)(b+c-a) \equiv P_{73}$$

Wird dieser Punkt mit $(b-c)(b+c-a) \equiv P_{23}$ (V.) verbunden, so folgt:

$$P_{23}P_{73} \equiv \begin{vmatrix} (c+a)(c+a-b), & (c-a)(c+a-b) \\ (a+b)(a+b-c), & (a-b)(a+b-c) \end{vmatrix}$$
$$\equiv (a+b-c)(a+c-b)(a^2-bc)$$

Der harmonische Pol dieser Geraden ist:

$$(b+c-a)(b^2-ac)(c^2-ab) \equiv P_{74}$$

Vertauschen wir BA_1 mit CA_1, so dass:

$$BA_2 = \frac{a+c-b}{2}, \quad CA_2 = \frac{a+b-c}{2}$$

$\cos\beta\,\cos\gamma$. Sind A_1 die Höhenfusspunkte, so ... von $A_1: 0,\ h_a \cos\gamma,\ h_a \cos\beta$. Der Schwerpu... dreiecks ist also:

$$h_a \cos\gamma + h_c \cos\beta \equiv a(a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c \ldots$$

Die Harmonikale des Höhenpunktes ist die ... $c^2 - a^2$), sie trifft die Harmonikale von J in $(b$-...

Ist H_a die Mitte von AA_1, so sind die Se...

$$\frac{F}{a},\quad \frac{F}{a}\cos\gamma,\quad \frac{F}{a}\cos\beta$$

Der Schwerpunkt des Dreiecks $H_a H_b H_c$ ist:

$$\frac{1}{a} + \frac{\cos\gamma}{b} + \frac{\cos\beta}{c} \equiv a(a^2b^2 + a^2c^2 + 4b^2c^2 - \ldots$$

Wenn wir die Höhen über A_1 um a' bis A_2 ... die Seitennormalen von $A_2: -a',\ (a' + h_a)\cos\gamma$, ... Schwerpunkt S' des Dreiecks $A_2B_2C_2$ ist: − ... $(c' + h_c)\cos\beta$. Für $a' = \varrho - h_a$ wird:

$$S' \equiv a(b+c)(4bc + a^2 - b^2 - c^2) \equiv \ldots$$

Für $a' = a - h_a$ erhalten wir in S' den Schwe... mentaldreiecks.

XIV.

Sind A_1 die Ecken des Höhenfusspunktdreieck... $c\cos\beta$, $CA_1 = b\cos\gamma$. Vertauschen ...

Es ist:

$$UP_{80} \equiv \begin{vmatrix} \cos\beta, & (c^2+a^2)\cos\beta \\ \cos\gamma, & (a^2+b^2)\cos\gamma \end{vmatrix} \equiv (b^2-c^2)\cos\beta\cos\gamma$$

Diese Gerade trifft die Harmonikale von U in:

$$\begin{vmatrix} (c^2-a^2)\cos\gamma\cos\alpha, & \cos\gamma\cos\alpha \\ (a^2-b^2)\cos\alpha\cos\beta, & \cos\alpha\cos\beta \end{vmatrix} \equiv a(b^2+c^2-a^2)(b^2+c^2-2a^2) \equiv P_{81}$$

XV.

Ist P ein Symmetriepunkt des Fundamentaldreiecks, p_a seine Normale auf BC und ist P' derselbe Symmetriepunkt für das Mitteldreieck des Fundamentaldreiecks, p_a' die Normale von P' auf BC; so findet man aus der Figur:

$$p_a' = \frac{h_a - p_a}{2}$$

Setzen wir $p_a = a$, d. h. bestimmen wir den Grebe'schen Punkt des Mittendreiecks, so ist dieser:

$$\frac{1}{a} - \frac{a}{\Sigma a^2} \equiv bc(b^2+c^2) \equiv P_{82}$$

Die Harmonikale dieses Punktes $a(a^2+b^2)(a^2+c^2)$ bildet mit der Harmonikalen von J den Punkt:

$$\begin{vmatrix} b(b^2+a^2)(b^2+c^2), & 1 \\ c(c^2+a^2)(c^2+b^2), & 1 \end{vmatrix} \equiv (b^2+b^2)(b^3-c^3+a^2b-a^2c) \equiv P_{83}$$

Die Seitennormalen von $P_{82} \equiv bc(b^2+c^2)$ sind:

$$\frac{2bc(b^2+c^2)F}{\Sigma abc(b^2+c^2)} = \frac{2F.(b^2+c^2)}{2a\Sigma a^2}$$

Setzen wir also:

$$p_a = 2F\frac{b^2+c^2}{2a\Sigma a^2}$$

und bestimmen den Punkt P_{82} des Mittendreiecks, so ist dieser:

$$P_{82}' \equiv \frac{1}{a} - \frac{b^2+c^2}{2a\Sigma a^2} \equiv bc(2a^2+b^2+c^2) \equiv P_{84}$$

Ebenso erhalten wir:

$$P_{84}' \equiv \frac{1}{a} - \frac{2a^2+b^2+c^2}{4a\Sigma a^2} \equiv bc(2a^2+3b^2+3c^2) \equiv P_{85}$$

u. s. w.

Die Seitennormalen von $b+c \equiv P_{20}$ (V.) sind:

$$\frac{2(b+c)F}{\Sigma a(b+c)} = \frac{2(b+c)F}{2\Sigma ab}$$

also ist:

$$P_{20}' \equiv \frac{1}{a} - \frac{b+c}{2\Sigma ab} \equiv bc(ab+ac+2bc) \equiv P_{86}$$

XVI.

Sind P, P' Symmetriepunkte, so ist der Halbirungspunkt, wie jeder Teilpunkt der Strecke PP' ein Symmetriepunkt. So ist z. B. der Halbirungspunkt der Strecke zwischen dem Inkreiscentrum und Schwerpunkt:

$$\frac{F}{a+b+c} + \frac{F}{3a} \equiv bc(4a+b+c) \equiv P_{87}$$

Ebenso sind die Mitten von G und J, K und J:

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{a}{\Sigma a^2} \equiv (2a^2+b^2+c^2+ab+ac)) \equiv P_{88}$$

$$\varrho + \frac{\varrho}{2} \cdot \frac{b+c}{a} \equiv bc(2a+b+c) \equiv P_{89}$$

Die Seitennormalen von $b+c \equiv P_{20}$ (V.) sind:

$$\frac{2(b+c)F}{2\Sigma ab}$$

Die Mitte von P_{20} und J ist hiermit:

$$3ab+3ac+4bc+b^2+c^2 \equiv P_{90}$$

Ebenso sind die Mitten von $P_{20}S$ und $P_{20}G$:

$$bc(5ab+5ac+2bc) \equiv P_{91}$$

$$(b+c)(3a^2+b^2+c^2)+2abc \equiv P_{92}$$

Die Seitennormalen von $b^2c^2 \equiv P_9$ (III) sind:

$$\frac{2b^2c^2F}{\Sigma ab^2c^2} = 2F \cdot \frac{bc}{a\Sigma ab}$$

Somit ist die Mitte von P_9 und S:

$$\frac{1}{3a} + \frac{bc}{a\Sigma ab} \equiv bc(ab+ac+4bc) \equiv P_{93}$$

XVII.

Verlängert man die Höhe von A auf BC über ihren Schnittpunkt A_1 mit dieser Seite bis A_2, so dass $A_1A_2 = a'$ und zieht man durch A_2 zu BC eine Parallele; so bilden diese Normalen auf die Höhen ein Dreieck, das dem Urdreieck ähnlich ist. Wenn die Normalen in B_2 und C_2 auf BB_1 und CC_1 sich in A_3 schneiden; so ist, wie aus der Figur unmittelbar erkannt wird,

$$\xi_b = -b', \quad \xi_c = -c'$$

wenn $\xi_a \xi_b \xi_c$ die Seitennormalen von A_3 bezeichnen. Es ist also:

$$A \equiv 1, \quad 0, \quad 0$$
$$A_3 \equiv \xi_a, \quad -b', \quad -c'$$
$$AA_3 \equiv c'x_b - b'x_c$$

Die AA_3 schneiden sich im Punkte a'. Dieser Punkt ist somit der Homologiepunkt der Dreiecke ABC, $A_3B_3C_3$.

Für $a' = b + c - a$ erhalten wir:

$$b + c - a \equiv P_{94}$$

Setzen wir

$$a' = \varrho_a = \frac{2F}{b + c - a}$$

so ist:

$$(a + b - c)(a + c - b) \equiv P_{95}$$

Sind ξ_a die Coordinaten, p_a die Seitennormalen des Punktes P; so ist:

$$p_a = \frac{2\xi_a F}{\Sigma a \xi_a}$$

Setzt man $a' = p_b + p_c$, so erhält man den Symmetriepunkt:

$$\frac{2\xi_b F}{\Sigma a \xi_a} + \frac{2\xi_c F}{\Sigma a \xi_a} \equiv \xi_b + \xi_c$$

So bekommen wir aus $b^2c^2 \equiv P_9$ (III.):

$$a^2(b^2 + c^2) \equiv P_{96}$$

aus $S \equiv bc$:

$$a(b + c) \equiv P_{97}$$

Setzen wir $a' = p_b + p_c - p_a$, so erhalten wir aus $b^2c^2 \equiv P_9$:

$$a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2 \equiv P_{98}$$

aus $S \equiv bc$:

$$ab + ac - bc \equiv P_{99}$$

Für $a' = \frac{p\ p_c}{p_b + p_c}$ bekömmt man den Symmetriepunkt:

$$\frac{\xi_b \xi_c}{\xi_b + \xi_c} \equiv \xi_b \xi_c (\xi_a + \xi_b)(\xi_a + \xi_c)$$

Ist $\xi_a = b^2 c^2$, so erhalten wir:

$$(a^2 + b^2)(a^2 + c^2) \equiv P_{100}$$

Schliesslich sei noch bemerkt, dass durch diese Construction mittelst der Höhen des Dreiecks alle Symmetriepunkte erster Dimension erhalten werden, indem man $a = \varphi a + \psi b + \psi c + m$ setzt, wo φ, ψ numerische Constanten und m eine von a, b, c unabhängige gegebene Strecke bezeichnet.

XVIII.

Aus dem Vorhergehenden erhellt, dass die Anzahl der so gebildeten Symmetriepunkte sich leicht vermehren liesse. Im Nachstehenden sind die Symmetriepunkte, deren Construction hier angegeben worden ist, nach ihrer Dimension geordnet. Die arabischen Ziffern bedeuten die Nummer des Punktes, die römischen den Paragraph, in welchem die Construction dieses Punktes angegeben.

Punkte erster Dimension:

$b + c$	$\equiv$ V. 20
$b + c - 2a$	$\equiv$ VIII. 45
$b + c - a$	$\equiv$ XVII. 94

Punkte zweiter Dimension:

$(b+c)(2a+b+c)$	$\equiv$ II. 1
$(a+b)(a+c)$	$\equiv$ II. 4
$ab + ac + 2bc - b^2 - c^2$	$\equiv$ II. 6
$a(b+c-a)$	$\equiv$ IV. 14
$b^2 + c^2 - 2a^2 + ab + ac - 2bc$	$\equiv$ IV. 15
$b^2 - c^2$	$\equiv$ IV. 17
$b^2 + c^2 - 2a^2$	$\equiv$ IV. 18
$(b-c)(b+c-a)$	$\equiv$ V. 23
$a(b-c)$	$\equiv$ VI. 28
$a(b+c-2a)$	$\equiv$ VI. 31
$b^2 + bc + c^2$	$\equiv$ VII. 40
$(a-b)(a-c)$	$\equiv$ VIII. 42

$bc-a^2$	$\equiv$ VIII. 47
$(b-c)(b+c-2a)$	$\equiv$ VIII. 50
$ab+ac-2bc$	$\equiv$ IX. 55
$(b+c)(b+c-2a)$	$\equiv$ XII. 73
$2a^2+b^2+c^2+ab+ac$	$\equiv$ XVI. 88
$3ab+3ac+4bc+b^2+c^2$	$\equiv$ XVI. 90
$(a+b-c)(a+c-b)$	$\equiv$ XVII. 95
$a(b+c)$	$\equiv$ XVII. 97
$ab+ac-bc$	$\equiv$ XVII. 99

Punkte dritter Dimension:

$(a+b)(a+c)(b+c-2a)$	$\equiv$ II. 5
$a(a^2-b^2-c^2+bc)$	$\equiv$ II. 8
$ab^2-ac^2+b^3-c^3$	$\equiv$ III. 11
$(b^2-c^2)(2a+b+c)$	$\equiv$ V. 21
$a(a+b-2c)(a+c-2b)$	$\equiv$ VI. 30
$a(a-b)(a-c)$	$\equiv$ VI. 32
$a(b^2+c^2-ab-ac)$	$\equiv$ VI. 33
b^3-c^3	$\equiv$ VII. 36
$ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+b^3+c^3+abc$	$\equiv$ VII. 41
$a^2(b-c)$	$\equiv$ VIII. 43
$(b-c)(2a^2+ab+ac-bc)$	$\equiv$ VIII. 44
$(a-b)(a-c)(b+c-2a)$	$\equiv$ VIII. 46
$(b-c)(bc-a^2)$	$\equiv$ VIII. 48
$a(ab+ac-2bc)$	$\equiv$ VIII. 49
$2abc-a^2b-a^2c-ab^2-ac^2+b^2c+bc^2$	$\equiv$ IX. 54
$bc(5a+2b+2c)$	$\equiv$ IX. 56
$(b+c)(bc-a^2)$	$\equiv$ IX. 60
$2abc+a^2b+a^2c-ab^2-ac^2-bc^2-b^2c$	$\equiv$ X. 66
$a(b^2+c^2-2a^2)$	$\equiv$ XI. 68
$a(a+b)(a+c)$	$\equiv$ XI. 69
$bc(4a+b+c)$	$\equiv$ XVI. 87
$bc(2a+b+c)$	$\equiv$ XVI. 89
$(b+c)(3a^2+b^2+c^2)+2abc$	$\equiv$ XVI. 92

Punkte vierter Dimension:

$(a^2-b^2)(a^2-c^2)$	$\equiv$ II. 2
$a(b-c)(a+b)(a+c)$	$\equiv$ II. 3

$a^2b^2 + a^2c^2 - 2b^2c^2$

$(bc + ba - 2ca)(ca + cb - 2ab)$

$bc(4a^2 + b^2 + c^2)$

$b^3c + bc^3 - ab^3 - ac^3$

$bc(a - b)(a - c)$

$a(b - c)(a^2 + ab + ac - bc)$

$bc(5a^2 + 2b^2 + 2c^2)$

$bc(5bc + 2ab + 2ac)$

$bc(b + c)(b + c - 2a)$

$bc(a + b)(a + c)$

$a(b + c)(b^2 + c^2 - a^2 - bc)$

$bc(a + b - c)(a + c - b)$

$a(b + c)(4bc + a^2 - b^2 - c^2)$

$bc(b^2 + c^2 - a^2)$

$bc(b^2 + c^2)$

$bc(2a^2 + b^2 + c^2)$

$bc(2a^2 + 3b^2 + 3c^2)$

$bc(ab + ac + 2bc)$

$bc(5ab + 5ac + 2bc)$

$bc(ab + ac + 4bc)$

$a^2(b^2 + c^2)$

$a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2$

$(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)$

$a(b^4-c^4)$	$\equiv$ VII. 37
$a(b^4+c^4-a^4)$	$\equiv$ VII. 38
$a^3(b^2-c^2)$	$\equiv$ IX. 51
$bc(9abc-5a^3-2b^3-2c^3)$	$\equiv$ IX. 59
$a(6b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2-b^4-c^4)$	$\equiv$ IX. 61
$bc(a-b)(a-c)(b+c)$	$\equiv$ X. 62
$bc(b+c)(2a+b+c)(2a+3b+3c)$	$\equiv$ X. 64
$a(a^2-b^2)(a^2-c^2)$	$\equiv$ XI. 67
$a(2a^2b^2+2a^2c^2-2b^2c^2+b^4+c^4-3a^4)$	$\equiv$ XI. 71
$a(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)$	$\equiv$ XI. 72
$(b+c-a)(b^2-ac)(c^2-ab)$	$\equiv$ XII. 74
$a(a^2b^2+a^2c^2+2b^2c^2-b^4-c^4)$	$\equiv$ XIII. 76
$a(a^2b^2+a^2c^2+4b^2c^2-b^4-c^4)$	$\equiv$ XIII. 77
$a(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)$	$\equiv$ XIV. 80
$a(b^2+c^2-a^2)(b^2+c^2-2a^2)$	$\equiv$ XIV. 81
$(b^2+c^2)(b^3-c^3+a^2b-a^2c)$	$\equiv$ XV. 83

Wien, Juni 1875.

XXXVI.

Die Fundamental-Gleichungen der nicht-euklidischen Trigonometrie auf elementarem Wege abgeleitet.

Von

Herrn Dr. *Moritz Réthy*,

Professor an der Universität Klausenburg.

---

1. Die Definitionen, Axiome und Postulate, welche der nicht-euklidischen Geometrie (in einem homogenen Raume von drei Dimensionen) zu Grunde liegen, sind von dreien derselben abgesehen identisch mit denjenigen, auf welche die euklidische aufgebaut ist. Die Definition, das Axiom und Postulat, deren Gültigkeit dahin gestellt gelassen wird, sind bekanntlich der Begriff des Parallelismus, das Parallelen-Axiom und das Postulat von der Geraden; und zwar sieht man von den ersten beiden vollständig ab und formulirt das Postulat von der Geraden auf die Weise, dass wenigstens durch zwei solche Punkte, deren Abstand kleiner ist als eine gegebene Grösse, nur eine Gerade möglich sei.

2. Wir wollen uns einen Raumteil von der Eigenschaft abgrenzen, dass durch je zwei Punkte desselben nur eine Gerade möglich sei. Innerhalb eines solchen Raumteils werden vor Allem folgende Sätze gelten:

I. Der Satz von der Gleichheit von Scheitelwinkeln.

II. Die Sätze von der Congruenz ebener geradliniger Dreiecke.

III. Wenn die Bögen $\widehat{AB}$ und $\widehat{AC}$ eines Kreises ebenso grossen Centriwinkeln entsprechen, als die Bögen $\widehat{A'B'}$ und $\widehat{A'C'}$ eines andern Kreises, dann hat man

$$\widehat{AB} : \widehat{AC} = \widehat{A'B'} : \widehat{A'C'}$$

IV. Die Sätze von der Geraden, die auf zwei sich schneidenden Geraden senkrecht steht, und die Umkehrungen derselben.

V. Wenn zwei Gerade auf derselben Ebene senkrecht stehen, so liegen sie in einer Ebene.

Wir haben diese Sätze angeführt, weil die spätern sich auf dieselben stützen; die Beweise dürfen wir wol übergehen.

3. Wir wollen uns im folgenden die Aufgabe stellen, die trigonometrischen Fundamental-Gleichungen für rechtwinklige geradlinige Dreiecke abzuleiten, die innerhalb eines Raumteils von der Eigenschaft liegen, dass ein beliebiges innerhalb des Raumteils gelegenes geradliniges Dreieck höchstens einen rechten Winkel besitzt. Wir nehmen uns vor diese Aufgabe zu lösen ohne den Raumteil zu verlassen, und setzen demgemäss ein für allemal fest, dass all unsere Constructionen im folgenden sich auf einen Raumteil von der soeben ausgesprochenen Eigenschaft beschränken. Die Existenz eines solchen Raumteils folgt daraus, dass widrigenfalls das Postulat von der Geraden selbst in der modificirten Form (1) nicht bestehen könnte.

§ 1.

Form der Fundamental-Gleichungen.

1. Es sei AOB irgend ein Winkel; wir errichten aus den Punkten A' und A'' des einen Schenkels OA die Geraden $\overline{A'B'}$ und $\overline{A''B''}$ senkrecht auf den andern Schenkel OB (resp. dessen Verlängerung). Man denke sich dann, dass die entstandene Figur um OB als Axe eine volle Umdrehung ausführt: dabei beschreibt OA eine Kegelfläche, die Geraden $B'A'$ und $B''A''$ beschreiben Ebenen, die Punkte A' und A'' Kreise. Bezeichnen wir dann die Peripherie eines Kreises vom Radius r mit or, so besteht der Satz:

$$o\overline{B'A'} : o\overline{OA'} = o\overline{B''A''} : o\overline{OA''}$$

Der Satz reducirt sich nemlich, mittelst Abwickelung der durch OA beschriebenen Kegelfläche auf eine Ebene, auf den Satz III.

Der Lehrsatz erlaubt uns obiges Verhältniss als Function des Winkels $AOB = \alpha^0$ aufzufassen. Bezeichnen wir diese Function mit $f(\alpha)$, so haben wir für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten abc und den gegenüberliegenden Winkeln $A^0 B^0 90^0$, die Relationen:

$$\text{VI.} \qquad oa : ob : oc = f(A) : f(B) : 1$$

2. Es sei $BB'B''$ eine Linie, deren Punkte in gleicher Entfernung liegen von der Geraden $AA'A''$; die Punkte A, A', A'' seien

Geraden $AA'A''$ aufzufassen. Bezeich
$\varphi(a)$, so haben wir also:

VIIa. $$\widehat{BB'}:\overline{AA'}=\varphi$$

3. Es sei BB' eine Linie gleichen
raden AA' und $\overline{AA'}$ geradezu die Proje
BC senkrecht auf $A'B'$. Denkt man sich
eine volle Umdrehung um $A'B'$ als Axe

VIIb. $$o\overline{BC}:o\overline{AA'}=\varphi($$

Dieser Satz wird nemlich, mittelst Abwic
schriebenen Cylinderfläche auf eine Ebene
cirt. (Die Abwickelbarkeit selbst folgt dar
auf derselben Ebene senkrecht stehen, mithi
Ebene liegen).

5. Man ziehe die Diagonale BA' des
Dann bestehen nach VI. die Gleichungen:

$$o\overline{BC}=o\overline{BA'}f(BA'C$$
$$o\overline{AA'}=o\overline{BA'}f(ABA'$$

daher durch Division:

$$o\overline{BC}:o\overline{AA'}=f(BA'C):f(A$$

folglich mit Berücksichtigung von VIIb.:

$$f(BA'C):f(ABA')=\varphi(a$$

Wir haben daher für ein beliebiges rechtwink
stens innerhalb des begr

§ 2.

Die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$.

1. Die Function $f(x)$ bestimmt sich durch Uebergang auf unendlich kleine Dreiecke, indem man der Reihe nach folgende Sätze beweist:

a) Innerhalb des abgegrenzten Raumteils ist die Hypotenuse eines jeden rechtwinkligen Dreiecks grösser als die Kathete.

b) Es muss für genügend kleine Werte von r die Reihe gelten:
$$or = a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \ldots$$
wo $a_1 a_2 a_3 \ldots$ Constanten bedeuten und zwar $a_1 > 4$ ist.

c) Ist c die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, ferner a eine Kathete desselben und A der gegenüberliegende Winkel, so ist für unendlich abnehmendes c
$$f(A) = \lim \frac{a}{c}$$

d) Die Winkelsumme eines geradlinigen Dreiecks convergirt gegen 180°, wenn die 3 Ecken sich unendlich nähern.

e) Bezeichnet man die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks mit abc, die gegenüberliegenden Winkel mit $A^0 B^0 90^0$, so hat man für verschwindendes c
$$\lim \left[\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2\right] = 1$$

f) Besteht zwischen 3 Winkeln die Relation:
$$CAB' = CAB + BAB'$$
construirt man ferner

CB senkrecht auf AB; BB' senkrecht auf AB'

CC' senkrecht auf AB'; BD senkrecht auf CC'

so hat man für verschwindendes AC:
$$\lim \frac{CC'}{AC} = \lim \frac{CD}{BC} \lim \frac{BC}{AC} + \lim \frac{BB'}{AB} \lim \frac{AB}{AC}$$

Der Satz a) besteht, da sonst innerhalb des abgegrenzten Raumes ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln sein müsste, gegen Voraussetzung. Die übrigen Sätze ergeben sich dann der Reihe nach fast von selbst.

Die Sätze c), d), e) und f) sprechen aber aus, dass $f(x)$ den beiden Functional-Gleichungen genügt:

$$[f(x^0)]^2 + [f(90^0 - x^0)]^2 = 1$$
$$f(x^0 + y^0) = f(x^0) f(90^0 - y^0) + f(y^0) f(90^0 - x^0)$$

woraus folgt, dass

$$f(x^0) = \sin(hx^0)$$

wo h eine Constante bedeutet.

Die Constante h bestimmt sich endlich aus der Reihenentwickelung für $\arcsin f(x^0)$ und daraus, dass $f(90^0) = 1$. In Folge davon ist nemlich

$$h.90^0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{also} \quad h = \frac{\pi}{180^0}$$

2. Bezeichnen wir nach alledem $hx^0 = \pi \frac{x^0}{180^0} = \xi$, so hat man für ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten abc und gegenüberliegende Winkel $\alpha \beta \frac{\pi}{2}$ sind (immer noch innerhalb des abgegrenzten Raumes):

VIII. $$oa : ob : oc = \sin\alpha : \sin\beta : 1$$

IX. $$\cos\alpha : \sin\beta = \varphi(a)$$
$$\cos\beta : \sin\alpha = \varphi(b)$$

3. Zur Bestimmung von $\varphi(x)$ beweisen wir die folgenden zwei Hülfssätze:

1. Hülfssatz. Für einen Kreis vom Radius r ist

$$or = C\sqrt{1 - [\varphi(r)]^2}$$

wo C eine Constante bedeutet.

Sind nemlich a, b, c die Seiten, α, β, $\frac{\pi}{2}$ die gegenüberliegenden Winkel eines Dreiecks, so wird nach VIII. und IX.:

$$ob = oc \sin\beta$$
$$\varphi(a) = \cos\alpha : \sin\beta$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so hat man

1) $$ob\,\varphi(a) = oc\cos\alpha$$

Nimmt man die Relation hinzu

2) $$oa = oc \sin\alpha$$

und quadrirt und addirt die Gleichungen 1) und 2), so hat man

$$[ob]^2[\varphi(a)]^2 + [oa]^2 = [oc]^2$$

Nun verändert sich die rechte Seite dieser Gleichung nicht, wenn man a mit b vertauscht; man hat daher

$$[ob]^2[\varphi(a)]^2+[oa]^2=[oa]^2[\varphi(b)]^2+[ob]^2$$

mithin ist

$$\frac{[oa]^2}{1-[\varphi(a)]^2}=\frac{[ob]^2}{1-[\varphi(b)]^2}=\text{const.}$$

2. Hülfssatz. Es ist

$$o(c_1+c_2)=oc_1\,\varphi(c_2)+oc_2\,\varphi(c_1)$$

Man ziehe zum Beweise dieses Satzes eine Strecke $\overline{AB}=c_1+c_2$ und teile die Strecke im Punkte D, so dass $\overline{AD}=c_2$, $DB=c_1$. Man errichte ferner in D die Gerade DC senkrecht auf AB und verbinde C mit A und B. Man bezeichne endlich $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$, $\overline{DC}=m$, Winkel $BCD=C_1$, Winkel $ACD=C_2$.

Man hat dann nach VIII.:

$$1)\qquad om\sin C_1=oc_1\sin B$$
$$2)\qquad om\sin C_2=oc_2\sin A$$
$$3)\qquad om=oa\sin B$$
$$4)\qquad om=ob\sin A$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt nun für ein schiefwinkliges Dreieck:

$$oa:ob=\sin A:\sin B$$

folglich hat man auch

$$5)\qquad oa:oc=\sin A:\sin C$$

Multiplicirt man andererseits 1) und 2) mit $\cos C_2$ resp. $\cos C_1$ und addirt dieselben, so hat man

$$6)\quad om\sin C=oc_1\sin B\cos C_2+oc_2\sin A\cos C_1$$

Ferner folgt aus 3) und 5)

$$7)\quad om\sin C=oa\sin B\sin C=oc\sin A\sin B$$

Man erhält daher, indem man 5) und 6) gleichsetzt und durch $\sin A\sin B$ dividirt:

$$oc=oc_1\frac{\cos C_2}{\sin A}+oc_2\frac{\cos C_1}{\sin B}$$

Diese Gleichung spricht aber mit Berücksichtigung von IX. den zu beweisenden Hülfssatz aus.

Die beiden Hülfssätze reichen zur Bestimmung von $\varphi(x)$, bis auf eine Constante, die unbestimmt bleibt, vollständig aus. Dieselben sprechen nemlich aus, dass $\varphi(x)$ der Functional-Gleichung genügt:

$$\sqrt{1-[\varphi(x+y)]^2} = \varphi(x)\sqrt{1-[\varphi(y)]^2} + \varphi(y)\sqrt{1-[\varphi(x)]^2}$$

woraus folgt, dass

$$\varphi(x) = \cos kx$$

wo k eine beliebige Constante bedeutet. Zufolge der geometrischen Bedeutung von $\varphi(x)$ kann jedoch diese Constante bloss reell oder rein imaginär, keinesfalls aber complex sein, da sonst das Verhältniss zweier reeller Strecken complex sein müsste.

§ 3.

Die Fundamental-Gleichungen der nicht-euklidischen Trigonometrie sind demnach für ein geradliniges Dreieck mit den Seiten a, b, c und den gegenüberliegenden Winkeln α, β, $\frac{\pi}{2}$

$$\sin ka : \sin kb : \sin kc = \sin\alpha : \sin\beta : 1$$

$$\cos ka = \cos\alpha : \sin\beta$$

$$\cos kb = \cos\beta : \sin\alpha$$

wo k eine beliebige reelle oder rein imaginäre Constante bedeutet. Sie werden identisch mit bekannten Formeln der sphaerischen Trigonometrie, wenn man $k = 1$ setzt, und es lassen sich aus denselben sämmtliche trigonometrische Formeln für geradlinige Dreiecke auf dieselbe Weise ableiten, wie man aus diesen sämmtliche sphaerische abzuleiten pflegt.

Die Gültigkeit der Formeln erscheint bisher auf einen Raumteil beschränkt, innerhalb dessen kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln liegt. Dies bildet jedoch im Falle eines imaginären k gar keine Beschränkung, da dann die Formeln selber aussagen, dass die Summe der Winkel eines jeden Dreiecks kleiner ist als zwei Rechte; für den Fall eines reellen k hingegen können wir ein beliebiges Dreieck jedenfalls in solche zerlegen, die unserer Bedingung genügen, die Formeln auf diese anwenden und hernach mittelst Elimination der Hülfsgrössen uns von jedweder Beschränkung freimachen.

Klausenburg, Januar 1875.

XXXVII.

Die reciproke Polare der Differentialcurve der Parabel in Bezug auf einen Kreis.

Von

Adolf Hochheim.

---

1. Die Gleichung der Differentialcurve der Parabel

$$y^2 = px \tag{1}$$

ist, wenn zur Construction derselben die Strecke k benutzt wird,

$$y^2 x = \frac{k^2 p}{4}. \tag{2}$$

Betrachtet man jede Tangente dieser Curve als Polare bezüglich eines um den Coordinatenanfangspunkt beschriebenen Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{3}$$

so liegen alle zugehörigen Pole auf der reciproken Polaren der Differentialcurve in Bezug auf diesen Kreis.

Die Gleichung einer Tangente der Differentialcurve am Punkte (x, y) ist

$$\eta = -\frac{2y^3}{k^2 p}\xi + \tfrac{3}{2}y. \tag{4}$$

Bezeichnet man die Coordinaten des zugehörigen Poles mit x_1, y_1, so ergeben sich zur Bestimmung derselben die Relationen

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{2r^2}{3y}, \\ x_1 &= \frac{4r^2 y^2}{3k^2 p} = \frac{r^2}{3x}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Durch Elimination von x und y ergiebt sich die Gleichung

$$y_1^2 x_1 = \frac{16 r^6}{27 k^2 p} \tag{6}$$

d. h. die reciproke Polare in Bezug auf den Kreis (3) ist ebenfalls die Differentialcurve einer Parabel.

Beide Differentialcurven haben die Asymptoten gemein, berühren sich also in der Unendlichkeit.

Die Parabel, deren Differentialcurve der Gleichung (6) entspricht, besitzt einen Parameter, der gleich

$$\frac{64 r^6}{27 k^4 p}$$

ist.

2. Der Berührungspunkt der Tangente (4) möge kurz durch k und der derselben entsprechende Punkt der Curve (6) durch k' bezeichnet werden.

Ist die Tangente mit dem Berührungspunkte k gegeben, so lässt sich die Lage des Punktes k' mit Leichtigkeit bestimmen.

Man fällt vom Coordinatenanfangspunkte auf die Tangente ein Lot, zieht ferner nach einem der Schnittpunkte der Tangente und des Kreises einen Radius und errichtet im Endpunkte auf demselben ein Lot. Der Schnittpunkt der beiden Lote ist der Punkt k'.

Mit Hülfe der Proportionen

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{3}{2}y : r &= r : y_1 \\ 3x : r &= r : x_1 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

kann man sehr leicht die Coordinaten des Punktes k' construiren, wenn man berücksichtigt, dass $3x$ und $\frac{3}{2}y$ die Abschnitte sind, welche von der Tangente (4) auf den Coordinatenaxen gebildet werden.

Aus den Gleichungen (5) folgt:

α) Die beiden Punkte k und k' liegen stets auf derselben Seite der x-Axe.

β) Das Rechteck aus den Abscissen der Punkte k und k' ist halb so gross als das aus den Ordinaten derselben.

3. Aus der Theorie der reciproken Polaren folgt:

Die Differentialcurve (2) ist zugleich der geometrische Ort der Pole, deren Polaren in Bezug auf den Kreis (3) Tangenten der Differentialcurve (6) sind.

Wie sich demnach die reciproke Polare (6) aus der Differentialcurve (2) ableiten lässt, so muss sich umgekehrt auch die Differentialcurve (2) aus der reciproken Polare (6) entwickeln lassen.

Zieht man von einem Punkte (ξ, η) an die Differentialcurve (2) die drei Tangenten, so werden die drei diesen entsprechenden Punkte der reciproken Polaren (6) auf einer Geraden

$$\xi x + \eta y = r^2$$

liegen, welche die Polare des Punktes (ξ, η) in Bezug auf den Kreis (3) ist.

Ebenso kann man umgekehrt schliessen:

Schneidet eine Gerade die reciproke Polare (6) in drei Punkten, so werden die diesen Schnittpunkten entsprechenden Tangenten der Differentialcurve (2) durch einen Punkt gehen, welcher der Pol der Geraden bezüglich des Kreises (2) ist.

4. Die Tangente (4) schneidet die Differentialcurve (2) in dem Tangentialpunkte f, dessen Coordinaten $4x$, $-\frac{y}{2}$ sind. Construirt man an diesen Punkt eine Tangente, so entspricht derselben ein Punkt f' der reciproken Polaren, dessen Coordinaten

$$\frac{r^2}{12x}, \qquad -\frac{4r^2}{3y}$$

sind.

Daraus ergiebt sich: Ist f der Tangentialpunkt der Tangente am Punkte k der Differentialcurve (2), so ist k' der Tangentialpunkt der Tangente am Punkte f' der reciproken Polaren.

5. Construirt man um den Coordinatenanfangspunkt ein System concentrirter Kreise und in Bezug auf jeden derselben die reciproke Polare der Differentialcurve der Parabel, so bilden alle diese ein Büschel von Differentialcurven, die sich in ihren Rückkehrpunkten und Wendepunkten berühren.

Wenn man zu einer Parabel mit Hülfe verschiedener Strecken k ein System von Differentialcurven (S) construirt, so schneiden sich alle Tangenten derselben, deren Berührungspunkte in einer Parallelen zur Y-Axe liegen, in einem Punkte der X-Axe.

Daraus folgt:

Construirt man zu jeder Differentialcurve des Systems (S) die reciproke Polare in Bezug auf den Kreis (3),

so liegen alle Punkte derselben, welche dem Tangentenbüschel entsprechen, dessen Berührungspunkte in einer Parallelen zur Y-Axe liegen, in einer Geraden, welche ebenfalls der Y-Axe parallel läuft, nämlich in der Polaren des Kreises, deren Pol der Schnittpunkt jener Tangenten in der X-Axe ist.

6. Setzt man in Gleichung (3)

$$r^2 = \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{k^4 p^2} \tag{8}$$

so geht die Gleichung (6) der reciproken Polaren über in

$$y_1^2 x_1 = \frac{k^2 p}{4} \tag{9}$$

d. h. beschreibt man den Kreis (3) mit der Normalen der Differentialcurve, die durch den Coordinatenanfangspunkt geht, als Radius, so fällt die reciproke Polare in Bezug auf denselben mit der Differentialcurve (2) zusammen.

Der Tangente an einem Punkte k der Differentialcurve entspricht demnach ein Punkt k', der mit k auf demselben Teile der Curve (2) liegt.

Die beiden Punkte k und k' mögen kurz als reciproke bezeichnet werden.

Ist einer dieser Punkte gegeben, so lassen sich die Lage und die Coordinaten des andern leicht nach den in 2. angegebenen Regeln bestimmen.

Daraus ergiebt sich: Fällt man von einem Punkte der Differentialcurve (2) auf die am reciproken Punkte gezogene Tangente ein Lot, so geht dasselbe stets durch den Coordinatenanfangspunkt.

Fällt man vom Coordinatenanfangspunkte auf jede Tangente der Differentialcurve (2) ein Lot, so ist der geometrische Ort der Scheitel der rechten Winkel eine Fusspunktencurve der Differentialcurve, deren Gleichung

$$(\xi^2 + \eta^2)^3 = \frac{27}{16} k^2 p \, \xi \, \eta^2 \tag{10}$$

ist. Dieselbe besitzt im Coordinatenanfangspunkte einen dreifachen Punkt, der aus der Vereinigung von zwei Knotenpunkten und einer Spitze entstanden ist.

Jede Gerade, welche durch den Coordinatenanfangspunkt geht, schneidet ausser in diesem die Fusspunktencurve nur noch in einem reellen Punkte (f).

Zieht man demnach durch den Coordinatenanfangspunkt eine Gerade, so sind die Schnittpunkte derselben mit der Fusspunktencurve zugeordnete harmonische Punkte zu den beiden Punkten, in welchen der Normalenkreis von der Geraden geschnitten wird.

8. Verbindet man die reciproken Punkte eines Berührungspunktes (x, y) und seines Tangentialpunktes durch eine Gerade, so ist dieselbe nach 4. ebenfalls eine Tangente der Differentialcurve. Bezeichnet man die Neigungswinkel dieser Tangenten gegen die X-Axe mit φ und φ_1, so findet man

$$\operatorname{tg}\varphi . \operatorname{tg}\varphi_1 = -4.$$

Das Product der Tangenten der Neigungswinkel dieser beiden Geraden gegen die X-Axe ist constant.

Ausserdem lassen sich mit Leichtigkeit folgende Resultate ableiten:

α) Legt man an reciproke Punkte der Differentialcurve der Parabel Tangenten, so ist das doppelte Product der Neigungswinkel derselben gegen die X-Axe gleich der Einheit.

β) Construirt man die Normalen in reciproken Punkten der Differentialcurve der Parabel, so besitzt das Product der Tangenten der Winkel, unter welchen diese gegen die X-Axe geneigt sind, einen constanten Wert.

γ) Das Rechteck aus den Subtangenten reciproker Punkte, sowie das aus den Subnormalen besitzt einen constanten Wert und zwar ist das erste viermal so gross als das zweite.

9. Gegeben seien die Coordinaten eines Punktes der Differentialcurve x, y. Construirt man an dem reciproken Punkte desselben die Tangente und die Normale, so findet man, dass die Längen desselben ausgedrückt durch die Coordinaten des ursprünglichen Punktes sind

$$T = \frac{\sqrt[3]{k^4 p^2}}{2xy} \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$N = \frac{\sqrt[3]{k^4 p^2}}{2y^2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Daraus folgt:

$$N : T = x : y \tag{11}$$

d. h. **Normale und Tangente eines Punktes der Differentialcurve verhalten sich wie Abscisse und Ordinate des reciproken Punktes.**

10. Gegeben sei ein System von parallelen Geraden, welche die Differentialcurve schneiden. Eine derselben möge der Gleichung

$$\eta y + \xi x - \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{k^4 p^2} = 0 \tag{12}$$

entsprechen, dann ist für alle das Verhältniss $\frac{\xi}{\eta}$ constant. Da die drei Tangenten an den Punkten, welche den Schnittpunkten einer Geraden reciprok sind, sich in einem Punkte schneiden, so folgt: **Die Mittelpunkte der Tangentenbüschel, welche einem Systeme paralleler Geraden entsprechen, liegen auf einer Geraden, die durch den Coordinatenanfangspunkt geht.**

11. Zieht man in den Schnittpunkten einer Geraden und der Differentialcurve Tangenten an die letztere, so liegen die zugehörigen Tangentialpunkte in einer Geraden, welche die Begleiterin der ursprünglichen Geraden genannt wird.

Gegeben sei eine Gerade G und die Begleiterin derselben G'. Construirt man an die Differentialcurve die Tangenten in den Punkten, welche den Schnittpunkten reciprok sind, so bestehen zwischen den Coordinaten der Mittelpunkte der beiden Büschel die beiden einfachen Relationen

$$\left.\begin{aligned} \xi : \xi' &= 1 : 4, \\ \eta : \eta' &= 2 : -1 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

12. Zieht man von dem Punkte (ξ, η) die drei Tangenten an die Differentialcurve, so ist die Gleichung der Geraden, welche durch die drei Punkte geht, die den Berührungspunkten reciprok sind,

$$\eta y + \xi x = \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{k^4 p^2};$$

dagegen ist die der geraden Polare des Punktes (ξ, η) in Bezug auf die Differentialcurve

$$\eta^2 x + 2\eta\xi y = \tfrac{3}{4}k^2 p.$$

Daraus folgt: **das Product der Tangenten der Neigungswinkel dieser beiden Geraden der X-Axe ist constant, nämlich gleich $\frac{1}{2}$.**

13. Von dem Punkte (ξ, η) seien drei Tangenten an die Differentialcurve gezogen. Die Gerade G möge durch die drei Punkte gehen, welche den Berührungspunkten reciprok sind. Betrachtet man die Gerade G als gerade Polare der konischen Polaren des Punktes (ξ, η), welche durch die drei Berührungspunkte geht, so ergeben sich zur Bestimmung des zugehörigen Poles (ξ_1, η_1) die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 \eta &= \xi \sqrt[3]{k^2 p}, \\ \eta \sqrt[3]{k^2 p} &= \eta_1 \xi + \eta \xi_1. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Lässt man demnach den Punkt (ξ, η) auf einer Geraden fortrücken, die durch den Coordinatenanfangspunkt geht, so bleibt die La e des Punktes (ξ_1, η_1) unverändert.

Eliminirt man das Verhältniss $\frac{\xi}{\eta}$ aus diesen beiden Gleichungen, so ergiebt sich

$$\eta_1^2 + \xi_1 \sqrt[3]{k^2 p} = \sqrt[3]{k^4 p^2} \tag{16}$$

Erteilt man demnach dem Punkte alle möglichen Lagen in der Ebene, so rückt der Punkt (ξ_1, η_1) auf einer Parabel fort, die sich symmetrisch zur X-Axe ausbreitet.

14. Construirt man zu allen Punkten der Geraden G die geraden Polaren in Bezug auf die Differentialcurve, so werden dieselben von einer Parabel, welche die Polokonik der Geraden G genannt wird, eingehüllt. Geht die Gerade G durch die drei Punkte, welche den drei Berührungspunkten der Tangenten, die sich von dem Punkte (ξ, η) an die Differentialcurve ziehen lassen, reciprok sind, so ist die Gleichung derselben:

$$\xi x + \eta y = \tfrac{3}{4} \sqrt[3]{k^4 p^2},$$

demnach die Gleichung der Polokonik

$$y^2 - \frac{8 \xi \eta}{3 \sqrt[3]{k^2 p}} y + \frac{4 \xi^2}{3 \sqrt[3]{k^2 p}} x = 0 \tag{17}$$

Der Parameter der Polokonik ist demnach nur abhängig von der Abscisse des Mittelpunktes des Tangentenbüschels und zwar ist er dem Quadrat desselben proportional.

$$x = \frac{4\eta^3}{3\sqrt[3]{k^2 p}}$$

Gleitet demnach der Punkt (ξ, η
zur X-Axe fort, so werden die zug
eingehüllt von der X-Axe und
-Axe.

Magdeburg, im April 1875.

XXXVIII.

Miscellen.



1.

Transformation der Function $x^n e^{\lambda x^2}$.

Es soll die Function

$$y = x^n e^{\lambda x^2}$$

in welcher λ eine constante, aber von Null verschiedene, und n Null oder eine ganze positive Zahl bezeichnet, in der Form

$$y = S\left[A_m e^{mx}\right]$$

dargestellt werden.

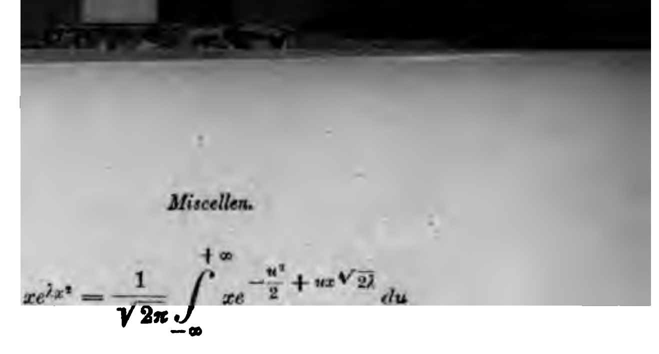
Ich habe diese Aufgabe bereits im 52. Bande dieses Archivs aufgelöst, aber vor Kurzem ist mir eine viel einfachere Lösung derselben Aufgabe geglückt, ich erlaube mir hier dieselbe mitzuteilen, und dies um so mehr, als sich bei der früheren Auflösung ein kleiner Fehler in die Rechnung einschlich.

Es ist

$$e^{\lambda x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}}\, du \tag{1}$$

wie sich leicht beweisen lässt.

Wird diese Gleichung beiderseits mit x multiplicirt, so erhä man:



$$x e^{\lambda x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} du$$

und dies gestattet folgende Schreibweise:

$$x e^{\lambda x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,.\,\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{d\, e^{ux\sqrt{2\lambda}}}{du} du$$

und gibt nach der Methode des teilweisen Integrirens behandelt:

$$x e^{\lambda x^2} = \left\{ e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}} - \int e^{ux\sqrt{2\lambda}} \frac{de^{-\frac{u^2}{2}}}{du} du \right\}_{-\infty}^{+\infty}.$$

Nun verschwindet $e^{-\frac{u^2}{2} + ux\sqrt{2\lambda}}$ sowohl für $u = -\infty$ als auch für $u = +\infty$, folglich hat man:

$$x e^{\lambda x^2} = \frac{(-1)}{\sqrt{2\pi}\,.\,\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux\sqrt{2\lambda}} \frac{de^{-\frac{u^2}{2}}}{du} du \tag{2}$$

Wird genau derselbe Weg nochmals eingeschlagen, so erhält man:

$$x^2 e^{\lambda x^2} = \frac{(-1)^2}{\sqrt{2\pi}\,(\sqrt{2\lambda})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux\sqrt{2\lambda}} \frac{d^2 e^{-\frac{u^2}{2}}}{du^2} du$$

und wenn man wiederholt diesen Weg einschlägt, so erhält man:

$$x^n e^{\lambda x^2} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}\,(\sqrt{2\lambda})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux\sqrt{2\lambda}} \frac{d^n e^{-\frac{u^2}{2}}}{du^n} du$$

Hätte man die Gleichung (1) auf folgende Weise geschrieben:

$$e^{\lambda x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 + 2ux\sqrt{\lambda}} du$$

so hätte man genau denselben Weg einschlagend, gefunden:

$$x^n e^{\lambda x^2} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}\,(2\sqrt{\lambda})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2ux\sqrt{\lambda}} \frac{d^n e^{-u^2}}{du^n} du.$$

Simon Spitzer.

2.

Propriétés des nombres.

1. Prenons une progression arithmétique quelconque

$$\div a.b.c.d\ldots,$$

que nous supposerons croissante et à termes entiers; et soit r la raison de cette progression. Cherchons s'il est possible d'y déterminer n termes consécutifs, dont la somme S soit égale à une puissance entière n^α du nombre n.

Si x est le premier de ces n termes, le dernier de ces termes sera $x+(n-1)r$ et l'on aura

$$S = \frac{2x+(n-1)r}{2}.n$$

pour la somme des n termes. Nous devons ainsi avoir l'égalité

$$\frac{2x+(n-1)r}{2}.n = n^\alpha,$$

d'où nous tirons

$$x = n^{\alpha-1} - \frac{n-1}{2}r \tag{1}$$

pour la valeur du premier de nos n termes.

Deux cas sont à considérer, suivant que la raison r est un nombre pair ou un nombre impair.

2. **Premier cas.** Si la raison r est paire et égale à $2q$, le problème sera toujours possible; le premier de nos n termes sera

$$x = n^{\alpha-1}-(n-1)q$$

et

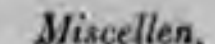
$$y = n^{\alpha-1}+(n-1)q$$

sera le dernier de ces termes; car la somme des n termes aura pour valeur

$$\frac{n^{\alpha-1}-(n-1)q+n^{\alpha-1}+(n-1)q}{2}.n = \frac{2n^{\alpha-1}.n}{2} = n^\alpha.$$

Nous concluons que:

Théorème I. Dans toute progression arithmétique à termes entiers, dont la raison est paire, on peut toujours trouver n termes consécutifs, dont la somme soit égale à une puissance entière donnée de n.



Les termes extrêmes de cette suite de n termes seront

$$n^{a-1}-(n-1)\frac{r}{n} \quad \text{et} \quad n^{a-1}+(n-1)\frac{r}{n}$$

où r désigne la raison de la progression.

3. Supposons que notre progression soit formée par la suite 1, 3, 5, 7, 9, ... des nombres impairs. Les termes extrêmes des n termes seront

$$n^{a-1}-n+1 \quad \text{et} \quad n^{a-1}+n-1,$$

attendu que $r=2$. Donc

Théorème II. **Une puissance entière quelconque n^a d'un nombre entier quelconque n est toujours égale à la somme de n nombres impairs consécutifs.**

44. Nous voyons ainsi que le cube d'un nombre entier n est égal à la somme des n nombres impairs

$$n^2-n+1,\ n^2-n+3,\ n^2-n+5, \ldots\ n^2+n-1$$

Si nous donnons à n successivement les valeurs entières 1, 2, 3, 4, 5, ..., nous obtiendrons les égalités

$$1^3=1,$$
$$2^3=3+5,$$
$$3^3=7+9+11,$$
$$4^3=13+15+17+19, \text{ etc.}$$ Donc

Théorème III. **Si l'on prend la suite des nombres impairs, 1, 3, 5, 7, ..., et qu'on la sépare en groupes dont le premier ait un terme, le second deux termes ... le $n^{\text{ème}}$ groupe n termes; la somme des termes d'un même groupe est égale au cube du nombre des termes que renferme ce groupe.**

5. Ajoutons les n premières égalités précédentes. Le premier membre résultant sera la somme

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3$$

des cubes du n premiers nombres entiers; le second membre sera la somme des

$$1+2+3+4\ \ldots+n$$

premiers nombres impairs, c'est-à-dire des $\frac{n(n+1)}{2}$ premiers nombres entiers; or on sait que cette dernière somme est égale à

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1+2+3+4+\ldots+n)^2.$$

Théorème IV. Ainsi La somme des cubes des n premiers nombres entiers est égale au carré de la somme de ces mêmes n premiers nombres entiers.

6. **Deuxième cas.** Si la raison r est impaire, l'inspection de l'expression (1) fait voir que le problème ne sera possible que pour les valeurs impaires $2p+1$ de n. La premier (1) de nos n termes sera alors

$$x = (2p+1)^{\alpha-1} - pr,$$

et

$$y = (2p+1)^{\alpha-1} + pr$$

sera le dernier de ces termes. On voit donc que

Théoreme V. Dans toute progression arithmétique à termes entiers, dont la raison est impaire, on peut toujours trouver un nombre impair $n = 2p+1$ de termes consécutifs, dont la somme soit égale à une puissance entière donnée de $n = 2p+1$.

7. Si notre progression est formée par la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, ..., nous aurons $r = 1$ et les termes extrêmes de notre groupe de n termes seront

$$(2p+1)^{\alpha-1} - p \quad \text{et} \quad (2p+1)^{\alpha-1} + p.$$

Faisons $\alpha = 2$ et donnons à p successivement les valeurs 0, 1, 2, 3, ...; nous obtiendrons les développements

$$1^2 = 1,$$
$$3^2 = 2+3+4,$$
$$5^2 = 3+4+5+6+7,$$
$$7^2 = 4+5+6+7+8+9+10, \text{ etc. }.$$

Si nous faisions $\alpha = 3$ et que nous donnions à p les mêmes valeurs successives, nous trouverions que

$$1^3 = 1,$$
$$3^3 = 8+9+10,$$
$$5^3 = 23+24+25+26+27,$$
$$7^3 = 46+47+48+49+50+51+52, \text{ etc.}$$

Georges Dostor.

3.

Détermination du chiffre qui termine les puissances successives des nombres entiers.

1. **Principe.** Lorsque le dernier chiffre d'un nombre entier est augmenté d'une unité, le dernier chiffre de la cinquième puissance de ce nombre est aussi augmenté d'une unité.

Soit a un nombre entier; si nous augmentons le dernier chiffre d'une unité, le nombre résultant sera $a+1$. Or nous avons

$$(a+1)^5 = a^5+5a^4+10a^3+10a^2+5a+1,$$

ou

$$(a+1)^5 = (a^5+1)+5a(a^3+1)+10a^2(a+1).$$

Que le nombre a soit pair ou impair, l'un des deux facteurs du produit $a(a^3+1)$ sera pair et l'autre impair; par suite le produit $5a(a^3+1)$ est un multiple de 10. D'ailleurs le produit $10a^2(a+1)$ est aussi un multiple de 10. Donc le dernier chiffre de $(a+1)^5$ sera le même que celui de a^5+1.

2. **Corollaire I.** La $5^{\text{ème}}$ puissance de 1 étant 1, le dernier chiffre de 2^5 sera $1+1$ ou 2; par suite le dernier chiffre de 3^5 sera $2+1$ ou 3; celui de 4^5 sera $3+1$ ou 4; et ainsi de suite. Or toute puissance d'un nombre entier est terminée par le même chiffre que la même puissance du dernier chiffre de ce nombre. Donc

La cinquième puissance d'un nombre entier est terminée par le même chiffre que ce nombre.

3. **Corollaire III.** On conclut de là que la $(5+4)^{\text{ème}}$ ou la $9^{\text{ème}}$ puissance d'un nombre, puis la $(9+4)^{\text{ème}}$ ou la $13^{\text{ème}}$ puissance de ce nombre, ensuite la $(13+4)^{\text{ème}}$ ou la $17^{\text{ème}}$ puissance, ... sont terminées par le même chiffre que ce nombre. Donc

La $(4q+1)^{\text{ème}}$ puissance d'un nombre entier est terminée par la même chiffre que ce nombre.

4. **Corollaire III.** Soit $m = 49+r$, où r est moindre que 4. On a $a^m = a^{4q+r} = a^{4q+1}.a^{r-1}$; or a^{4q+1} est terminée par le même chiffre que a, donc le produit de a^{4q+1} par a^{r-1} ou a^{4q+r} sera terminée par le même chiffre que le produit de a par a^{r-1} ou que a^r. Donc

La $m^{\text{ème}}$ puissance d'un nombre entier est terminée par le même chiffre que la puissance de ce nombre d'un degré égal au reste de la division de m par 4.

5. **Conclusion.** De ce qui précède il résulte que

Si l'on forme le tableau des chiffres qui terminent les quatre premières puissances des neuf premiers nombres, le chiffre, qui termine une puissance quelconque d'un nombre entier, se trouve à la rencontre de la colonne verticale et de la ligne horizontale de ce tableau

Degrés des puissances	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$4n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$4n+2$	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$4n+3$	1	8	7	4	5	6	3	2	9
$4n$	1	6	1	6	5	6	1	6	1

colonne et ligne qui commencent, l'une par le dernier chiffre du nombre, l'autre par le degré de la puissance.

6. L'impution de ce tableau fait aussi voir que

1⁰ les nombres terminés par 1, par 5 ou par 6 ont toutes leurs puissances terminées par le même chiffre;

2⁰ les nombres terminés par 4 et par 9 ont tous leurs puissances terminées, les premiers par les chiffres 4 et 6, les seconds par les chiffres 9 et 1.

3⁰ deux nombres terminés par deux chiffres complémentaires ont toutes leurs puissances paires terminées par les mêmes chiffres, et leurs puissances impaires par deux chiffres complémentaires.

Georges Dostor.

4.

Bemerkung über die Berechnung vielstelliger Logarithmen.

Nachdem man das Verfahren kennt, den Logarithmus jeder auch noch so vielziffrigen Zahl auf beliebig viele Stellen durch eine kurze, leichte Rechnung zu finden, sind wiederholt Tafeln herausgegeben worden, welche diese Rechnung, freilich auf begrenzte Stellenzahl, noch sehr abkürzen. Zwei von diesen, die eine von Sedlaczek berechnet, die andere in Bertram's Ausgabe von Meier Hirsch's Auf-

5.

Problema geometricum.

Probl. Centro ellipsis datae punctisque extremis semiaxium positivorum litteris O, A, B respective designatis ejusmodi punctum P in ellipsi invenire, ut AP^2+BP^2 maximum aut minimum fiat.

Aequatio ellipsis datae sit

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \tag{1}$$

et summa $AP^2+BP^2=s$ ponatur. Tum erit

$$s=x^2+(b-y)^2+(a-x)^2+y^2 \tag{2}$$

quae aequatio bis differentiando dabit

$$\frac{\partial s}{\partial x}=2(2x-a)+2(2y-b)\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=4\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$$

Derivata $\frac{\partial s}{\partial x}=0$ posita prodit aequatio

$$x-\frac{a}{2}+\left(y-\frac{b}{2}\right)\frac{\partial y}{\partial x}=0 \tag{3}$$

quae est aequatio normalis e puncto $\left(x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2}\right)$ ductae. Quod si $-\frac{b^2x}{a^2y}$ pro $\frac{\partial y}{\partial x}$ et $-\frac{b^4}{a^2y^3}$ pro $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ substituerimus, habebimus

$$2(a^2-b^2)xy-a^3y+b^3x=0 \tag{4}$$

et

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\frac{2b^5}{a^2}\left[\frac{2(a^2-b^2)}{b^5}+\frac{1}{y^3}\right] \tag{5}$$

Aequatio (4) designat hyperbolam per originem transeuntem, cujusque asymptotae aequationibus

$$y=-\frac{b^3}{2(a^2-b^2)},\qquad x=\frac{a^3}{2(a^2-b^2)} \tag{6}$$

definiantur. Exterminata x intra (1) et (4), invenitur

$$4(a^2-b^2)^2y^4+4b^3(a^2-b^2)y^3-b^2[3(a^2-b^2)^2-2a^2b^2]y^2$$
$$-4b^5(a^2-b^2)y-b^8=0 \tag{7}$$

Quoniam hyperbola per originem transit, nesesse est, duae saltem

radices sint reales; fieri tamen potest, ut omnes quatuor reales sint. Quae quidem res primum omnium exploranda est. Ut calculus commodior fiat, ponamus $b=1$ et $2(a^2-1)y=u$, quo facto aequatio (7) mutatur in

$$u^4+2u^3-[3(a^2-1)^2-2a^2]u^2-8(a^2-1)^2u-4(a^2-1)^2=0 \quad (8)$$

E signis terminorum elucet, aequationem (8), si omnes radices sunt reales, unam radicem positivam et tres negativas habere. Si igitur radices habet aequales, patet eas esse negativas. Quum vero solita via radices aequales inveniendi, quae in quaerendo maximo communi divisore aequationis et primae derivatae ejus continetur, longa sit atque ardua, aliam ingrediamur, ad quam eo ducimur, quod nulla alia quantitas cognita atque a in aequatione (8) inest. Duabus igitur radicibus $=-\beta$ positis, aequationem habemus hujus formae

$$(u+\beta)^2(u^2+pu+q)=0$$

vel

$$u^4+(2\beta+p)u^3+(\beta^2+2\beta p+q)u^2+\beta(\beta p+2q)u+\beta^2q=0$$

ubi quantitates β, p, q determinandae sunt vel potius exterminandae, ut inveniatur ejusmodi valor quantitatis a, ut duae radices fiant aequales. Aequatione illa cum (8) comparata, ubi brevitatis causa ponatur $a^2-1=k$, inveniuntur aequationes

$$2\beta+p=2;\quad \beta^2+2\beta p+q=-(3k^2-2a^2);$$
$$\beta(\beta p+2q)=-8k^2;\quad \beta^2q=-4k^2$$

quarum prima dat

$$p=2(1-\beta)$$

et ultima

$$q=-\frac{4k^2}{\beta}$$

His valoribus in ceteris substitutis, prodeunt aequationes

$$-3\beta^4+4\beta^3+(3k^2-2a^2)\beta^2-4k^2=0$$
$$\beta^3(1-\beta)=4k^2(1-\beta)$$

Quum vero sit $1-\beta$ factor utriusque membri hujus aequationis nec nihilo aequalis esse possit, quia ita $k=0$ evadit, aequatio posterior in

$$\beta^3=4k^2$$

mutatur, atque ideo prior in

$$(3k^2-2a^2)\beta^2-12k^2\beta=-12k^2$$

unde reperitur

$$\beta=\frac{6k^2\pm 2ak\sqrt{3}}{3k^2-2a^2}=\frac{2k}{k\pm a\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

Valor superior adhiberi non potest, quia tum a negativa evadit. Si superiore uti poterimus, necesse est, sit

$$a > \frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{6}} \quad \text{vel} \quad a > 1{,}8802$$

Qua re posita, habebimus aequationem

$$k - a\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2k}$$

vel

$$a^2 - a\sqrt{\frac{2}{3}} - 1 = \sqrt[3]{2(a^2-1)}$$

quae concinnata dabit

$$a^6 - 3a^5\sqrt{\frac{2}{3}} - a^4 + \frac{16}{3}a^3\sqrt{\frac{2}{3}} - a^2 - 3a\sqrt{\frac{2}{3}} + 1 = 0$$

quae evidenter est aequatio reciproca. Divisione per a^3 facta et $a + \frac{1}{a} = v$ posita, facile invenitur

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = v^2 - 2; \quad a^3 + \frac{1}{a^3} = v^3 - 3v$$

et aequatio transit in

$$v^3 - 3v^2\sqrt{\frac{2}{3}} - 4v + \frac{34}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = 0$$

cujus radices solito modo inveniuntur esse

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{2}\sin 20^0 = 1{,}7838756\ldots$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{2}\sin 40^0 = 2{,}63457449\ldots$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{2}\sin 80^0 = -1{,}96896238\ldots$$

Quoniam est $a = \frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} - 1}$, et necesse est, sit $a > 1$, secundo tantum valore quantitatis v uti possumus et superiore valore ipsius a, qui inde deducitur. Ita inveniemus

$$a = 2{,}174751929\ldots$$

quando duae radices sunt aequales. Si est $a < 2{,}174\ldots$, duae tantum radices sunt reales.

Restat, ut videamus, quinam valores quantitatis y maximum aut minimum suppeditent. Ponamus igitur

$$u^4 + 2u^3 - (3k^2 - 2k - 2)u^2 - 8k^2u - 4k^2 = f(u)$$

$$\begin{array}{lll} \text{Posita } u = 2k, & \text{evadit} & f(2k) > 0 \\ \quad,, \quad u = 0, & \quad,, & f(0) < 0 \\ \quad,, \quad u = -1, & \quad,, & f(-1) > 0 \end{array}$$

atque ideo habemus unam radicem inter $2k$ et 0, alteram inter 0 et -1. Itaque est

$$1 > y > 0; \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} > 0 \text{ et } s \text{ minimum}$$

$$0 > y > -\frac{1}{2k^2}; \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} < 0 \text{ et } s \text{ maximum.}$$

Quod si est $a > 2{,}17475 \ldots$, habebimus quoque duas alias radices. Posita enim

$$\begin{array}{lll} u = -2, & \text{evadit} & f(-2) > 0 \\ u = -\frac{k}{2}, & \quad,, & f\left(-\frac{k}{2}\right) < 0 \\ u = -\frac{3k}{2}, & \quad,, & f\left(-\frac{3k}{2}\right) > 0 \\ u = -2k & \quad,, & f(-2k) < 0 \end{array}$$

atque ideo una est radix intra -2 et $-\frac{k}{2}$. altera inter $-\frac{3k}{2}$ et $-2k$. Itaque est

$$-\frac{1}{k} > y > -\tfrac{1}{4}; \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} < 0, \text{ et } s \text{ maximum}$$

$$-\frac{3}{4} > y > -1; \quad \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} > 0, \text{ et } s \text{ minimum.}$$

Dat. a. d. kal. Jun. a. 1872.

Doctor Christianus Fr. Lindman,
Lector Strengnesiensis.

$$\frac{S}{n} = \frac{E + E_1}{w + w_1 + g + L} \quad \ldots \ldots \quad \text{V.}$$

Durch Division von V. in IV. entsteht:

$$n = \frac{(w + w_1 + g) + L}{(w + w_1 + g)}$$

oder:

$$(n - 1)(w + w_1 + g) = L;$$

für $n = 2$ wird:

$$w + w_1 + g = L \quad \text{d. h.}$$

der Widerstand in beiden Elementen — die zu einer Kette verbunden — sammt Tangentenbussole ist gleich dem Widerstande den ein eingeschalteter Neusilberdraht von der Länge L dem Strome entgegensetzt, und die Stromstärke der betreffenden Kette auf die Hälfte ihrer Stärke zurückbringt.

Obige zwei Zinkkohlenelemente gaben zur Kette verbunden bei keiner weiteren Drahteinschaltung einen ablenkenden Winkel von 40° 45′. Damit nun die Ablenkung auf 23° 18′ zurückging — welcher Winkel dem halben Tangentenwert von 40° 45′ entspricht — musste 545 cm. Neusilberdraht eingeschaltet werden. Bleiben nun diese 545 cm. Draht eingeschaltet, und werden beide Elemente zu einem Deflagrator verbunden, so muss die Ablenkung an der Tangentenbussole kleiner werden. Dieselbe war nun 19° 15′ also 4° kleiner als vorher; der Widerstand in den Elementen war in diesem Falle nicht mehr so gross als der Widerstand im Schliessungsleiter.

b) In der Tangentenbussole.

Um den Widerstand in der Tangentenbussole zu bestimmen, verfahre ich wie folgt. Von zwei Elementen wird das schwächste ausgesucht, für dasselbe besteht bei keiner weiteren Drahteinschaltung die Gleichung:

$$s = \frac{E}{w + g} \quad \ldots \ldots \quad \text{VI.}$$

alsdann wird das stärkere Element durch eine Drahteinschaltung l_1 mit dem vorhergehenden auf dieselbe Stärke s gebracht, man hat für diesen Fall:

$$s = \frac{E_1}{w_1 + g + l_1} \quad \ldots \ldots \quad \text{VII.}$$

Werden nun beide Elemente zu einer Kette verbunden, und gleichfalls durch eine Drahteinschaltung L auf die Stromstärke s gebracht, so besteht für die Kette der Ausdruck:

$$s = \frac{E + E_1}{w + w_1 + g + L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ VIII.}$$

Setzt man aus den Gleichungen VI. und VII. die Werte für E und E_1 in die Gleichung VIII. ein, und dividirt mit s, so erhält man:

$$1 = \frac{(w + g) + (w_1 + l_1 + g)}{w + w_1 + g + L}$$

oder:

$$g = L - l_1 \quad \text{d. h.}$$

der Widerstand in der Tangentenbussole ist gleich der Drahtlänge L, welche die Stromstärke der Kette auf die Stromstärke des schwächsten Elementes zurückbringt, vermindert um die Drahtlänge l_1, welche gleichfalls im Stande ist die Stromstärke des stärkeren Elementes auf die Stromstärke des schwachen Elementes zurückzuführen.

Das schwächste von den beiden obigen Elementen gab bei keiner Drahteinschaltung eine Ablenkung von 37° 45′, bei dem stärkeren, welches unter denselben Umständen eine Ablenkung von 39° 45′ zeigte, musste eine Länge von 18,5 cm. Neusilberdraht eingeschaltet werden, um die Stärke auf 37° 45′ zurückzubringen. Als beide zu einer Kette verbunden wurden, war die Ablenkung 40° 45′, und es musste eine Länge von 58,5 cm. Neusilberdraht eingeschaltet werden, um ihre Stärke gleichfalls auf 37° 45′ zurückzubringen; hiernach der Widerstand der Tangentenbussole:

$$g = L - l_1 = 58{,}5 - 18{,}5 = 40.$$

Benutzt man die oben gefundenen Werte für die Widerstände und setzt dieselben in die Relation

$$s = \frac{Ws + W_1 s_1}{W + W_1 - g}$$

ein, wo W und W_1 die Widerstände im Element sammt Tangentenbussole, S die Stromstärke der Kette, s und s_1 die Stromstärken der einzelnen Elemente bei keinen weiteren Drahteinschaltungen bezeichnen, so besteht für die beiden Zinkkohlenelemente die Gleichung:

$$\text{tg}\,40^0\,45' = \frac{336\,.\,\text{tg}\,37^0\,45' + 299\,.\,\text{tg}\,39^0\,45'}{336 + 299 - g},$$

woraus $g = 44$ hervorgeht.

Der Neusilberdraht der bei diesen Versuchen gebraucht wurde, war 1,5 Millimeter dick.

Dr. Külp.
Assistent der Physik am Polytechnikum zu Darmstadt.

7.

Ueber das Verhältniss eines kleinplattigen zu einem grossplattigen Elemente.

Für das Element mit kleinen Platten besteht die Relation:

$$s = \frac{E}{w+g} \quad \text{I}$$

und ebenso für das von m mal grösseren Platten, die folgende:

$$S = \frac{E}{\frac{w}{m}+g} \quad \text{II}$$

Wird S auf $\frac{S}{n}$ geschwächt, durch eine Drahtlänge l, so erhält man:

$$\frac{S}{n} = \frac{E}{\frac{w}{m}+g+l} \quad \text{III}$$

Aus II. und III. entsteht vorerst:

$$S = \frac{E(n-1)}{l},$$

Litterarischer Bericht

CCXXIX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo VII. Roma 1874. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Im Octoberheft befindet sich die Fortsetzung der Arbeit von Antonio Favaro, und ein Publicationsverzeichniss. Erstere nimmt noch das folgende Heft ein und wird im letzten vollendet. Von der gesammten Arbeit ist auch eine besondere Ausgabe erschienen. Ausserdem enthält das Decemberheft Dr. Alfonso Sparagna's italienische Uebersetzung von Dr. Siegmund Günther's Schrift: „Vergleichung zweier Methoden zur näherungsweisen Bestimmung irrationaler Grössen" in den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. 1873. November, gleichfalls besonders herausgegeben — und ein Publicationsverzeichniss. H.

Intorno alla vita ed ai lavori di Monsignore D. Barnaba Tortolini. Cenni del Prof. Vincenzo Diorio, Secretario dell' Accademia Pontifica de' Nuovi Lincei. Estratto dagli atti dell' Accad. Pont. de' N. Linc. anno XXVIII. sessione 1ª. del 20 dicembre 1874. Roma 1875. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Barnaba Tortolini, geboren zu Rom den 19. November 1808, trat zuerst im Jahr 1835 als Docent der Mathematik und Physik am Collegio Urbano di Propaganda Fide auf, ward 1836 zum Professor für Mechanik und Hydraulik am Archiginnasio Romano, 1837 zum

Professor für Differential- und Integralrechnung an vorgenannter Universität, 1845 zum Professor für Mathematik und Physik am Pontificio Seminario Romano, 1856 zum Director der tipografia della Propaganda Fide ernannt, welches Amt er bis 1865 behielt. 1866 ward er Titular-Canonicus an der Basilica di Santa Maria ad Martyres. Von 1869 an hinderte ihn beständig zunehmende Gicht an aller Beschäftigung. Den 24. August 1874 starb er zu Ariccia. Ein grosses Verdienst hat er sich erworben durch die Herausgabe der mathematischen Zeitschrift, welche von 1850 bis 1857 unter dem Titel „Annali di scienze matematiche e fisiche" erschien, und die er im Verein mit Enrico Betti, Francesco Brioschi und Angelo Genocchi von 1858 bis 1865 unter dem Titel „Annali di matematiche pura ed applicata" fortführte. Das Verzeichniss seiner Arbeiten nennt eine Separatschrift und 109 wissenschaftlich mathematische Abhandlungen in 10 verschiedenen Journalen. H.

Studien über Mac Laurin's geometrische Darstellung elliptischer Integrale. Von Dr. Felix Müller. Progr. d. königl. Realschule zu Berlin, Ostern 1875.

Die vorliegende Schrift verdient Beachtung wegen eines Aufschlusses, den sie zugleich über die Arbeiten Mac Laurin's und über die Entwickelungsgeschichte der Theorie der elliptischen Functionen giebt. Dass der Entdecker der nach ihm benannten Reihe und des gleichfalls nach ihm benannten Satzes über die Anziehung confocaler Ellipsoide auch der Erste gewesen ist, der die Aufmerksamkeit auf die elliptischen Integrale richtete, dass er selbst einen grossen Anteil an deren Untersuchung gehabt und ihnen, wie leicht ersichtlich, den Namen gegeben hat, ist gewiss Wenigen bekannt. Sein Werk „Treatise of fluctions", welches diese Arbeiten enthält, ist äusserst mühevoll zu lesen; daher wird uns in gegenwärtiger Mitteilung der Einblick in die Methode dadurch sehr erleichtert, dass mit Beibehaltung des Entwickelungsganges die einzelnen von Mac Laurin gefundenen Sätze durch einfachere Rechnung hergeleitet worden sind. Auf dem von ihm vertretenen Standpunkt der Theorie waren die elliptischen Integrale noch nicht auf die 3 Grundformen reducirt, was zuerst Legendre in Ausführung brachte, vielmehr ward dem Integral Bedeutung zugeschrieben, sofern es durch Bogen bekannter Curven, Ellipse, Hyperbel, darstellbar sei. Die Curven wurden als Orte des Schnitts zweier rotirenden Geraden bestimmt. Den Anfang macht der Bogen der gleichseitigen Hyperbel

$$s = \int_1^m \frac{\sqrt{m}\,\partial m}{2\sqrt{m^2-1}},$$

wo m die Länge einer vom Mittelpunkt ausgehenden Geraden darstellt, die von der Axe um die doppelte centrische Polar-Amplitude des laufenden Punktes absteht, und deren Projection die reelle Halbaxe ist. Es wird dann die Differenz des Bogens und der Tangente, dann die des Bogens und des Radiusvectors, dann die Summe ersterer Differenz und eines Ellipsenbogens durch Integrale ähnlicher Form ausgedrückt; diese Summe ist dann ferner gleich einem Lemniscatenbogen. Hierauf folgt die Untersuchung der Hyperbel- und Ellipsenbogen von beliebigem Axenverhältniss; unter der Wurzel im Nenner kommt dann ein Term mit erster Potenz hinzu. Die numerische Berechnung stützt Mac Laurin auf die Reihenentwickelung nach Potenzen ausgehend von der Legendre'schen Integralform. Schliesslich macht Mac Laurin Anwendung auf Probleme der Mechanik, die Bahn eines Punktes unter Centralanziehung, Pendelbewegung und elastische Curve.

H.

Geometrie.

Exposition géométrique des propriétés générales des courbes. Par Charles Ruchonnet (de Lausanne). Troisième édition augmentée et en partie refondue. 1874. Paris, Gauthier-Villars. Lausanne, Georges Bridel. Zurich, Orell, Fuessli e. C. 159 S.

Das Vorliegende ist eine Bearbeitung der analytischen Curventheorie auf dem Standpunkt neuerer Zeit, und hat insofern Bedeutung als ein Zeugniss, dass sich unsere Zeit dem Studium der Curventheorie im echten Sinne wieder zuzuwenden angefangen hat. Die Theorie ist analytisch, denn sie fasst die Curve in voller Allgemeinheit, unabhängig von der Form der Functionen, auf und ermittelt die bestimmenden Grundelemente. Sie vertritt auch, bis auf einige noch zu nennende Mängel, den neuen Standpunkt, wie sich durch die reichhaltige und Vollständigkeit anstrebende Untersuchung von Fragen bekundet, die erst in neuerer Zeit die Aufmerksamkeit auf sich gelenkt haben. Die Methode beruht auf dem consequent durchgeführten Princip, alle Herleitungen an der Figur zu vollziehen. Dies würde nichts auffälliges haben, wenn das Ziel der Untersuchung ein constructives wäre, wenn nur Gestalt und Lage ohne quantitative Bestimmung ins Auge gefasst würden. Hier aber handelt es sich durchweg um Ermittelung und analytische Darstellung von Quantitäten; da war jedenfalls das gewählte Verfahren nicht an die Hand gegeben. So anerkennenswert nun auch das Unternehmen einer durchgeführten rein geometrischen Begründung als Versuch und als ein Mittel zur Auffindung manches einfacheren Zusammenhangs ist, so lässt sich

doch vom Ausfall des Versuchs nicht anders sagen, als dass die gesammte Gestaltung, welche die Doctrin so bekommen hat, die grossen Nachteile erst recht ans Licht stellt, die sich davon erwarten liessen. Den Vorzug der Einfachheit kann ihr wohl nur der zuschreiben, welcher die rechnende Geometrie bloss nach alten, schwerfälligen Methoden kennt. Ihr Hauptnachteil besteht aber darin, dass man nie eine Einsicht gewinnt, welches Gebiet die erlernten Sätze umfassen, dass man demzufolge die Identität der Probleme nicht gewahr wird, und unnötigerweise jedes von vorn anfängt. Augenfällig sind besonders die zahlreichen Voruntersuchungen über die Ordnung der Unendlichkleinen, die bei rechnender Deduction ganz wegfallen, da sich die Ordnung mit dem Werte zugleich ergiebt. Ausserdem ist die bei jeder neuen Figur zu erneuernde Orientirung und die mit Vergleichung der Buchstaben verbundene Durchlesung der Figurerklärung eine ermüdende Arbeit, welche sich in den aufzufassenden Untersuchungsgang einschaltet, die Darstellung in die Länge zieht, und den Ueberblick des einfachen Zusammenhangs beeinträchtigt. Die Formel giebt uns alles, was wir zu wissen brauchen, direct, das Wesentliche vom Unwesentlichen geschieden. An ihr lassen sich, wenn man nur ihre geometrische Deutung im Auge behält, alle geometrischen Beobachtungen leichter und sicherer machen als an der Figur, in welcher z. B. eine Unendlichkleine 4. Ordnung gerade so aussieht wie eine 1. Ordnung. Schlüsse an der Figur gezogen erfordern Erinnerung an Sätze und deren Bedingungen, bei deren Anwendungen Fehler leicht unbemerkt bleiben; in der Rechnung tritt an deren Stelle eine Substitution gleicher Grössen, bei der man nicht an vielerlei zu denken braucht. Die genannten Umstände mögen es erklären, wenn die auf Erleichterung des Verständnisses berechnete Methode doch nicht die Wirkung haben sollte, den Gegenstand als so leicht fasslich erscheinen zu lassen, als er es von Natur ist.

Was den Umfang des behandelten Stoffes betrifft, so sind zwei, wenn gleich nicht ganz neue, doch jedenfalls neben dem mehr Gewöhnlichen erwähnenswerte Gebilde in Betracht gezogen, der Durchmesser einer ebenen Curve, d. i. die Gerade vom laufenden Punkt nach der Mitte der unendlich nahen, der Tangente parallelen Sehne, und die osculirende Kugel, deren Mittelpunkt im Coincidenzpunkt der Krümmungsaxe liegt, ersterer, wie der Verfasser angiebt, nach Vorgang von Transon, letztere als eine Kugel, deren Abstand von der Curve von höherer als 3. Ordnung ist. Die alte, durch kein vernünftiges Motiv gerechtfertigte, auf blosser Gewohnheit beruhende Einteilung der Curvenlehre in ebene und nicht ebene ist beibehalten. Ein Zweck des vorausgehenden Abschnitts über ebene Curven ist durch keine Anwendung zu ersehen. Der Begriff der Curve ist bei

der nicht ebenen ein durchaus neuer, und die Bedingungen aller vorher aufgestellten Sätze treten nicht wieder in Geltung. Durch ein ebenso leeres Vorurteil ist es nur zu erklären, dass der Verfasser die nicht ebene Curvenlehre auf die Flächentheorie stützen zu müssen geglaubt hat. Diese setzt er im Anfang als bekannt voraus, während doch alles Folgende, insbesondere die eingeschaltete Untersuchung über Regelflächen, zeigt, dass die Curven das einfachere Gebilde sind, die Flächen naturgemäss mit Hülfe der Curvenlehre verstanden werden. Den Gegenstand des bei weitem grössten Teils der Untersuchung bilden die unendlich kleinen Abstände und Richtungsabweichungen. In der Tat enthalten diese die Grundelemente, wodurch die Natur der Curve bestimmt wird; nur hätte mit ihnen die Theorie nicht abschliessen sollen; es ist das Feld gebaut, und dann die Ernte im Stich gelassen worden. Das Verhältniss hat sich geradezu umgekehrt: statt mit Rechnung zu beginnen und mit einer Totalanschauung zu schliessen, wird hier mit Anschauung angefangen, und das Resultat ist eine grosse Anzahl von Werten, deren Verwendung nicht gezeigt wird. Auch wird nirgends gesagt, wieviele der ermittelten Grössen zur Bestimmung der Curve gerade notwendig und ausreichend sind. Ein Gebiet von grossem Umfang und grosser Bedeutung, welches keine der gewöhnlichen Bearbeitungen üaergeht, ist hier durch den Lehrgang völlig ausgeschlossen, nämlich sämmtliche Relationen, die mit der Annahme von Coordinatenaxen in Verbindung stehen. Allerdings ist einzuräumen, dass alles, was man hier vermisst, blosse Hülfsmittel sind. Sollte es aber hiernach als eine Leistung erscheinen, dass der Verfasser ohne dieses Hülfsmittel so viele Resultate hat herleiten können, so ist leicht zu ersehen, dass der ganze Vorzug illusorisch ist. Denn er hat nicht gelehrt, wie man auf dem genommenen Grunde weiter operiren könne, namentlich nicht, wie man ein gegebenes Problem anzugreifen habe, und woran sich erkennen lasse, ob seine Lösung innerhalb der bekannten Sätze zu finden sei. Hierzu ist die Reduction der gesammten Theorie auf gemeinsame Form, wie sie die Coordinatenrechnung darbietet, notwendig. Dass wir sie innerhalb irgend welcher Grenzen entbehren lernen, hilft uns gar nichts, sobald wir dieselben überschreiten wollen. Der spätere Uebergang zu den Coordinaten würde weit schwieriger und umständlicher sein, als die ganze Basirung der Theorie auf die Coordinatenrechnung. Von diesem Gesichtspunkt betrachtet ist die Vermeidung der Coordinatenrechnung, fern davon einen Gewinn zu bieten, nichts weiter als Vorenthaltung notwendiger Kenntnisse, und im vorliegenden Lehrbuch ein wesentlicher Mangel.

H.

... und die gerade Polare, der I
Geraden, die Beziehung der Polaren zu
lare zweier Punkte, die harmonische Po
schnitt, die Polokonik, die gemischte
Mittelst sehr einfacher Rechnung mit
Deutung wird eine grössere Anzahl von
teten Gebilde hergeleitet. Gleichzeitig e
Einführungen ihre Erklärung. Man kan
als Zweck auffassen; dann dient die Cur
an welchem die Bedeutung der Einführung
dargelegt ist.

Ebene geometrische Gebilde erster u
Standpunkte der Geometrie der Lage betra
Thomae, a. o. Professor in Halle. Mit 4
ten Holzschnitten. Halle a/S. 1873. Louis

Das vorliegende Buch ist nach Angabe
rein durchgeführte Bearbeitung der Geom
Princip. Letzteres ist weder durch den Name
noch durch den Gegensatz gegen die Ge
reichend gekennzeichnet. Bei Abstraction v
sich also bei Transposition eines Gebildes a
stellte Weise ändern können, kommt es dara
stehend betrachtet. Dies ist die gerade Linie
folge der Punkte auf der Linie, die Reihen
ebenen Büschels, die Winkel null, 2 Recht
Dadurch bedingt werden offenbar die Ab...

terliegen verschiedener Auffassung, wenn gleich die Entscheidung nicht schwierig ist, sobald sie einmal besprochen werden. Zunächst beruht das Princip nicht, wie es leicht scheint, auf Beobachtung und Anschauung unter beschränktem Gesichtspunkt, sondern auf Abstraction und Verallgemeinerung. Die Wirklichkeit bietet Anordnung innerhalb der Gebilde zugleich mit den Grössen, die Auffassung beider unterstützt sich gegenseitig in der gemeinen Anschauung, und es gehört erst ein neuer Denkact dazu, sie von einander zu trennen. Diese Abstraction ist ferner eine frei gewählte; es lag kein natürlicher Bestimmungsgrund vor, warum sie gerade soweit ging und nicht weiter; von der Grösse würde erst vollständig abstrahirt sein, wenn auch Gerade und Ebene nicht festgehalten würden, vielmehr die Absperrung durch Linien und Flächen die einzige Basis wäre. Irrig ist also die durch den Namen begünstigte Meinung, die Staudt'sche Idee vertrete die Sonderung der zwei geometrischen Elemente, Grösse und Lage, und bestimme sich aus dieser Forderung. Was nun den pädagogischen Gesichtspunkt betrifft, so sagt der Verfasser: „Einen ganz besondern Reiz hat die synthetische Geometrie, wenn sie von der der Raumwissenschaft an sich fremden (?), aber in die Euklidische Methode verwebten (?) Hypothese des Vorhandenseins eines vom Orte (in seinem Masse) unabhängigen beweglichen Körpers d. h. einem Massstabe absieht ...“ Die eingeschaltete Behauptung widerlegt sich leicht. Ohne die Hypothese beweglicher fester Körper würden wir die vollständige Bestimmung des Raumes, wie er ist, nicht erhalten, folglich ist die Hypothese der Raumwissenschaft an sich nicht fremd, sondern höchstens einem Raumbegriff, den sich jemand nach fingirtem Princip zu bilden vermag. Ebenso ist sie nicht erst durch die Euklidische Methode hinzugebracht, sondern es ist die notwendige Basis unserer Raumvorstellung im Zirkelinstrument auf die einfachste Form reducirt. Sind nun obige zwei Attribute, welche die Aeusserung motiviren und unterstützen sollen, unannehmbar, so fragt sich weiter, welcher Reiz gemeint sei, den jene Abstraction übe. Einen solchen würden wir gewiss der wissenschaftlichen Aufgabe zuerkennen, aus der entwickelten geometrischen Doctrin dasjenige Element auszusondern, welches sich in logischer Continuität auf der ausschliesslichen Basis der Perspective für beliebig viele gleichzeitige Sehcentra ergiebt. Doch in diesem Sinne ist hier nicht davon die Rede; der Verfasser spricht unmittelbar vorher von Anfängern, er setzt also nicht die Doctrin voraus, sondern hat ein ursprüngliches Erlernen auf der einseitigen Basis im Auge. Die theoretische Bedeutung ist hier unbekannt und kann den Reiz nicht gewähren. Was beim Kundigen Abstraction ist, kann beim Anfänger nur Unterlassung einer Tätigkeit sein. Nun wird der Anfänger nicht das Mitdenken des Masses unterlassen; denn dann müsste er gegen die gewohnte Anschauung

ankämpfen. Wol aber entspricht es der Neigung Vieler, das Mass nicht exact zu denken, d. i. nach einer Seite hin fahrlässig zu lernen. Es wird anfänglich als Erleichterung empfunden, was im weitern Fortgang das Lernen erschwert. Mit geringerer Mühe wird zuerst ein geringerer Erfolg erzielt; nachher ist der einseitig wirkenden Fähigkeit selbst die geringere Leistung schwieriger. Da der Schüler dies nicht vorauswissen kann, so ist das Unternehmen, sofern es der Neigung entgegenkommt, auf Täuschung gebaut.

Ein ganz anderer Fall liegt vor bei Verwendungen einzelner Teile der synthetischen Geometrie für den Elementarunterricht, sofern dieselben erst auf der Stufe geschehen, wo die Congruenz- und Gleichheitssätze bekannt sind. Hier ist nur der umgekehrte Fehler der betreffenden Lehrbücher zu rügen, welche den Begriff der Projectivität auf die Verhältnisse der Strecken gründen. Es kam vielmehr darauf an, eine Methode zu wählen, wo der, obwol bekannte, Grössenbegriff zum Beweise nichts beiträgt, und eine solche Methode bietet die Staudt'sche Geometrie dar. Dann erst wird eine allgemeinere Anschauung ohne Einbusse an exacter Auffassung angebahnt.

Die vorliegende Bearbeitung selbst bedarf keiner ausführlichen Besprechung. Die Methode wird durch die Sache gefordert, und die dabei zu lösende Aufgabe erledigt sich durch die Continuität des Systems der synthetisch fortschreitenden Sätze. Es werden nach einander behandelt die Grundbegriffe, die harmonischen Gebilde, die Perspectivität und Projectivität, die Gebilde zweiter Ordnung, Pol und Polare, Gebilde in Involution, Durchmesser und Mittelpunkt, harmonische Gebilde 2. Ordnung, Beziehungen von Winkeln und Strecken zu den Durchmessern einer vorgegebenen Ellipse, Beispiele und Aufgaben. Die Sätze sind gemäss der Reciprocität zwischen Punktreihen und Strahlenbüscheln neben einander gestellt. Die Punktreihe 2. Ordnung geht aus 2 Strahlenbüscheln, das Strahlenbüschel 2. Ordnung aus 2 Punktreihen erster Ordnung bzhw. durch Schnitte und Verbindung hervor. Die Darstellung der obwol durchweg ebenen Geometrie verlangt um der Projectivität willen öfters die Betrachtung verschiedener Ebenen. H.

Die Principien der mathematischen Physik und die Potentialtheorie von Theodor Wand. (Leipzig, 1871. B. G. Teubner).

Wir besitzen in diesem Werke von Theodor Wand die einzige Arbeit, welche die so fruchtbare Potentialtheorie in ihren verschiedenen Anwendungen übersichtlich darstellt. Gerade hierdurch unterscheidet es sich wesentlich von früheren Arbeiten über diesen Gegenstand.

Der Verfasser beginnt in seinem Werke mit allgemeinen physikalischen Betrachtungen über Bewegung, Kraft und Masse und kommt dabei zu dem fundamentalen Satze, dass die Natur bei ihren Veränderungen nur diejenigen Gesetze befolgt, welche unserem Verstande am fasslichsten erscheinen. Nach Einführung einiger analytischer Hülfssätze werden wir zur Potentialtheorie selber übergeführt. Unter diesen Hülfssätzen finden wir ein Kapitel über das Gefälle der Functionen, welches eine besondere Wichtigkeit besitzt. Verfasser benutzt hierbei das Princip, welches bei topographischen Aufnahmen eines hügeligen Terrain's mitunter Anwendung findet. Legen wir in der Gleichung

$$f(xy) = C$$

dem C eine bestimmte Bedeutung bei, zum Beispiele die Bedeutung einer Höhe, so stellt die, durch die Gleichung $f(x,y) = C$ dargestellte, ebene Curve, eine Curve gleicher Höhe dar. Denken wir uns zwei dicht aufeinander folgende Curven aus den Gleichungen

$$u = f(x,y)$$
$$u + du = f(x,y)$$

gebildet, so ist der Weg, welchen das herabfliessende Wasser verfolgt, offenbar diejenige Gerade, welche senkrecht auf zwei Curvenelementen der beiden Curven steht. Nennen wir dn eine solche Gerade der Grösse und Richtung nach, so bedeutet

$$\frac{du}{dn} \text{ das Gefälle der Function } u = f(x,y).$$

Unter einer Function von drei Veränderlichen

$$u = f(x,y,z)$$

kann man sich irgend eine durch Zahlen ausdrückbare Eigenschaft des Stoff erfüllten Raumes denken z. B. die Temperatur. An die Stelle einer Curve gleicher Höhe tritt nun eine Fläche gleicher Temperatur. Die Schnelligkeit, mit welcher die Wärme durch eine Fläche gleicher Temperatur strömt, darf ebenso mit dem Namen Gefälle bezeichnet und analytisch durch $\frac{du}{dn}$ ausgedrückt werden. Sehen wir zu, in welcher Weise das eben Gesagte seine Verwendung findet.

Das Newton'sche Anziehungsgesetz geht von der Anschauung aus, dass die Kraft in einem constanten Strome gleichsam von den materiellen Punkten in den leeren Raum ausströmt, so dass auf verschiedenen, einen Massenpunkt einschliessenden concentrischen Kugelflächen immer dieselbe Gesammtkraft sich ausbreitet. Denkt man sich, dass

von einem Punkte ein Strom von Wärme ausgehe, der immer gleiche Stärke besitzt, so wird, sobald der dadurch entstandene Strom constant geworden ist, durch jede concentrische Kugelfläche in der Zeiteinheit die gleiche Wärmequantität hindurchgehen. Man kann daher die Wärme, welche in der Zeiteinheit durch ein Element einer solchen Kugelfläche geht, gleich der Kraft setzen, welche in der Richtung der Normale wirkt. Denkt man sich, dass die Wärme, welche in der Zeiteinheit durch eine Fläche gleicher Temperatur strömt, proportional ist dieser Fläche und dem Gefälle und bezeichnet man die Temperatur mit u, so strömt durch die Kugelfläche vom Radius r die Wärme

$$-4\pi r^2 \frac{du}{dr}.$$

Da dieser Ausdruck nach Obigem constant sein soll, so muss sein

$$u = \frac{1}{r},$$

wodurch derselbe übergeht in 4π. Diese Grösse drückt alsdann die Mächtigkeit der in dem Centrum befindlichen Wärmequelle aus; $\frac{1}{r}$ bedeutet dagegen die Potentialfunction eines Massenpunktes 1 in der Entfernung r von einem beweglichem Punkte, während, wie erwähnt, u die stationäre Temperatur darstellt. Wir sehen daher, dass die Potentialfunction des Massenpunktes 1 gleich der stationären Temperatur des unendlichen Raumes ist, in welchem sich statt des Massenpunktes eine Wärmequelle von der Mächtigkeit 4π befindet. Ebenso ist die Potentialfunction eines Systems von Massenpunkten gleich der stationären Temperatur des unendlichen Raumes, wenn man sich jeden Massenpunkt m als eine Wärmequelle von der Mächtigkeit $4\pi m$ denkt. Die Analogie zwischen Wärme- und Kraftströmung (wenn man sich so ausdrücken darf) lässt eine Reihe von Sätzen aus der Potentialtheorie, welche sonst einer immerhin mehr oder weniger umfassenden analytischen Behandlung bedürfen, mit Leichtigkeit ableiten. Wählen wir folgendes Beispiel:

Die Summe aller Kräfte, welche auf einer geschlossenen Oberfläche in der Richtung der Normalen nach Aussen wirken, ist gleich der Summe der innerhalb dieser Fläche befindlichen Massen multiplicirt mit 4π. Bezeichnet man die Richtung der Normale der gegebenen Fläche durch n, so lautet dieser Satz:

$$4\pi M = -\int \frac{dV}{dn} \cdot d\sigma,$$

wenn man unter $d\sigma$ ein Element der Oberfläche und unter V die Potentialfunction der Oberfläche (auf welcher die eingeschlossenen Massen geeignet verteilt gedacht werden können) versteht und die Integration über die ganze Oberfläche erstreckt. Offenbar ist diese Gleichung richtig, wenn man sich die Massen als Wärmequellen vorstellt. Die gesammte Mächtigkeit dieser Wärmequellen ist alsdann 4π mal der gesammten Masse. Denkt man sich um die Masse eine geschlossene Fläche gelegt, so muss die gleiche Wärmemenge durch diese hindurchgehen. Letztere kann aber analytisch durch $\int \frac{dV}{dn} . d\sigma$ dargestellt werden, da nach einer gemachten Bemerkung diese Wärme proportional dem Gefälle und der Oberfläche ist.

Durch geschickte Anwendung des Gauss'schen Satzes hat der Verfasser besondere Vereinfachungen erzielt. Sind M_1 und M_2 zwei Massensysteme und V_1 und V_2 deren Potentialfunctionen, so wird der Gauss'sche Satz ausgedrückt durch die Gleichung:

$$\Sigma M_1 V_2 = \Sigma M_2 V_1.$$

Hat man nun zwei geschlossene Oberflächen F_1 und F_2 und ladet man F_1 mit Electricität bis zum Niveau C_1, d. h. bis die Potentialfunction der electrischen Masse auf der Oberfläche von F_1 gleich C_1 ist, so sammelt sich auf F_2 entgegengesetzte Electricität, deren Quantität i_1 heissen soll. Man hat daher:

	Massensystem M_1	
Masse	m_1 auf F_1	$-i_1$ auf F_2
Potentialfunction	C_1 „ F_1	0 „ F_2.

Ladet man umgekehrt F_2 bis zum Niveau C_2 unter gleichen Umständen, so hat man:

	Massensystem M_2	
Masse	m_2 auf F_2	$-i_2$ auf F_1
Potentialfunction	C_2 „ F_2	0 „ F_1.

Die Anwendung des Gauss'schen Satzes gibt:

$$\Sigma m_1 C_2 - \Sigma i_1 C_2 = \Sigma m_2 C_1 - \Sigma i_2 C_1.$$

Da aber wieder nach dem Gauss'schen Satze $\Sigma m_1 C_2 = \Sigma m_2 C_1$, so folgt:

$$i_1 C_2 = i_2 C_1.$$

Sind die Spannungen C_1 und C_2 einander gleich, so wird

$$i_1 = i_2$$

und wir erhalten den Satz:

Sind 2 Massen m_1 und m_2 gegeben und verbindet man entweder m_1 mit einem Conductor der Electrisirmaschine, während m_2 ableitend berührt ist oder verfährt man umgekehrt, so wird im ersteren Falle auf m_2 dieselbe Electricitätsmenge inducirt, als im zweiten Falle auf m_1, vorausgesetzt, dass die Kraft des Conductors dieselbe geblieben ist.

Man vergleiche die einfache Ableitung dieses Satzes mit derjenigen, welche Clausius in seinen Abhandlungen über die Anwendung der mech. Wärmetheorie auf die electrischen Erscheinungen (Braunschweig, Fr. Vieweg und Sohn 1864) p. 92 — p. 97 gibt.

Mit Hülfe des Gefälles der Functionen und des Taylor'schen Satzes finden wir (p. 38. der Potentialtheorie) die Temperaturzunahme eines Elementarwürfelchens von der Temperatur U aus der Gleichung:

$$\frac{du}{dt}=\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(x\frac{du}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(x\frac{du}{dz}\right),$$

in welcher Gleichung t die Zeit und x die Wärmeleitungsfähigkeit bedeutet. Setzen wir $x=$ einer Function V und $u=$ einer Function U, so geht dieser Ausdruck über in:

$$\frac{dU}{dt}=V\left(\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}\right)+\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}\cdot\frac{dU}{dy}+\frac{dV}{dz}\cdot\frac{dU}{dz}.$$

Integriren wir den Ausdruck rechts über einen geschlossenen Raum, so stellt derselbe die Zunahme der Gesammtwärme des Raumes dar, wenn sich innerhalb derselben keine Wärmequelle befindet. In diesem Falle findet die Wärmezunahme durch Wärmezufuhr von aussen statt und diese lässt sich auch ausdrücken durch $\int V\frac{dU}{dn}d\sigma$, wenn man bedenkt, dass die in einen Raum eindringende Wärme proportional der Wärmeleitungsfähigkeit V, proportional dem Gefälle $\frac{dU}{dn}$ (n Normale) und der Oberfläche ist. Wir erhalten also:

$$\int V\frac{dU}{dn}d\sigma=\int V\Delta^2U+\int\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}\cdot\frac{dU}{dy}+\frac{dV}{dz}\cdot\frac{dU}{dz},$$

wobei das Integral links sich erstreckt über alle Oberflächenelemente des gegebenen Raumes, dagegen die Integrale rechts über alle Volumelemente des Raumes sich ausbreiten. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass in obiger Gleichung $\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}=\Delta^2U$ gesetzt wurde.

Sämmtliche Resultate dieser Art finden wir auch auf rein analytischem Wege abgeleitet.

Mit besonderer Leichtigkeit führt uns der Verfasser in die Kugelfunctionen ein und zeigt uns ihre ganze Bedeutung als unentbehrliches Hülfsmittel bei complicirteren Anwendungen der Potentialtheorie. Bei Betrachtungen über die Gestalt der Erde erfahren wir, dass die gegenwärtige Art der Nivellementzusammenstellungen, ein gerade in gegenwärtiger Zeit wegen der europäischen Gradmessung wichtiges Kapitel, nicht ganz richtig ist. Es wird vorgeschlagen die Höhendifferenz zwischen 2 Orten durch die Arbeit auszudrücken, welche man braucht um eine bestimmte Masseneinheit von dem einen Orte zu dem andern zu heben. Will man also die Höhendifferenz zweier Punkte durch ein Nivellement in correcter Weise bestimmen, so muss man nicht blos die Höhendifferenzen zwischen den einzelnen Punkten des Nivellements, sondern auch die Schwerkraft an diesen Punkten messen. Dieser Vorschlag bleibt so lange ohne practische Bedeutung, als man nicht im Stande ist die Erdschwere auf eine bequeme Art sehr genau zu bestimmen.

Bei der Theorie des inducirten Magnetismus geht Verfasser etwas weiter als Poisson. Letzterer nimmt an, dass die regelmässig um ein Atom gelagerten Atome auf diese keine Wirkung ausüben. Eine solche Analogie zwischen der Newton'schen Attraction und der magnetischen Anziehung findet jedoch, wie sich aus der Potentialfunction magnetischer Massen leicht ableiten lässt, nicht statt. Führen wir daher auch dieses Moment noch in unsere Betrachtung ein, so gelangen wir zu Gleichungen, welche den Poisson'schen zwar ähnlich sind, sich aber durch eine additionale Grösse von denselben unterscheiden. Diese Grösse ist von der Art und Dichtigkeit der als kugelförmig angenommenen Atome abhängig,

Während die meisten Werke über die mathematische Physik die Potentialtheorie eingehender bei der Electricität entwickeln, sehen wir in dem Werke von Wand die Potentialtheorie auch bei der Praecession und Nutation der Erdachse, bei der Wirkung von Ebbe und Flut etc. verwerthet. Diese schwierigen Kapitel sind im Ganzen klar abgehandelt. Bei nur einigen Figuren mehr wäre jedoch die Auffassung noch bedeutend erleichtert worden.

Ueberblicken wir das etwa 12 Druckbogen starke Werkchen, so fühlen wir uns mehr als befriedigt, bezüglich des Inhalts und der Uebersicht, welche bis jetzt noch nicht in dem Masse gegeben wurden. Auch heute noch, nachdem die vorzüglichen Werke von Thomson und Tait und diejenigen von G. Kirchhoff zu erscheinen begonnen haben, wird die Potentialtheorie von Wand ihre Stellung behaupten. Dieses Werk hat damit nicht aufgehört einem dringenden Bedürfniss abzuhelfen.

Bender.

Preisaufgaben

der

Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig.

Aus der Mathematik und Naturwissenschaft.

1. Für das Jahr 1875.

Die Frage nach der Lage der Schwingungsebene des polarisirten Lichtes ist trotz mannigfacher Bemühungen bis jetzt nicht entschieden worden. Die Gesellschaft stellt daher die Aufgabe:

> Es ist durch neue Untersuchungen die Lage der Schwingungsebene des polarisirten Lichtes endgültig festzustellen.

Preis 60 Ducaten.

2. Für das Jahr 1876.

Trotz der meisterhaften Arbeiten Leverrier's über die Bewegung des Merkur kann die Theorie dieses Planeten noch nicht als endgültig abgeschlossen betrachtet werden. Die Gesellschaft wünscht eine ausführliche

> Untersuchung der die Bewegung des Merkur bestimmenden Kräfte,

mit Rücksicht auf die von Laplace (in der Mécanique céleste), von Leverrier (in den Annales de l'Observatoire und den Comptes rendus de l'Académie des sciences), von Hansen (in den Berichten der Kön. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. vom 15. April 1863) und von Wilhelm Weber (vergl. Zöllner über die Natur der Cometen S. 333)

angedeuteten Einwirkungen. Ausser der vollständigen Berechnung der Störungen ist eine Vergleichung mit den Beobachtungen unerlässlich, um zu zeigen, bis zu welchem Grade der Genauigkeit sich die eingehenden Constanten bestimmen lassen. Die Construction von Tafeln zur Ortsberechnung behält sich die Gesellschaft vor zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

3. Für das Jahr 1877.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Comet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalien gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraums vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1786) sich erstrecken, so ist eine vollständige Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Cometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Cometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen, und stellt deshalb die Aufgabe:

> die Bewegung des Encke'schen Cometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 verflossenen Zeitraums zu untersuchen.

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

4. Für das Jahr 1878.

Die Entwickelung des reciproken Werthes der Entfernung r zweier Punkte spielt in astronomischen und physikalischen Problemen eine hervorragende Rolle. In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird die zuerst von Cauchy entdeckte Gleichung bewiesen

$$\frac{a}{r}\left(1+2e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{4\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{9\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{16\pi a^2}{r^2}}\ldots\right)=$$

$$=1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{16\pi r^2}{a^2}}\ldots$$

in welcher mit Rücksicht auf die zu erzielende Genauigkeit die positive willkürliche Constante a so gross gewählt werden kann, dass die Exponentialgrösse $e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}$ vernachlässigt werden darf. Alsdann hat man

$$\frac{a}{r} = 1 + 2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}} + \ldots$$

eine Reihenentwickelung von ungemein rascher Convergenz. Es steht zu erwarten, dass eine auf die vorstehende Formel gegründete Entwickelung der Störungsfunction in dem Problem der drei Körper sich für die numerische Rechnung als vortheilhaft erweisen werde. Die Gesellschaft wünscht eine unter dem angedeuteten Gesichtspunkte ausgeführte Bearbeitung des Störungsproblems zu erhalten.

Indem sie dem Bearbeiter die Wahl des besonderen Falles überlässt, in welchem die numerische Anwendbarkeit des Verfahrens gezeigt werden soll, setzt sie voraus, dass das gewählte Beispiel hinlänglichen Umfang und Wichtigkeit besitze, um die Tragweite der vorgeschlagenen Methode und ihr Verhältniss zu den bisher angewandten hervortreten zu lassen. Preis 700 Mark.

Die Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1875 Prof. Dr. Scheibner) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Litterarischer Bericht
CCXXX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Saggio di cronografia dei matematichi dell' antichità (A. 600 a. C. — 400 d. C.) Per Antonio Favaro, Professore nella R. Università di Padova. Padova 1875. Premiata Tipografia Francesco Sacchetto. Nozze di Fabio-Marzolo. 15 S. 1 Tafel.

In den gelehrten Kreisen Italiens herrscht die hübsche Sitte, Familienfeste durch litterarische Geschenke zu verherrlichen; diesem Usus verdankt auch die vorliegende Schrift ihre Entstehung *). Herr Favaro, ein um mathematisch-historische Forschung bereits mehrfach verdienter Gelehrter, hat es in derselben unternommen, eine tabellarische Zusammenstellung all der Männer zu liefern, welche sich im Verlaufe des angegebenen Jahrtausends mit Mathematik und verwandten Wissenschaften beschäftigt haben. In der Vorrede erwähnt der Verf. selbst Priestley's „Chart of Biography" und Poggendorff's „Lebenslinien" als seiner Vorbilder; indes hat es auch sonst nicht an derartigen Versuchen gefehlt: der Engländer Bonnycastle hat seiner Uebertragung von Bossut's „Geschichte der Mathematik" eine Liste der Mathematiker beigefügt, und gerade für die Periode, welche Herr Favaro bearbeitete, existirt eine immer noch schätzbare Arbeit. Die Schrift von Lüders (1776—1822) meinen wir, welche im Jahre 1809

*) Man erinnert sich des bei Gelegenheit der Verheiratung einer Tochter Brioschi's unter dem Titel „Alla Sposa" ausgegangenen Werkchens, welches einen Excurs Cremona's auf graphische Statik und Casorati's Untersuchungen über die Eigenschaften eines nicht-centrirten Linsensystems enthielt.

zu Altenburg und Leipzig erschien und trotz ihres seltsamen Titels „Pythagoras und Hypatia“ und einer schwülstigen Einleitung doch in jener Zeit viel Anklang gefunden zu haben scheint. Der Hauptteil des Büchleins besteht in einem anerkennenswert genauen Verzeichniss aller antiken Mathematiker, und zwar geht es in Detailangaben noch weiter als die dafür auch weit compendiösere italienische Arbeit. Indes ist natürlich Lüders so weit überholt, dass ein neues auf denselben Grundlagen erbautes Unternehmen dieser Art — zumal bei den annoch so sehr geringfügigen Hülfsmitteln zum Studium der Geschichte unserer Wissenschaft — von vornherein als verdienstlich zu bezeichnen ist. Auch hat unser Autor anstatt der von Lüders beliebten synchronistischen Anordnung die alphabetische gewählt, was bei einem hauptsächlich doch zum Nachschlagen bestimmten Katalog gewiss nur gebilligt werden kann.

Was nun die Ausführung selbst anlangt, so hat sich die Arbeit sehr, wir möchten fast sagen allzuweite Grenzen gesteckt, denn Herr Favaro rechnet auch Naturkunde, Geographie und Aehnliches mit herein, sodass in seiner Aufzählung auch Leute wie Pausanias, Tacitus, Plinius figuriren. Bei dem bekanntlich sehr engen Connex jedoch, in welchem im Altertum diese verschiedenen Disciplinen standen, mag man sich mit dieser Auffassung einverstanden erklären; nur hätte dann auch der Titel etwas modificirt werden sollen.

Die Aufnahme der einzelnen Namen ist offenbar eine schwierige Arbeit gewesen, und man wird im Allgemeinen zugestehen müssen, dass mit sehr grosser Sorgfalt zu Werke gegangen wurde und dass ohne ein gründliches Studium der antiken Schriftsteller — und zwar nicht bloss der dem Fach angehörigen — eine solche Vollständigkeit nicht erreicht werden konnte. Dem weit angelegten Plane zufolge sollte nämlich jeder Name berücksichtigt werden, dessen Träger irgendwo als Beförderer oder Kenner der Mathematik citirt wird, und so treffen wir denn hie und da auf Persönlichkeiten (z. B. Julia Domna, die bekannte geistreiche Princessin des Severs'schen Hauses), welche man eigentlich in dieser Gesellschaft nicht suchen würde, welche aber ein Autor, der sich absolute Vollständigkeit zum Ziele gesetzt hatte, wohl beiziehen durfte.

Dass diese Vollständigkeit nicht erreicht wurde und werden konnte, wird freilich Niemand wunder nehmen, der einen Begriff von antiker Mathematik hat. Wenn wir also nunmehr eine Reihe von Gelehrten namhaft machen, die unbedingt eine Stelle verdienen, so geschieht dies nicht, um Herrn Favaro's Leistung herabzusetzen, sondern lediglich um auch an unserem Teile etwas zur Lösung der von ihm vorgelegten gewaltigen Aufgabe beizutragen. Es fehlen die vorpythago-

rischen Geometer Mandryatos und Ameristos (Bretschneider, die Geometrie etc. S. 56.), es fehlt der gewandte Arithmetiker Tymaridas (Cantor, Mathem. Beitr. S. 97.), der zuerst ein gewisses System linearer Gleichungen auflöste, es fehlt endlich unter den Griechen der Optiker Heliodorus v. Larissa, der durch diese Auslassung gegen seinen Schüler Damian zurückgesetzt erscheint.

In der Reihe berühmter Römer vermissen wir den gewandten und mit der praktischen Geometrie seiner Zeit wohl vertrauten Agronomen Columella; überhaupt scheinen uns die Agrimensoren ein wenig stiefmütterlich bedacht worden zu sein. Frontinus findet sich allerdings vor, ebenso Aggenus Urbicus, nicht aber Balbus, Niphus und Hyginus; das Gleiche gilt sogar auch für den Namensvetter des letzteren, den Verfasser des astronomischen Lehrgedichts. Dass die Namen der griechischen Feldmesser, welche Julius Caesar zur Vermessung seines Reiches berief, umsonst gesucht werden, die Theodotus, Polyclitus, Zenodoxus, Didymus und wie sie alle heissen mochten, daraus ist in keiner Weise dem Büchlein ein Vorwurf zu machen, denn dieselben sind verborgen in einer auch in Deutschland wohl nur wenig, auswärts also gar nicht bekannt gewordenen Abhandlung unseres grossen Philologen Ritschl *); nur zwei dieser Männer kommen schon im zweiten Bande des Humboldt'schen Kosmos vor.

Die Schreibart der Namen hat der Verf. so gewählt, dass jedes Wort unverändert gegeben und nicht erst der dem Italienischen eigentümlichen Verstümmelung unterworfen wurde, was bei einem für weitere Kreise bestimmten Buche sehr am Platze war. Statt Hyppias ist indes Hippias zu lesen, und die Form Oenopidus ist wohl nur ein Druckfehler anstatt des richtigen Oenopides.

Eine sehr hübsche Idee war es, alle die Capacitäten, welche im Texte vereinigt waren, zum Schluss in eine Tafel zusammenzuordnen. Schon Quetelet hat in seiner bekannten „Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges" eine ähnliche Statistik des wissenschaftlichen Fortschrittes zu geben versucht; er wählte eine Art Coordinatenmethode und erhielt so (S. 374.) eine Curve, deren Ordinate gegen das Ende des siebzehnten Jahrhunderts ihr Maximum erreicht. Anders und unseres Erachtens für viele Namen übersichtlicher ist die graphische Darstellung Favaro's. Er teilt nämlich das den ganzen Zeitraum repräsentirende Rechteck in Streifen, deren jeder einem Jahrzehnt entspricht, und trägt in jede dieser Zeilen die sämmt-

---

*) Ritschl, Die Vermessung des römischen Reiches unter Augustus, die Weltkarte des Agrippa und die Cosmographie des sogenannten Aethicus, Rhein. Museum f. Philol. Jahrg. 1842. S. 481 ff.

lichen Mathematiker ein, deren Blütheperiode in jene Zeit fällt. Man bekommt so für die unmittelbare Betrachtung kenntlich gewissermassen die Dichtigkeit des mathematischen Genie's in den einzelnen Epochen zu Gesichte.

Zum Schlusse stehen wir nicht an, dem von uns hoch geachteten Verfasser für seine Leistung unseren Dank auszusprechen und ihn aufzufordern, auch das Mittelalter und die Neuzeit einer ähnlichen Bearbeitung zu unterwerfen.

München. S. Günther.

Methode und Principien.

Elemente des graphischen Calculs. Von Dr. Luigi Cremona, Professor, Direktor der königl. Scuola d'Applicazione per gl' Ingegneri in Rom. Autorisirte deutsche Ausgabe. Unter Mitwirkung des Verfassers übertragen von Maximilian Curtze. Mit 131 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Leipzig 1875. Verlag von Quandt & Haendel. VI. 105 S.

Herr Curtze hat sich durch seine zahlreichen Uebersetzungen italienischer Schriften (Sella's geometrisches Zeichnen, Brioschi's Inauguralrede, Gherardi's Untersuchungen über die mathematische Facultät von Bologna, Cremona's zwei Werke über die Curven und Flächen) bereits ein grosses Verdienst um die mathematische Litteratur beider jetzt so nahe verbundener Länder erworben, so dass über die Uebersetzung an sich wohl kaum etwas zu sagen sein dürfte. Sollen wir jedoch unsere subjective Ueberzeugung aussprechen, so halten wir dafür, dass die vorliegende Bearbeitung eines italienischen Autors dem Herrn Uebersetzer ganz besonders gelungen ist und sehr geeignet sein wird, um die hervorragenden Vorzüge des Originals auch in der deutschen Version klar darzulegen.

Welches diese Vorzüge sind, werden wir am besten erkennen, wenn wir den Inhalt des Büchleins kurz vor unserem Auge vorübergehen lassen. Wie die Specialdisciplin, welche wir gegenwärtig als graphischen Calcul oder auch Arithmographie bezeichnen, sich allmälig ausbildete, hat kürzlich J. Weyrauch im 5. Hefte des 19. Jahrgangs der „Zeitschr. f. Math. u. Phys." ausführlicher erörtert. Freilich fällt er am Schlusse seiner Skizze ein sehr abfälliges Urteil über ihren wissenschaftlichen Wert und meint, dieselbe liesse sich ihrem ganzen Umfange nach auf zehn Octavseiten bequem darstellen. Eigentümlicherweise berührt sich diese Skepsis eines Ingenieurs mit der Ansicht Grunert's, der in seiner Recension des einen ähnlichen Zweck

anstrebenden Lehrbuchs von Ott der graphischen Rechenkunst eine gleich negative Perspective eröffnet (Litt. Ber. CCXIII.). Sehen wir zu, wie dem gegenüber der erste Geometer Italiens den Aufbau der jungen Wissenschaft in Angriff nimmt.

Derselbe beginnt mit einer eingehenden Erklärung und Discussion des gewöhnlich auf Möbius zurückgeführten Princips der Vorzeichen, dessen sachgemässe Formulirung jedoch, wie Hankel (Gratulationsschrift an Möbius, Leipzig 1864.) gezeigt hat, einem älteren deutschen Mathematiker, Busse in Dessau, zugeschrieben werden muss. Daran schliessen sich weitere Definitionen: es werden erklärt der Begriff der Aequipollenz, welchen Bellavitis in Padua zur Grundlage eines eigenen Systems gemacht hat, der Begriff des Drehsinnes eines Winkels und damit überhaupt der ganzen Ebene etc. Die elementarste Fläche, die des Dreiecks, wird durch Bewegung eines Fahrstrahles erzeugt, und unmittelbar daran schliesst sich ein Flächensatz, der mit dem von Varignon Aehnlichkeit hat. § 17. giebt uns dann die Definition des Linienzuges, der in einem speciellen Falle als Polygon bezeichnet wird. Ist ein solcher Linienzug geschlossen, so kann man von einem Flächeninhalt desselben sprechen, und es werden Regeln gegeben, wie man denselben bestimmen kann. Weist der umschliessende Zug mehrfache oder, wie es hier heisst, Knotenpunkte auf, so bedarf es einer genaueren Feststellung des Begriffs Flächeninhalt. Für denselben wird zunächst die Möbius'sche Regel angegeben, welche einen Pol zu Hülfe nimmt, dann aber folgt auch die von Möbius in seiner berühmten Abhandlung „Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyëders“ niedergelegte Vorschrift, der zufolge jede einzelne Flächenzelle, welche von Teilen des Linienzuges begränzt ist, einen (positiven oder negativen) Coëfficienten erhält und mit diesem in Rechnung gebracht werden muss. Die Figuren, an denen Cremona das Verfahren versinnlicht, scheinen uns mit grossem pädagogischen Tacte ausgewählt zu sein, und vor Allem möchten wir es als bemerkenswert hervorheben, dass in Fig. 18ª ein Linienzug abgebildet ist, in welchem der Coëfficient 3 vorkommt, während alle uns sonst bekannt gewordene Darstellungen nicht über den Coëfficienten 2 hinausgehen (Pentagramma etc.). Dagegen können wir uns nicht ganz damit einverstanden erklären, dass von der Schraffirung der beiden „Ufer“ einer Geraden, welche bereits der Urheber dieser ganzen Betrachtungsweise, A. L. F. Meister, mit Vorteil zu brauchen wusste, Abstand genommen worden ist. Denn einmal gewinnt dadurch wesentlich die Uebersichtlichkeit der ganzen Zeichnung, und dann glauben wir auch, dass die Bestimmung des Coëfficienten, welcher einer gegebenen Zelle zukommt, leichter ist, wenn man sie in jener Weise charakterisirt vor sich hat, als im entgegengesetzten Fall. In der historischen

Uebersicht über die Fortschritte in der Entwickelung des allgemeinen Vielecksbegriffes, welche wir als Teil eines umfänglicheren Werkes demnächst erscheinen zu lassen gedenken, haben wir die Regel von Möbius in dem hier angedeuteten Sinne umzugestalten versucht. Den Schluss des ersten Capitels bildet ein zweckentsprechend neu formulirter Lehrsatz von Apollonius.

Im zweiten Capitel finden wir eine sehr ausführlich gehaltene Behandlung der Lehre von der graphischen oder geometrischen Addition von Strecken; besonders möchten wir auf den schönen Beweis des Theorems hinweisen, dass die Resultante mehrerer gegebener Strecken von der Ordnung, in welcher man die Zusammensetzung vornimmt, unabhängig ist*). Die Darstellung lehnt sich bis § 43. stets an die gebräuchliche statische Vorstellung an; von da ab wird diese jedoch verlassen, indem nunmehr die Resultante rein geometrisch so definirt wird: Die Summe der Flächeninhalte aller Dreiecke, welche bezüglich eine der zu addirenden Strecken — Segmente nennt sie Cremona — als Grundlinie und einen festen Punkt als Spitze haben, ist gleich dem Dreieck, dessen Spitze der nämliche Punkt und dessen Basis die Resultante ist. Bei sämmtlichen Beweisen wird durch den Begriff der Aequipollenz sehr an Kürze gewonnen. Die Subtraction der Strecken wird nicht speciell durchgenommen; sie ist vielmehr, was nur gebilligt werden kann, im Früheren schon mitbegriffen, da stets von algebraischen Summen die Rede war, resp. der Sinn einer Linie gebührend mitberücksichtigt wurde.

Das dritte Capitel bringt die Multiplication einer Strecke mit einem Verhältniss, aus der sich dann auch die Division leicht ableitet; zur Ausführung dieser letzteren wird die Spirale des Archimedes beigezogen. Dann wird die Aufgabe behandelt: Zu einer Punktreihe auf einer anderen Geraden die ihr ähnliche zu finden. Sind diese beiden Geraden parallel oder schneiden sie sich in einem beiden Reihen zugleich angehörigen Punkte, so ist die Sache sehr einfach; im allgemeinsten Falle betrachtet Herr Cremona die Verbindungslinien je zweier zusammengehöriger Punkte als Tangenten einer festen Parabel, welche jedoch nicht gezeichnet vorzuliegen, sondern blos durch zwei ihrer Tangenten bestimmt zu sein braucht. Wie man mit Hülfe dieser Construction, also ganz im Sinne der graphischen Arithmetik, eine für den praktischen Seefahrer wichtige Aufgabe lösen kann, hat

---

*) Wir möchten an dieser Stelle darauf hinweisen, dass der Grund, welchen R. Wolf (Handbuch d. Math. S. 123) gegen den von Burg geführten und aus deren Gründen allerdings nicht stichhaltigen Beweis für das Kräfteparallelogramm anführt, selbst nicht stringent ist, denn die Grösse der Diagonale wie ihre Lage bleibt stets dieselbe.

Paugger (dies Archiv, 42. Band) gezeigt. In höchst eleganter Weise wird dann schliesslich das schon sehr allgemeine Problem behandelt, eine Reihe von nach Grösse, Lage und Sinn gegebenen Strecken mit ebenfalls bekannten Verhältnissen zu multipliciren. Hiebei wird mehrfach von einem Strahlbüschel und insbesondere auch von einem Parallelstrahlenbüschel gesprochen, und da das Buch, nach Aussage des Herrn Uebersetzers, ungefähr das Publicum unserer Gewerbeschulen zur Voraussetzung hat, so möchten wir vorher eine etwas genauere Erklärung dieser Begriffe wünschen.

Im vierten Capitel (Potenzirung) wird der geometrischen Progression der rechtwinklig gebrochene Linienzug, dessen Ecken abwechselnd auf den Schenkeln eines rechten Winkels liegen, als Analogon gegenübergestellt. Für die Wurzelausziehung (sechstes Capitel) dient als Basis die „gleichwinklige Spirale", deren Natur in § 75. durch einen schönen und, wie es uns wenigstens scheint, neuen Lehrsatz festgestellt wird. Die Construction der Curve stellt dieselbe dar als eine ununterbrochene Folge von Kreisbögen verschiedener Radien, oder, kürzer ausgedrückt: Aus einer gegebenen Spirale kann man eine andere dadurch herleiten, dass man die Evolute derselben bildet*). Die Spirale kann dann unverzüglich zur Radicirung verwandt werden, und wegen einer dabei hervortretenden charakteristischen Eigenschaft führt sie auch den bekannteren Namen „logarithmische Spirale". Uebrigens leistet, wie § 83 ff. die Logistik die nämlichen Dienste, d. h. ob man, analytisch gesprochen, die denkbar einfachste Exponential-Relation zweier veränderlichen Grössen durch rechtwinklige oder polare Coordinaten deutet, bleibt gleich.

Von besonderem Interesse ist das sechste Capitel, denn hier giebt uns der Verfasser eine abgerundete und leicht verständliche Erläuterung der Lill'schen Methode, algebraische Gleichungen graphisch aufzulösen. Der verwandte Apparat besteht der Hauptsache nach auf einer mit Coordinaten-Papier überzogenen festen Tafel, um deren Mittelpunkt eine durchsichtige Scheibe drehbar ist. Auf ersterer wird der die Gleichung repräsentirende Linienzug aufgezeichnet und dann durch Drehen der Linienzug herausgefunden, welcher eine Wurzel bestimmt. Wollte man hiebei ganz allgemein verfahren, so musste natürlich auf die bekannte geometrische Darstellung der imaginären Grössen mit einigen Worten eingegangen werden.

Das achte Capitel enthält die Lehren vom Schwerpunkt, der hier natürlich nicht in seiner physikalischen Eigenschaft, sondern als Punkt

---

*) Hier hätte auch die Abhandlung von Schlömilch (Zeitschr. f. Math. u. Phys. Jahrg. 1869.) erwähnt werden können.

der mittleren Entfernungen aufgefasst wird. Alle Constructionen zeichnen sich durch Eleganz aus und nehmen stets auf die Bedürfnisse des Praktikers Bedacht; für das Viereck verdient auch die von Endemann in dieser Zeitschrift zusammengestellte Sammlung von Verzeichnungsweisen Beachtung. Im Schlusskapitel endlich werden mehrere Methoden zur approximativen Rectificirung des Kreises und seiner Teile durchgesprochen; die letzte derselben stimmt mit der von Kochanski überein (vergl. unsre Abhandlung im 1. Hefte dieses Jahrg. der Schlömilch'schen Zeitschrift) und bedarf nur einer einzigen Zirkelöffnung *).

Diess eine kurze, aber für diesen Ort vielleicht schon zu lang geratene Uebersicht des reichen Inhaltes. Strenge auf der einen, populär im guten Sinne auf der andren Seite zeichnet sich das Buch vor deutschen Schriften durch die schöne Klarheit aus, welche nun einmal den romanischen Völkern in höherem Grade als den germanischen eigen zu sein scheint. S. Günther.

Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes. Par M. J. Hoüel, Professeur à la Faculté des sciences de Bordeaux. Prag 1875. Grégr & Dattel.

Die Rolle der Erfahrung in den exacten Wissenschaften bietet der Untersuchung ein sehr weites Feld. Ohne gerade das Thema im Detail erschöpfend zu behandeln, ist es sehr wol ausführbar, die verschiedenen Seiten des Gegenstandes zu entfalten, die, Erklärung verlangenden Fragen vorzuführen und zur befriedigenden Entscheidung zu bringen. Hierin ist noch wenig getan, weil man einen Anteil der Erfahrung an den exacten Wissenschaften nur einräumte, soweit man gezwungen war. Man forschte nicht nach der empirischen Quelle des Wissens, soweit man dieses für hinreichend gesichert hielt, weil die Kenntniss des empirischen Ursprungs der gehegten Meinung Abbruch zu tun schien, sondern constatirte höchstens als Zugeständniss an die Wahrheit, dass diese und jene Punkte auf Erfahrung beruhen, ohne die Unabhängigkeit alles übrigens Wissens von der Erfahrung dabei je in Frage zu stellen. Die Wege der Erfahrung, auf welchen die ideellen Begriffe, die lagischen, insbesondere die mathematischen Fähigkeiten entstehen, zu untersuchen, ist unbestritten eine Sache von grosser Bedeutung und auch von praktischer Wichtigkeit in pädagogischer Hinsicht; dennoch schenkt man der Untersuchung einem Wahne zu Liebe, den sie zerstören muss, keine Aufmerksamkeit.

---

*) Hier werden besonders auch Rankine'sche Arbeiten beigezogen; die Verdienste dieses Gelehrten in Hinsicht auf graphische Methoden hat kürzlich Quekia (Bull. Bonc, Tomo VII. 1. Heft) eingehend beleuchtet.

Auch die gegenwärtige Schrift untersucht nicht von Grund aus die Rolle der Erfahrung in den Principien der exacten Wissenschaft; sie benügt sich damit, einige Punkte zu betrachten, in denen wir noch stets auf Erfahrung zurückgehen oder uns an neue Erfahrung wenden müssen. Wo die Sicherheit der Denkoperationen befriedigend ist, nimmt sie die Frage überhaupt nicht auf, im andern Fall constatirt sie nur die Teilnahme der Erfahrung. In dieser Beziehung bemerkt sie vor allem den hervortretenden Unterschied zwischen der discreten und concreten Grösse. Die Operationen der Arithmetik werden ohne neue Erfahrung vollzogen (wenn gleich manchmal auch hier Sätze empirisch gefunden werden), und ihre Resultate stimmen genau mit der Wirklichkeit. Dabei bleibt jedoch unerwähnt, dass auch Begriff und Anwendung der discreten Zahl ganz von Erfahrung abhängig ist und bleibt. Der Begriff fusst auf die Identität, über die erst entschieden sein muss, damit man mit Sicherheit zählen kann; z. B. würde die Zahl von Punkten in Bewegung, deren verschiedene zusammenfallen, deren identische verschieden liegen können, an sich unbestimmt und ganz von der Betrachtungsweise abhängig sein. Hier kommt nun das grosse Bereich der Materie zustatten, innerhalb dessen jede Identität für alle Zeit empirisch mit so befriedigender Sicherheit feststeht, dass wir an den empirischen Grund nicht zu denken pflegen. Solange man nur dieses Bereich vor Augen hat, besitzt die Arithmetik eine Basis, die ihr alles Reflectiren auf weitere Erfahrung erspart. Auf materielle Identität ist aber der Zahlbegriff nicht beschränkt. Zählen wir Wiederholungen von Acten, so bildet die Zeit das Kriterium der Nichtidentität; die Zahl ist dann ein einzelnes Factum, und erst durch hinzutretende Empirie vergleichbar, was man indes gewöhnlich nicht merkt, weil man die zeitliche Succession sogleich in eine sichtbare Reihe umzuwandeln, und so materiell zu stabilisiren pflegt.

Der Arithmetik gegenüber, welche allerdings von der Empirie freier ist als sonst eine Wissenschaft, stellt sich die Geometrie als eine solche dar, die nicht durch logische Operationen die Wirklichkeit vorzuzeichnen vermag. Sie idealisirt erst die beobachteten Gegenstände und bringt sie durch Abstraction unter vereinfachte Gesichtspunkte. Gleich der theoretischen Mechanik gründet sie sich auf Hypothesen, nur dass diese zu den ihrigen noch andere hinzufügt. Der Verfasser sagt nun, beide Wissenschaften betreffend, von einer auf Hypothesen gebauten Theorie, die in sich frei von Widersprüchen sei, während sie der Wirklichkeit genau oder approximativ oder auch gar nicht entsprechen könne, sie sei „absolut wahr". Man würde geneigt sein, dieses Attribut, welches sich sofort widerlegt, indem das absolut Wahre gleich nachher falsch genannt wird, als verfehlte Benennung durch eine zutreffendere zu ersetzen. Doch so sachlich be-

deutungslos ist der Fehler nicht: er wurzelt in der Chimäre einer aprioristischen Logik, und steht der Untersuchung des wahren Sachverhalts im Wege, einerseits indem er der Frage nach der empirischen Quelle der mathematischen Logik vorgreift, andrerseits indem er die Bedeutung der ideellen Theorie für die Wirklichkeit in ein falsches Licht stellt. Bleiben wir einfach bei dem stehen, was wir wissen, ohne mehr behaupten zu wollen, nennen wir also eine solche Theorie bedingt richtig, denkbar, möglich, so verbleibt ihr noch dieselbe Rechtfertigung und derselbe Wert, und sie gewinnt eine klarere Stellung innerhalb der Gesammtaufgabe der Wissenschaft. Die Theoreme, sofern sie idealisirte Objecte haben, bedürfen gar nicht der Rechtfertigung, dass sie der Wirklichkeit nahezu entsprechen; denn die Erkenntniss hat überhaupt nicht die Wirklichkeit zu copiren, sondern die Werkzeuge zu ihrer geordneten Auffassung zu liefern. Durch dieses Ziel, mag es nun teilweise erreicht sein oder in Aussicht stehen, bleibt ihr Wert stets bedingt. Aehnlich verhält es sich mit den imaginären Einführungen; das in Aussicht stehende, apodiktisch erkannte reelle Resultat macht ihre Geltung aus, und als imaginär lassen sich alle von der Wirklichkeit sich entfernenden Hypothesen betrachten. Nicht wesentlich verschieden, wiewol unter anderm didaktischen Gesichtspunkt, tritt der Fall auf, wo die Theorie von Bestimmungen der Wirklichkeit abstrahirt, wie z. B. die Geometrie der Lage. Gleich wie die reelle Grösse ein specieller Fall der imaginären, so ist auch hier die Wirklichkeit als specieller Fall in der Theorie enthalten. Der Zweck der Einführung, die für beide in Verallgemeinerung besteht, ist nicht derselbe. Durch die Abstraction wird der logische Connex eines Bestandteiles der Geometrie, der in der Gesammtheit schon implicirt vorhanden war, isolirt und dadurch der Beobachtung blosgelegt, durch die imaginäre Einführung hingegen werden neue Connexe geschaffen.

Die vorliegende Schrift behandelt nun insbesondere die in der Geometrie enthaltenen, aus der Erfahrung stammenden Elemente. Kurz im voraus erwähnt wird die Hypothese der Existenz eines unbeweglichen und unbegrenzten (indéfini) Raumes. Was heisst nun zuerst „unbeweglicher Raum"? Unter „Raum" wird hier offenbar die umfassende Basis aller räumlichen Bestimmungen verstanden. Gesetzt man könnte darin die Lage jedes Punkts relativ zur ganzen definiren, dann würden zur Bestimmung der Unbeweglichkeit des in sich festen Systems noch 12 Stücke erfordert, deren 9 ganz undefinirbar, 3 erst mit Hülfe der Mechanik bestimmbar wären. Für die Geometrie fallen mit dem Causalbegriff auch diese 3 Bestimmungen ausser Betracht. Die Lage der Basis ist dann ganz willkürlich, ihre Unbeweglichkeit keine Frage der Erfahrung, sondern zur Verein-

fachung der Betrachtung, die eigentlich eine relative sein würde, sich aber so in eine absolute umwandeln lässt, angenommen. In dieser der Natur der Sache angemessenen Weise fasst in der Tat die analytische Geometrie den Raum auf. Die praktische Geometrie hingegen (gleichwie die gemeine Vorstellung) hat stets eine empirische, aber nur zeitweilig unbewegliche Basis: je nach den Gegenständen der Betrachtung ist der Horizont, der Erdäquator, die Ekliptik massgebend, und nach jedem Uebergang der Betrachtung bewegt sich derjenige Raum, der vorher stillstand.

Nun bleibt noch die Unbeweglichkeit des Raumes in sich übrig. Sie lässt sich nur durch die Unveränderlichkeit der Lineardimensionen auffassen. Hierzu dient die empirische Hypothese fester Körper, repräsentirt in der Geometrie durch das Zirkelinstrument. Diese Hypothese ist die erste in der Geometrie. Sie reicht indes nicht aus, die Lineardimension absolut zu bestimmen; vielmehr behält dieselbe einen willkürlichen constanten Factor, der als zehntes undefinirbares und nicht empirisches Element hinzukommt.

Die Eigenschaft des Raumes, dass er unbegrenzt ist, lässt sich nicht wol als unabhängige Hypothese bezeichnen. Man kann dieselbe noch in doppeltem Sinne nehmen. Dass der Raum über jede Grenze hinaus Fortsetzung findet, hängt von dem Gesetze dieser Fortsetzung ab; dass er bei seiner Fortsetzung nicht periodisch in sich zurückläuft, ist bedingt durch die Art der Gebilde in ihm. In beiderlei Sinne ist die Eigenschaft zwar eine empirische, aber sie wird durch näher bestimmte Hypothesen involvirt, die wir doch nicht entbehren können, und die sie nicht zu ersetzen vermag.

Einige der genannten, zur Unbeweglichkeit des Raumes gehörigen Punkte hat der Verfasser durch die, gleich nachher folgende Bemerkung berücksichtigt, dass die Unveränderlichkeit der Figuren undefinirbar sei, und dass wir nur relative Aenderungen der Figur und relative Verrückungen beobachten können.

Die Musterung der empirischen Elemente zeigt nun zunächst die Eigenschaft des Raumes, dass sich jede Figur in ihm ohne Aenderung verschieben lässt; dann die Unterscheidung zwischen Rechts und Links, wodurch der Sinn der Rotation bestimmt wird. Uebergangen ist auffallenderweise die Periodicität der Rotation. Ferner ergibt die Rotationsaxe die Idee der geraden Linie. Die der Ebene wird erklärt durch eine Fläche, die sich umgekehrt in jeder Lage deckt. Hierauf spricht der Verfasser von der Lobatschefsky'schen Geometrie, sofern aus ihr die Euklidische erst durch die neue Hypothese, dass ein gewisser Parameter, der bei den vorausgehenden willkürlich bleibt, null sei

hervorgeht. Die Erfahrung kann offenbar deren Richtigkeit nicht dartun, sondern nur constatiren, dass der Parameter eine gewisse Grenze nicht übersteigt. Hierzu bemerkt nun der Verfasser, die Erfahrung habe nicht in dieser Weise die ersten Erfinder der Geometrie gelehrt, welche, wie noch jetzt Viele, Erfahrung und Vernunft nicht geschieden hätten. Allerdings besteht die Rolle der Erfahrung in der Geometrie nicht darin, dass sie irgend ein Glied zum Beweise, irgend ein ergänzendes exactes Datum lieferte. Und in der Tat können sich Manche von dieser Vorstellungsweise nicht losmachen: davon gibt die im 226. litt. Bericht S. 11. besprochene Schrift ein recht entschiedenes Beispiel. Aber die Erfahrung hat eine andere Rolle, in der sie unersetzlich ist: sie beweist nicht, dass jener Parameter null ist, aber sie lehrt eine ideelle Geometrie (die Euklidische), in welcher er null ist. Hierzu ist es wesentlich, dass das Erfahren ungenau, unvollkommen, nicht generell ist; denn die Differenz des Erfahrenen mit der Forderung des Zweckes, den die Erfahrung schon in ihrer Unvollkommenheit an die Hand giebt, ist es, was den ideellen Begriff zum Bewusstsein bringt. Der Verfasser verfolgt jedoch von seiner Bemerkung aus die Rolle der Erfahrung nicht, sondern rügt einen Misbrauch des Wortes „Evidenz“, indem man Evidenz als ein Drittes zwischen Erfahrung Räsonnement stelle; es sei damit eine so oft wiederholte Erfahrung bezeichnet, dass die Macht der Gewohnheit das Bewusstsein austilge. Schliesslich wird als Resultat aufgestellt, dass die Geometrie, wie die mathematische Physik, aus einem physischen und einem theoretischen und abstracten Teile bestehe, und dass nur der letztere exact zu nennen sei. Hinsichtlich der Resultate wird man dies zugeben, doch diese machen den Inhalt der Wissenschaft nicht aus; hinsichtlich der Forschung werden wir eine Methode, auch wo ein exactes Ergebniss nicht erreicht wird, immer exact nennen, wenn sie nur mit dem Bewusstsein der Grenzen des exacten Wissens verbunden ist, und mit rationalen Mitteln ein exactes Ziel anstrebt.

H.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Tafel zur bequemen Berechnung zwölfstelliger gemeiner Logarithmen und umgekehrt. Berechnet und zusammengestellt von Ernst Sedlaczek, k. k. Major und Archivar des k. k. militär-geographischen Institutes. Wien 1874. Im Selbstverlage des Verfassers. 16 S.

Diese Tafel ist mit Erklärung in deutscher und in lateinischer Sprache besonders herausgegeben. Die eigentliche, für den Zweck

notwendige Tafel nimmt nur eine halbe Octavseite ein. Die andre Hälfte enthält Logarithmen von Producten der Zahlen 2 bis 19, die Kehrseite die Logarithmen der Primzahlen bis 1423, sämmtlich auf 12 Stellen. Der Verfasser hat hier ein, auch sonst nicht unbekanntes und schon mehrfach realisirtes Princip in der Weise angewandt, dass die Tafel auf ein Minimum reducirt wird, während die Rechnungsoperationen sich vermehren. Man scheidet aus einer gegebenen $2n$ ziffrigen Zahl successive Factoren von der Form

$$1+\delta 10^{-k} (k=0,1,\ldots n) (\delta=0,1,\ldots 9)$$

mit dem niedrigsten k anfangend durch Division ab, so dass nach n Divisionen ein Factor

$$1+D10^{-2n} \text{ (}D\text{ eine } n \text{ ziffrige Zahl)}$$

übrig bleibt. Die Logarithmen der $9(n+1)$ möglichen Werte von $1+\delta 10^{-k}$ (da $\delta=0$ nicht in Rechnung kommt), muss nun die Tafel geben, während

$$\log(1+D10^{-2n}) = D\log e \,.\, 10^{-2n}$$

durch eine Multiplication auf n Stellen zu berechnen ist, wozu man auch eine n stellige Logarithmentafel verwenden kann. Um den anwachsen Fehler der letzten Stelle zu vermeiden, wird man die Operationen mit 1 oder 2 überschüssigen Stellen vollziehen, auch zeigt die Tafel an, ob zur letzten Ziffer eine positive oder negative Grösse hinzukommt. In der vorliegenden Tafel ist $n=6$, doch zur Sicherheit $k=7$ mit berücksichtigt. In der Erklärung wird auch eine Methode angegeben, die Divisionen auf leichteste Weise zu vollziehen. Wie die inverse Berechnung auszuführen ist, liegt auf der Hand.

H.

Fünfstellige Logarithmen der Zahlen und trigonometrischen Functionen nebst den Logarithmen für Summe und Differenz zweier Zahlen, deren Logarithmen gegeben sind, sowie einigen anderen Tafeln, mit einer neuen, die Rechnung erleichternden Anordnung der Proportionalteile. Von Dr. A. M. Nell, Professor am Polytechnicum zu Darmstadt. Dritte verbesserte Auflage. Darmstadt 1874. Johann Philipp Diehl. 104 S.

Ausser den auf dem Titel angegebenen Tafeln enthält das Buch dreistellige Logarithmen der Zahlen und trigonometrischen Functionen, Hülfstabellen für mathematische Geographie, Logarithmen oft vorkommender Zahlen, goniometrische und trigonometrische Formeln. Die auf dem Titel erwähnte erleichternde Anordnung der Proportionalteile besteht darin, dass dieselben in die bezügliche Zeile gesetzt

sind; sie ist keineswegs neu, sondern man pflegt nur meist aus praktischem Grunde davon abzugehen. Auf Bequemlichkeit ist überhaupt viel Rücksicht genommen; ob sie wirklich dadurch gefördert ist, darüber denken wol Verschiedene verschieden. Das Ausrechnen ist in manchen Stücken, namentlich bei einziffriger Rechnung, wie sie die Interpolation fünfstelliger Logarithmen erfordert, leichter als das Nachschlagen und Ablesen. Daher kann die detaillirte Aufführung, wenn sie ein gewisses Mass übersteigt, aufhören ein Vorzug zu sein. Eine Zugabe in anderm Sinne ist es, dass jedesmal die letzte Ziffer unterstrichen ist, wenn der Rest negativ ist. Ob man davon je Gebrauch machen kann, wenn es sich um Sicherheit der letzten Ziffer handelt, ist indes sehr fraglich.

Litterarischer Bericht

CCXXXI.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Vorschule der Geometrie. Ein methodischer Leitfaden beim Unterricht in der geometrischen Anschauungslehre für die untern Classen der Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminare, sowie zum Selbstunterricht, besonders für Volksschullehrer. Von Prof. J. C. V. Hoffmann, Gründer und Redacteur der Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht. I. Lieferung. Erste Hälfte der Planimetrie (Seite 1—151). Mit 230 in den Text eingedruckten Holzschnitten und 2 Figurentafeln. Halle a. S. 1874. Louis Nebert.

Das Vorliegende ist eine recht vielseitige Anleitung, Bemerkungen an Raumgebilden zu machen und durch Zeichnung zu fixiren. Sie hält sich gleich fern von der wissenschaftlich theoretischen wie von der auf bestimmte Anwendung gerichteten praktischen Doctrin. Hätte eine solche Anschauungslehre den Zweck diejenigen, welche nie Mathematik zu treiben gedenken, mit deren elementaren Gegenständen vertraut zu machen, ihnen einen Ersatz an geistiger Anregung zu geben, auch wol sie für angewandte Geometrie ohne Selbstproductivität vorzubilden, so wäre ihre Nützlichkeit gewiss anzuerkennen. Eine Vorschule zur Geometrie aber ist sie nicht; und da sie hier so genannt wird, so muss auf die Täuschungen hingewiesen werden, auf denen diese Bestimmung gemeinhin beruht. Unstreitig ist die Anschauung eine Tätigkeit, welche den logischen Acten der Begriffsbildung und des Schliessens vorausgeht. Wenn man aber meint letztere solange ausser Uebung setzen zu können, bis erstere bis zu einer gewissen Reife entwickelt sei, so ist dies ein Irrtum. Sie werden factisch geübt, aber incorrect und unklar, wenn ihnen die Gele-

genheit zur Controle abgeht. Hat doch selbst der Verfasser es nicht zu vermeiden gewusst, allgemeine, abstracte Begriffe, und zwar incorrecte und unklare, in die Anschauungslehre zu ziehen (wovon weiterhin); viel weniger vermag ein Kind die Geistestätigkeiten gesondert zu erhalten, die sich von Natur unterstützen. Die Beobachtung bleibt eine unzureichende, vielfach unvermerkt unbestimmte, wenn man von einem Gegenstand zum andern weiter geht, ohne Grund und Zusammenhang finden zu lassen, und nur äusserliche Umstände vorführt. Geschieht dies wie hier in grossem Umfange, so kann nur eine Gewöhnung an mangelhafte Bestimmung im Beobachten und Denken die Folge sein, welche zur Mathematik untauglich macht. Sehen wir von der Ankündigung als Vorschule der Geometrie ab, so lässt sich als Vorzug der gegenwärtigen Bearbeitung der Anschauungslehre eine grosse Reichhaltigkeit in der Berücksichtigung der äussern Umstände nennen, die ohne weitgehende Synthese schon in den einfachsten Gebilden zu Tage kommen. Wenn der Verfasser als Eigenschaften des Buchs hervorhebt grössere Berücksichtigung der Bewegung der Figuren, Heranbildung (Nötigung) des Schülers zur Selbsttätigkeit, Correctheit des Ausdrucks, so können die ersten beiden Punkte wol kaum als unterscheidend gelten. Auf die Correctheit ist in der Tat sichtlich Fleiss verwandt. Ist es aber z. B. (S. 79.) correct zu sagen: „Eine reguläre Figur bietet dem Beschauer von jeder Seite aus" (d. h. den folgenden Worten zufolge: von wo auch immer) „dieselbe Gestalt und Ansicht" u. s. w.? Wichtiger sind zwei principielle Irrungen, die der Aufforderung des Verfassers gemäss hier genannt werden mögen. Erstlich behauptet er (ohne ersichtlichen Grund diese Frage hier zu erörtern), der Raum sei unbewegbar, und es sei eine Täuschung, ein Raumstück als bewegt zu denken. Es verhält sich umgekehrt. Ein absolut unbewegter Raum ist nicht bestimmbar, also undenkbar; unser gewohntes, am Erdboden haftendes Raumsystem müssen wir als bewegt betrachten und gegen ein neues vertauschen in der Geographie dann wieder in der Astronomie, und eine definitive Ruhelage giebt es nicht. Der Mathematiker muss wissen, dass alle Bewegung relativ ist, und dass es ihm frei steht zur Vereinfachung der Betrachtung ein Raumsystem als ruhend anzunehmen. Zweitens ist es unrichtig und sinnverwirrend, die Fläche als unendlich dünnes Blatt vorstellen zu lassen; denn dann wäre sie bei jeder Ausdehnung unendlich klein. Wir abstrahiren nicht von der Dicke, sondern von den 2 Körpern oder Raumbezirken, deren Grenze die Fläche ist. Derselbe Fehler kehrt bei der Linie und beim Punkte wieder, und wie hier so steht überall das Unendliche ohne alle Erklärung, gewöhnlich verbunden mit widersprechenden, undenkbaren Beifügungen. Durch Bewegung, welche der Verfasser ja erklärtermassen gern verwendet, lässt sich der Sinn des Unend-

lichen vollkommen klar, einfach und leicht verständlich für Anfänger darstellen. Ebenso lassen sich die vorher bemerkten Fehler ohne Beeinträchtigung des Uebrigen berichtigen. Möge daher das Vorstehende als Vorschlag zur Abänderung bei voller Anerkennung des Geleisteten Aufnahme finden. H.

Die Grundlehren der ebenen Geometrie. Von A. Stegmann. Mit 9 Figurentafeln. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Kempten 1875. Jos. Kösel. 159 S.

Dies Lehrbuch unterscheidet sich von den meisten andern durch Bevorzugung der logischen Bildung, deren Erfordernisse in sorgfältiger Weise berücksichtigt worden sind. Hervorzuheben in dieser Beziehung ist, dass der Paragraph über die Vergleichung der Winkel, welcher den Begriff des Winkels erst zu einem exacten macht, während die vorausgehende Definition Nebensache, und ohne ihn immer unzureichend ist, nicht, wie gewöhnlich, fehlt. Auch ist die gegebene Erläuterung der Bedeutung des Beweises hierher zu rechnen; nur hätte dafür ein Satz gewählt werden sollen, durch den der Schüler etwas neues, nicht selbstverständliches lernt. Uebrigens wird mit der für die meisten Schulen knapp zugemessenen Zeit sehr verschwenderisch verfahren, indem die Sätze vielfach zerspalten sind. Die anfänglich genannte Tendenz hat indes den Verfasser nicht abgehalten auffällige logische Fehler zu begehen. Der eine ist ein Trugschluss im Beweise für den Parallensatz, den ein Schüler leicht durch die Probe widerlegen kann, der andere die unbewiesene und unbeweisbare, gleichwol hier stillschweigend gemachte Voraussetzung, dass die Kreislinie kleiner sei als der Umfang des Tangentenpolygons. Unglücklich gewählt ist der Ausdruck: die Geometrie handele von den räumlichen Grössen. Gleich nachher folgt: der Punkt sei keine räumliche Grösse. Ausser dem Punkte handelt aber die Geometrie von vielen Gebilden, die keine Grössen sind; auch die Winkelebene gehört zu diesen und hat, durch unrichtige Subsumption unter den Grössenbegriff, schon manche Irrung veranlasst. Es möchte sich daher doch wol empfehlen, nicht bloss den Gegenstand der Geometrie lieber räumliche Gebilde zu nennen, sondern auch in den Grundbegriffen auf das, was allein Grösse heissen kann, hinzuweisen. H.

Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra mit mehr als 1500 Uebungsaufgaben. Zunächst zum Gebrauch in Seminarien, Mittel-, Real- und Gewerbeschulen, wie auch für den Selbstunterricht bearbeitet von W. Adam, Königl. Seminarlehrer in Neu-Ruppin. Erster Theil: I. Buchstabenrechnung und Arithmetik: Die vier Species

mit der Bruchrechnung, Verhältnisse und Proportionen, Potenzen und Wurzeln. II. Algebra: Die Gleichungen vom ersten und zweiten Grade. Zweiter Theil: Gleichungen höheren Grades, diophantische Gleichungen, Logarithmen mit Zinseszins- und Rentenrechnung, arithmetische und geometrische Progressionen, Kettenbrüche, Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Neu-Ruppin 1875. Rud. Petrenz. 182 S.

Zu den Angaben des Titels ist kaum etwas hinzuzufügen. Die Abfassung ist eine ganz populäre, doch lässt sie hinsichtlich spätern Uebergangs zu einem mehr wissenschaftlichen Betreiben weder an Vollständigkeit der Elementarlehren etwas vermissen, noch tun die Erklärungen und Aufstellungen einer wissenschaftlichen Auffassung Abbruch. Der Verfasser hat den gesammten Lehrstoff in vorhandenen Büchern bearbeitet vorgefundenen und davon vernünftigen Gebrauch gemacht. Erklärungen und Sätze werden in grösster Kürze aufgestellt; dann folgen stets Beispiele; letztere sind am reichhaltigsten bei den Gleichungen. Auszustellen möchte etwa sein zunächst die Unterscheidung von Buchstabenrechnung und Algebra, womit ein häufiger Misbrauch des letztern Wortes erneuert wird. Hiermit steht aber weiter in Verbindung die Unbestimmtheit, welche über der Bedeutung eines Buchstabens waltet. Dass ein Buchstab ganze, gebrochene, positive oder negative Zahl bedeuten kann, wird der Schüler im ersten Abschnitt nicht gewahr, und kein Beispiel bringt es zur Uebung; im zweiten hingegen ist es sofort stillschweigende Voraussetzung. H.

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Uebungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten. Von Dr. Th. Spieker, Oberlehrer an der Realschule zu Potsdam. Erster Theil. Potsdam 1875. Aug. Stein. 363 S.

Die Abfassung des Lehrbuchs ist darauf eingerichtet, dass der Schüler mit Einsicht, besonders aber fertig algebraisch rechnen lerne. Die systematische Ordnung ist musterhaft. Von jeder theoretischen Entwickelung, die meist kurz gefasst ist, geht es bald zu den bewährten gebräuchlichen Einführungen und Verfahrungsweisen über. Tiefere Blicke werden nie eröffnet, und theoretische Schwierigkeiten unberührt gelassen; doch ist diese Vermeidung mit wesentlichen logischen Desideraten nicht verbunden. In mancher Beziehung ist das Lehrbuch vollständiger als die gewöhnlichen. Zu erwähnen ist insbesondere, dass das Substituiren, das Rechnen nach der Formel und die Anwendung negativer und gebrochener Werte der Buchstaben in den Formeln, woran man früher im Cursus selten zu denken pflegte, hier wenigstens vorübergehende, aber erklärte Berücksichtigung findet.

Das Lehrbuch umfasst 3 Curse: der erste enthält die Hauptoperationen, der zweite die Gleichungen 1. und 2. Grades mit einer und mehrere Gesuchten, der dritte die wichtigsten höhern Rechnungen. In diesen ist auch die Theorie der Logarithmen und das Rechnen mit denselben herüber genommen. Die Methode des ersten Cursus ist die consequent arithmetische, welche den Zahlbegriff im Anschluss an die Operationen successive zur algebraischen Auffassung erweitert.

H.

Lehrbuch der Arithmetik für Lateinschulen. Von A. Steck und J. Vielmayr. Vierte verbesserte Auflage. Kempten 1875. Jos. Kösel. 116 S.

Das Vorliegende ist eine Anweisung zum dekadisch numerischen Rechnen. Es umfasst die für den bürgerlichen Gebrauch notwendigen Rechnungsarten einschliesslich der Decimalbrüche und der orthogonalen Flächen- und Körperberechnung und giebt zum Schluss das Verzeichniss der Masse, Gewichte und Münzen nebst Reductionszahlen. Aufgenommen ist auch die Lehre von den Kettenbrüchen und ihre Anwendung zur Auffindung kleiner Verhältnisszahlen, warum aber nicht auch zur Auffindung des gemeinsamen Teilers? Der Vortrag der einzelnen Lehren besteht in Regel, Erklärung und Erklärungsbeispiel. In der ersten Regel über die Teilbarkeit steht die falsche Behauptung: damit die Summe teilbar sei, müsste es jeder Summand sein. Das Umgekehrte war an der Stelle. H.

Sammlung von arithmetischen Aufgaben in systematischer Ordnung. Ein Uebungsbuch für Latein- und Gewerbschulen. Von F. A. Steck und Dr. J. Vielmayr. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Kempten 1875. Jos. Kösel. 88 S.

Beispiele zur Einübung der im vorgenannten Lehrbuch aufgestellten Lehren, im Anschluss an jeden einzelnen Abschnitt. Auf eine Reihe von Zahlen-Datis, womit unmittelbar nach Regel zu rechnen ist, folgt jedesmal eine Reihe von Aufgaben, deren Ansatz zu bilden verlangt wird. H.

Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik für den Schulgebrauch bearbeitet von Carl Kieseritzky, Oberlehrer an der St. Annenschule in St. Petersburg. Mit drei Holzschnitten. St. Petersburg 1875. G. Hässel. 154 S.

Das Lehrbuch gehört zu denjenigen, welche bestrebt sind, jede Lehre von Grund aus zu behandeln und dadurch die Doctrin auf

einen leidlich wissenschaftlichen Standpunkt zu erheben. Namentlich in den Anfängen und den elementaren Teilen ist sichtlich Aufmerksamkeit und Fleiss darauf verwandt worden, keine zum gründlichen Verständniss notwendige Frage zu übergehen. Es würden sich in dieser Beziehung manche Punkte aufzählen lassen, die sehr häufig ausser Acht gelassen werden, hier hingegen sich behandelt finden. Auch können einzelne Partien als in der Form gelungen bezeichnet werden. Im ganzen ist jedoch die Darstellung keineswegs musterhaft, der Ausdruck oft unnötigerweise complicirt, die Grundbegriffe bei allem Weitausholen nicht zur genügenden Deutlichkeit gebracht, u. a. m. Die Mängel im einzelnen aufzuweisen, würde zu weit führen. Entschieden falsch aber ist die Definition und der Gebrauch der unendlichen Grössen in einer unzähligemal gerügten Weise, indem sie als Grössenwerte betrachtet werden. Zwar wird hervorgehoben, dass 2 Unendlichgrosse oder 2 Unendlichkleine als solche nicht einander gleich sind; doch steht dies mit der Erklärung nicht im Einklang, und widerspricht der (unrichtigen) Bestimmung: Unendlichklein = 0. Am wenigsten aber kann die letzte Partie, welche in die sogenannte algebraische Analysis hineinstreift, die Meinung eines guten Verständnisses und angewandter Sorgfalt erwecken; da hier von endlichen Reihen auf unendliche ohne alle Erklärung und ohne Beachtung irgend welcher Convergenz-Bedingungen übergesprungen wird. Es scheint hiernach, dass der Verfasser, obwol der Fleiss in eigner Productivität unverkennbar ist, keine genügende Bekanntschaft mit methodischen Vorbildern gehabt hat, und dass ihm gerade die untüchtigsten, dabei aber stark verbreiteten, allein vor Augen gekommen sind.

H.

Lehrbuch der Goniometrie und Trigonometrie für den Schulgebrauch bearbeitet von Carl Kieseritzky, Oberlehrer an der St. Annenschule in St. Petersburg. Mit 35 Holzschnitten. St. Petersburg 1875. G. Hässel. 90 S.

Der Lehrstoff ist hier nicht, wie es um der für den betreffenden Unterricht bestimmten geringen Zeit willen gewöhnlich ist, auf das zunächst Notwendige beschränkt, sondern erstreckt sich in grösster Vollständigkeit auf alles wissenswerte und instructive. Besonders sind die theoretisch wichtigen Anwendungen auf Algebra und Geometrie eingehend behandelt. Die Trigonometrie umfasst ebene und sphärische. Was die Methode betrifft, so ist der grösste Mangel, dass Grenzwerte und Summen unendlicher Reihen ohne alle Auskunft und Erklärung hingestellt werden, während doch in den leichtesten Dingen, wie den Transformationen von Relationen $ab = c$ die grösste Ausführlichkeit Platz findet. Die Stelle einer Definition der Kreisfunctionen

für Winkel $>$R, wie sie eigentlich notwendig war, vertritt eine Discussion, die als Aufgabe vorangestellt, aber Lehrsatz überschrieben ist, worauf dann unter der Ueberschrift Beweis, ehe noch etwas zu beweisen da ist, die Discussion folgt. Systematische Ordnung und Vollständigkeit der Discussionen ist untadelhaft. H.

Die Elementar-Arithmetik und deren Anwendung. Ein Lehr- und Uebungsbuch für den Rechenunterricht an höheren Lehranstalten von J. P. Schmidt. Dritte, mit Rücksicht auf die neuen deutschen Reichsmünzen umgearbeitete Auflage. Trier 1875. Fr. Lintz. 258 S.

Das Buch unterweist mit grosser Ausführlichkeit und Umsicht, auf jederlei eventuelle Unkunde der Anfänger Rücksicht nehmend, und mit Beachtung alles dessen, was bei der Ausübung zustatten kommt, im ersten Teile im Rechnen mit unbenannten Zahlen, dekadischen ganzen, Brüchen und Decimalbrüchen (geschlossenen und abgekürzten). An der nötigen begrifflichen Erklärung fehlt es nicht; auch ist dieselbe durchweg mit dem wissenschaftlichen Begriff im Einklang. Uebungsbeispiele und Fragen sind hier nur zur Verdeutlichung der Lehren in geringer Zahl beigefügt. Der zweite Teil enthält dann ausschliesslich Aufgaben im Rechnen mit benannten Zahlen. Die Darstellung macht sehr geringe Ansprüche an die Begabung der Schüler, nimmt aber eine recht vollständige Ausbildung zum Ziele. Ein Punkt, in welchem auch hier, wie in den meisten Lehrbüchern, gefehlt ist, möge bei dieser Veranlassung besprochen werden. Was Rechnen heisst, erfährt der Schüler, indem er's tut. Um es zu lernen bedarf er keiner vorausgehenden Definition. Es wäre demnach wol angemessen, auf irgend einer etwas höheren Stufe der Entwickelung den Begriff durch blosse Fragen zu entwickeln, die der Schüler aus seiner Erfahrung zu beantworten hat. Es scheint darnach, dass diejenigen, welche eine Definition dictiren, ehe die Sache bekannt ist, ohne Bewusstsein eines Zweckes zuwerke gehen. Noch mehr aber giebt sich die Gedankenlosigkeit dadurch zu erkennen, dass eine falsche Definition traditionell durch eine Reihe von Lehrbüchern hindurch geht, nämlich die: Rechnen heisse, aus 2 Zahlen eine bilden. Allerdings ist es ein besonderer Denkact, wenn man aus 4 und 5 die Zahl $4+5$ oder 4.5 bildet. Aber diesen nennt niemand rechnen. Er ist vollzogen, wenn das Rechnen beginnt; man betrachtet ihn als zum Aufgeben der Rechnung gehörig. Das Ziel des Rechnens aber ist, die gegebene Summe, Product u. s. w. oder auch eine durch Bedingungen bestimmte Zahl dekadisch — allgemeiner, in verlangter Form darzustellen. Hiermit wird zugleich erklärt, warum man rechnet; dahingegen die Bildung neuer Zahlen, die natürlich doch immer wieder

alte sind, keinen Zweck verrät. Besonders nachteilig ist die gerügte Aufstellung, weil sie der bei Anfängern häufig stattfindenden irrigen Anschauung Vorschub leistet, als bezeichne 4+5 zwei Zahlen. Schliesslich ist noch zu bemerken, dass man in neuerer Zeit angefangen hat den Multiplicator hinter den Multiplicanden zu schreiben. Das Motiv ist deutlich; aber das Vorgehen kämpft gegen die Anordnung der Sprache. Wollte man den zum Verständniss zuerst notwendigen Begriff immer zuerst nennen, so müssten Artikel und Zahlwort hinten stehen. Sagt man aber einmal: 3 Wochen, so muss man auch sagen: 3.7 Tage. Im Grunde ist jede Benennung ein Multiplicand; unverkennbar aber wird dies, wenn die Benennung sich in eine Anzahl auflöst. Das Bedachtnehmen auf die Analogie mit der Division und Subtraction ist übertrieben. Jede Operation bedarf ihrer eignen Anordnungen; z. B. führt die Division den Bruchstrich ein, der keine Analogie hat. Die aus einseitigem Gesichtspunkt angeregte Aenderung der Stellung des Multiplicators hat leider Nachahmung gefunden, und ist auch im vorliegenden Rechenbuch in Anwendung gekommen.

H.

Lehrbuch für den Unterricht im praktischen Rechnen und in der Arithmetik für Gymnasien, Realschulen und die mathematischen Vorklassen technischer Anstalten. Von Friedrich Wilhelm Looff, Herzogl. Sächs. Schulrath. Dritte mehrfach erweiterte Ausgabe. Gotha 1875. Carl Gläser. 311 S.

Das Buch ist weniger eine methodische Bearbeitung als vielmehr eine Zuweisung des Lehrstoffs an den Lehrer, dem ein grosser Teil der Aufgabe zufällt, die Lehren zum Verständniss zu bringen, einzuüben und nach fernern Gesichtspunkten zu scheiden. Alles in einen Hauptabschnitt, z. B. über die Brüche, gehörige wird nach einander abgehandelt, zum Teil nur angedeutet — die Addition und Subtraction der Brüche ist durch 2 Sätze berücksichtigt. Unterscheidend ist, dass alle Rechnungsvorteile recht vollständig auseinandergesetzt werden. Ausserdem ist der Umfang des Lehrstoffs, namentlich in der Buchstabenrechnung, ein bedeutender. Eine Beilage giebt am Schlusse eine Anzahl numerischer Tabellen, deren drei sich auf zahlentheoretische Aufgaben beziehen. H.

Lehrbuch für den Rechenunterricht. Propädeutik der allgemeinen Arithmetik zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. Von Julius Henrici, Professor an der höheren Bürgerschule in Heidelberg. Heidelberg 1875. Georg Weiss. 251 S.

Vor 30 Jahren ward eine neue Methode des Rechenunterrichts in Anregung gebracht. Statt der an beliebig vielen Zahlen zu übenden, einander einzeln folgenden Operationen sollten die successiven Zahlen nach allen Eigenschaften und allen operativen Beziehungen behandelt werden. Diese Idee, welche man bald wieder aufgegeben zu haben scheint, oder wenigstens eine Analogie davon, tritt im vorliegenden Lehrbuch von neuem auf. Der Gesichtspunkt des Verfassers ist insofern ein anderer, als er sein Motiv mehr aus der Zukunft als aus den vorgefundenen Geistesfähigkeiten der Anfänger entnimmt. Der Rechenunterricht soll zugleich eine Propädeutik der allgemeinen Arithmetik sein. Das kann er, auch ohne den Gesichtskreis der Schüler in dem Masse, wie es hier geschehen ist, zu erweitern, indem er die Begriffe in den elementaren Hauptbeziehungen, in welchen der Anfänger Gelegenheit hat damit vertraut zu werden, in solcher Auffassung und Form entwickelt, wie es beim Fortschritt zur höhern Doctrin gebraucht wird. Doch der Verfasser geht darüber weit hinaus: er legt die ganze Algebra, mit Ausnahme der entgegengesetzten Grössen, entwickelt an kleinen Zahlen (erst < 20, dann < 100), dann formulirt in allgemeinen Sätzen, in die ersten Elemente hinein. Man kann zugestehen, dass der ganze so vorgetragene Inhalt einzeln zum Verständniss gelangt. Das aber muss sehr bezweifelt werden, ob ein Schüler auf dieser untersten Stufe des Rechenunterrichts imstande ist ein so weites Feld von Beziehungen zu beherrschen. Es fehlt der Gegenstand, an dem die Menge des Gelernten geübt werden kann; es fehlt die Concentration auf das, was behalten werden soll. Was die Folgen des Misgriffes wol einigermassen mildern mag, ist, dass das Buch im weitern Verlauf mehr und mehr zu den Zwecken des bürgerlichen Rechnens übergeht, wodurch von selbst eine gewisse Auswahl des Nützlichsten für den nächsten Zweck herbeigeführt wird, das dann doch im Gedächtniss bleibt und fruchtbar wird. H.

Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Classen höherer Lehranstalten. — Von H. C. E. Martus, Professor an der Königstädtischen Realschule in Berlin. Zweiter Theil: Resultate. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Leipzig 1875. C. A. Koch. 265 S.

Im 223. litterarischen Bericht, S. 29. ist die Aufgabensammlung nach ihrem Erscheinen in erster Auflage kurz besprochen worden. In den folgenden Auflagen ist die Anordnung, Einteilung und Numerirung beibehalten. Hinzugekommen sind neue Seiten der Betrachtung, welche einzelne Aufgaben darbieten, und die in den Resultaten herausgestellt sind. So ist z. B. die Bedeutung der negativen Wurzel in



Sammlung von Beispielen
stabenrechnung und Algebra.
Auflage von Professor H. Be
Carl Duncker.

Der Herausgeber hat die
sagt, unternommen mehr in de
als in der Hoffnung viel zu bess
Beziehung das Notwendige gescl
gerecht zu werden: Veraltetes is
sind die Aufgaben vermehrt word
der Physik hinzugekommen. Am
gemeinen Logarithmen der Zahlen
230. litt. Ber. S. 26. erklärt ist,
Stelle suchen wird.

Ausgeführte Multiplication und
Grösse. Entworfen und herausgegeben
5te Stereotypausgabe. Leipzig 187
Petersburg). 4°.

Das Buch besteht aus Abbildung
maschine, d. i. Vorrichtung zum Versc
und 2 Tafeln für genaue und für abgel
sion, nebst Erklärung des Gebrauches i
scher und französischer Sprach
Maschinenrech

Litterarischer Bericht

CCXXXII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo VIII. Roma 1875. Tipografia delle scienze matematiche et fisiche.

Der Inhalt der ersten 6 Hefte ist folgender.

1. Heft. Luigi Lodi, Vice-Bibliothekar in Modena, über das Leben und die Arbeiten des Prof. Geminiano Riccardi nebst Verzeichniss seiner Werke und zwei bisher noch ungedruckte Schriften desselben I. Einige Bemerkungen zu der Schrift „Mémoire sur les travaux et les écrits de M. Legendre" von F. M. in Ginevra d. 24. Febr. 1833. enthalten in der Zeitschrift „Bibliothèque universelle" 18. Jahrgang, Sciences et Arts. II. Kurze kritische Prüfung einer Anzeige betreffend die Arbeiten der k. Akademie der Wissenschaften und schönen Künste in der Sitzung am 15. Dec. 1839. Gelesen in der k. Akademie der Wissenschaften und Künste zu Modena am 30. Mai 1840. Ferner B. Boncompagni über eine Eigenschaft der ungeraden Zahlen.

2. Heft. Brief von L. Am. Sédillot an B. Boncompagni über das von uns aus der arabischen Wissenschaft Entlehnte, insbesondere aus Aboul-Wefâ's von Bagdad, Astronomen des 10. Jahrhunderts, Bestimmung der lunären Ungleichheit oder Variation.

3. Heft. Paul Mansion, Nachricht über das Leben und die Arbeiten von Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, und Verzeichniss seiner Schriften.

4. Heft. Paul Mansion. Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und im Mittelalter von Dr. Hermann Hankel, weil. ord. Professor der Math. an der Universität zu Tübingen. Leipzig 1874. B. G. Teubner. 8°. 414 Seiten.

5. Heft. Ferdinando Jacoli, Professor an der Marine-Maschinisten-Schule in Venedig, Evangelista Toricelli, die Methode der Tangenten, genannt die Roberval'sche Methode.

6. Heft. F. Marchetti über das Leben und die Arbeiten von P. Paolo Rosa, nebst dem Verzeichniss seiner Schriften.

Publicationsverzeichnisse im 2., 4. und 6. Heft.

Besonders herausgegeben ist aus dem 3. Heft: Notice sur la vie et les travaux de Rodolphe Frédéric Alfred Clebsch. Par M. Paul Mansion, Professeur à l'Université de Gand. Rome 1875. Das Verzeichniss der Schriften führt im ganzen 180 Arbeiten auf, nämlich 7 Separatschriften, 49 Abhandlungen in Crelle J., 3 in den Berliner Monatsber., 2 in Brioschi Ann., 1 in Liouville J., 5 in den Pariser Comptes Rend., 1 in Schlömilch Z., 1 in den Mailänder Rendiconti, 1 in der Allgemeinen Forst- u. Jagd-Zeitung, 23 in Clebsch Ann., 5 in den Göttinger Abhandl. d. k. Ges. d. Wiss., 8 in den Göttinger Nachr., und macht reichliche Angaben darüber, wo diese Schriften erwähnt werden. In allem Detail nachgewiesen findet sich, als 2. Teil des Verzeichnisses, Clebsch's Beteiligung an den Referaten für die Fortschritte der Physik und für die Fortschritte der Mathematik. Zum Schluss sind noch einige von ihm verfasste Recensionen genannt. Das Verzeichniss der eignen Schriften von Clebsch enthält 1 Separatschrift und 4 Abhandlungen, welche in der Liste der Publicationen Clebsch Ann. VII. 1874., fehlen:

Lindemann, Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch. (Hätte wol in anderer Rubrik aufgeführt werden sollen.)

O. Hesse, A. Clebsch, C. Neumann. Erklärung in Betreff der Abhandlung des Herrn Dr. von Drach über die cubischen Kegelschnitte.

A. Clebsch. Ueber ein Problem der Forstwissenschaft.

A. Clebsch. Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen.

Clebsch und Jordan. Ueber cubische ternäre Formen.

H.

Methode und Principien.

Geometrie für die unteren Klassen der Mittelschulen. Von Dr. Oskar Fabian, bearbeitet nach dem Lehrsysteme und unter Mitwirkung des Universitätsprofessors Lorenz Zmurko. 1. Heft für die 1ste und 2te Klasse. Lemberg 1876. Seyfarth und Czajkowski. 89 S.

Dieses Lehrbuch, bestimmt für die galizischen Mittelschulen und bearbeitet nach Beratung aller Lehrer der Mathematik an denselben, verdient Beachtung in weiterem Kreise wegen der bisher noch wenig realisirten, hier einmal ernstlich ins Auge gefassten Principien. Letztere sind in den Beschlüssen der Versammlung noch nicht enthalten, welche nur bestimmten, dass der Unterricht mit Versinnlichung der mathematischen Wahrheiten beginnen, und daher aus der Betrachtung der Raumgrössen die Theorie der Operationen ableiten müsse. Wir haben sie daher für den eignen Gedanken und die selbständige Wahl nicht zwar des Verfassers, aber seines Lehrers Zmurko zu halten Im Einklang mit jenen Beschlüssen steht allerdings die Methode völlig, sofern sie alle zu Gebote stehenden Mittel der Versinnlichung anwendet. Besonders werden Drähte zur Versinnlichung von Linien gebraucht, die sich sowol zur Darstellung der unveränderten Transposition als auch der Gestaltsänderung eignen. Der Verfasser weist darauf hin, dass man sogar die Erzeugung von Flächen durch Drähte vor Augen stellen kann, die bei beliebiger Krümmung ein Stück Seife durchschneiden. Deutlich hervorgehoben ist die Unterscheidung der ideellen Vorstellung vom versinnlichenden Körper, auch für den Fall des Zeichnens auf Papier. Was aber die in Rede stehende Methode wesentlich charakterisirt, ist, dass sie der psychischen Genesis der Begriffe folgt. Am deutlichsten geschieht dies bei Entwickelung des Begriffs der geraden Linie. Der Verfasser lässt einen Draht um zwei feste Enden rotiren, beschreibt die dabei zu machenden Beobachtungen, nimmt dafür andere Drähte, bei denen successive mehr und mehr Punkte in Ruhe bleiben, und führt so zu dem bloss gedachten Fall hin, wo alle Punkte in Ruhe bleiben werden. Bemerkenswert ist, dass er das Messen mit dem krummen Drahte beginnt und erst später auf den geraden übergeht. Leicht hätte er auf diesem Wege die Idee der geraden Linie als der Distanzen definitiv messenden ergänzen können; doch ist dies wenigstens nicht zum klaren Ausdruck gekommen. Ebenso bot die betrachtete Rotation den Ausgangspunkt zur Erklärung der Winkel; allerdings wird sie auch auf Rotation gebaut, und der Periodicität geschieht Erwähnung, doch nimmt sie keinen klaren Verlauf, und die unnötige Einmischung unendlicher Flächenräume beeinträchtigt die Auffassung. Auf den Begriff der Geraden

stützt der Verfasser den der Ebene, indem er die Gerade durch einen festen Punkt gehen und an einer andern Geraden gleiten lässt. Hier hat die bis dahin angewandte Sorgfalt ihr Ende. Offenbar ist mit jener Erzeugung die Eigenschaft der Ebene nicht bewiesen. Das ausführliche Eingehen auf die psychische Genesis war daher bei der Ebene mindestens ebenso nötig als bei der Geraden, um so mehr, weil sie nicht so auf der Hand liegt, vielmehr dazu verschiedene Betrachtungsweisen vereinigt werden müssen. Der weitere Fortschritt ist ein unerwartet schneller: es folgt eine Reihe teils planimetrischer, teils stereometrischer Sätze; wie weit sie bündig zusammenhangen, wie weit nicht, wird man Mühe haben zu erkennen; jedenfalls lernt ein Schüler daran nicht, was mathematische Evidenz sei. Das Zuwerkegehen erklärt sich aus einer Täuschung, in welche manche Bearbeiter von Anschauungslehren verfallen. Sie meinen, was sie versinnlicht vorgeführt haben, sei auch verstanden, und berufen sich darauf wie auf bewiesene Sätze in euklidischer Folge. Die Versinnlichung, bestimmt einige einfachste Vorstellungen zu wecken, und die einfachsten Beziehungen zu entwickeln, führt stets eine grössere Anzahl Nebenbeobachtungen an Objecten in mehr oder minder complicirten Beziehungen vor. Diese darf man nicht verwerten wollen, sondern muss sie als Unbekanntes ausgeschieden erhalten, bei den beabsichtigten einfachen Resultaten verweilen, und diese nicht weiter verwenden, ehe ihre exacten Bedingungen aufgefasst sind. Aus dem Ganzen ist zu ersehen, dass der Verfasser eine vortreffliche Idee in Angriff genommen und den Weg zur Durchführung kenntlich gemacht, seine Aufgabe aber nicht bewältigt hat. Als gelungen darf noch nachträglich die Entwickelung des Begriffs der 3 Dimensionen bezeichnet werden. H.

Zeit und Raum in ihren denknothwendigen Bestimmungen abgeleitet aus dem Satze des Widerspruchs. Von Schmitz-Dumont. Leipzig 1875. Erich Koschny. 84 S.

Der Verfasser stellt zuerst 3 Ansichten über Zeit und Raum auf: „1) Sie sind Anschauungsformen unserer Vernunft, nach welchen dieselbe, bedingt durch die Construction unserer Seelenvermögen, ein Bild der uns erscheinenden Dinge an sich entwirft. 2) Sie sind allerdings von der Vernunft erzeugte Anschauungsformen; jedoch existirt gleichzeitig eine reelle Welt, welche in diesen Formen mit den uns bekannten Eigenschaften gestaltet ist. 3) Sie sind etwas empirisch gegebenes, was ebensogut in einer andern Welt anders sein kann. Unsere Geometrie ist also der Specialfall einer allgemeinen Geometrie, welche wir logisch entwickeln können.“ Der Mangel der

zweiten liegt auf der Hand; er ist aber nur ein Symptom der verfehlten ersten, deren wesentlicher Mangel hier nicht enthüllt ist; beide bleiben indes im weitern unberührt. In der dritten ist der Ausdruck „empirisch gegeben" unvollständig; es muss heissen: „empirisch gegeben und empirisch gewonnen"; denn die Gestaltung unserer Anschauungsform ist nicht direct vorgefunden. Die hinzugefügte Folgerung entstellt die Sachlage durch Einseitigkeit. Ist die Logik der allgemeinen Geometrie selbst empirisch gewonnen, so wird der Gegensatz hinfällig. Diese Ausserachtlassung charakterisirt alles folgende. Hätte der Verfasser die Entstehung des entfalteten Denkvermögens in Betracht gezogen, so hätte er auf seine Frage, warum eine Vorstellung von mehr als 3 Dimensionen unmöglich sei, die leichte Antwort gefunden: Zum Erlernen dieser Vorstellung fehlen uns die Objecte. Weil er sie sich nicht beantworten kann, so erscheint es ihm als ein Desideratum der Wissenschaft, die Denknotwendigkeit der 3 Dimensionen nachzuweisen. Nicht nur dieses, sondern auch das gleiche in Betreff der Hypothesen der Mechanik glaubt er in der Schrift geleistet zu haben. Die Untersuchungsmethode soll darin bestehen, dass er alle Denkmöglichkeiten, welche eine Welt nach dem Satze des Widerspruchs aufweisen kann, ohne Rest unter eine beschränkte Zahl von Formen gruppirt, die dann identisch mit denjenigen ausfallen mussten, nach welchen sich uns die Welt darstellt. Diese Ankündigung lässt, nach Vorgang vieler ähnlicher, eine Reihe mystisch verkleideter Tautologien erwarten, wie sie selbst eine solche ist. In der Tat versteht es sich wol von selbst, dass die Formen, nach denen die Welt sich dem Verfasser darstellt, mit den von ihm aufweisbaren Denkmöglichkeiten gleich begrenzt sind. Dies an sich unfruchtbare Zuwerkegehen verhindert allerdings nicht, dass aus Anlass der vermeintlichen Aufgabe neben dem inhalts- und wertlosen Räsonnement auch productive Elemente zu Tage kommen. Namentlich hat der sogenannte Untersuchungsgang zu einer Musterung des Gegebenen geführt, welche allein schon entscheidende Resultate geliefert haben würde, wenn sie erstlich ohne Anspruch des Wissens angestellt, ferner nicht in eine allgemein sein sollende, dunkele und nichtssagende Terminologie eingehüllt, und zu gehöriger Vollständigkeit ergänzt worden wäre. Wir begegnen hier noch einmal der Befangenheit in dem Vorurteil, dass die Gewissheit des Anfangs zur Gewissheit des Resultats notwendig sei. So lautet z. B. der erste Satz: „Das für uns absolut Gewisse sind unsere Empfindungen, d. h. die Tatsache, dass wir verschiedene Empfindungen haben. Auf Beobachtung dieser Tatsache in ihrer Eigenheit, die als Gegebenes ein unerkannter, der Erkenntniss bedürftiger Gegenstand des Denkens ist, kam es an. Die Gewissheit, wo noch nichts gewusst wird, ist ein leeres Wort, das nur in sofern nicht gleichgültig ist, als es die δόξα auf den Thron

erhebt, die Aufmerksamkeit vom vorliegenden Objecte ab und auf unfruchtbare Gedankenbahnen hinlenkt. Vielleicht möchte man im mathematischen Interesse noch am meisten auf die versprochene „Widerlegung der Ansichten von Gauss u. A." gespannt sein. Doch diese steht nur in der Ueberschrift. Das wenigste des Besprochenen ist citirt, und das Citirte ist nicht angegriffen. Ueberhaupt dürfte wol das Inhaltsverzeichniss der gedankenreichste Teil der Schrift sein. H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Traité d'arithmétique. Par J. A. Serret, Membre de l'Institut et du Bureau des longitudes. Sixième édition, révue et mise en harmonie avec les derniers programmes officiels par J. A. Serret et par Ch. de Comberousse, Professeur de cinématique à l'École centrale et de mathématiques spéciales au Collège Chaptal. A l'usage des candidats aux écoles du gouvernement et au baccalauréat ès sciences. Paris 1875. Gauthier-Villars. 325 S.

Der Gegenstand des Buchs ist das gemeine dekadische Rechnen nach Regeln ohne wissenschaftliche Auffassung, bis auf den Gebrauch der Logarithmen ausgedehnt. In einigen spätern Abschnitten, über Messung, Progressionen u. a. kommen auch Buchstaben in Anwendung, doch nur zur vorläufigen Benennung, ohne dass sich eine Theorie daran knüpft. Der Vortrag ist ein wolgeordneter, doch giebt er keinen systematischen noch pädagogisch didaktischen Gedanken zu erkennen. Die Erklärungen sind mehr Formulirungen dessen, was in der Sache als bekannt vorausgesetzt wird. Interesse hat das Buch hauptsächlich, sofern es einigen Einblick in die Methode des Unterrichts in Frankreich eröffnet. H.

Aphoristische Bemerkungen zur politischen Arithmetik. I. Abtheilung. Von Jacob Lewin, Director der Budapester Handelsakademie. Separatabdruck aus dem Jahresberichte der Budapester Handelsakademie. Budapest 1875. Pester Buchdruckerei-Actien-Gesellschaft. 75 S.

Die Schrift enthält eine Anzahl Beiträge zur Theorie im ersten Abschnitt der Zinsenrechnung, im zweiten der Rentenrechnung. Insbesondere werden darin verbesserte Definitionen aufgestellt und die Theoreme durch Vereinigung unter allgemeinere vereinfacht. Der Verfasser setzt an die Stelle der mittleren und wahrscheinlichen Lebensdauer eine solche, welche er die mathematische nennt. H.

Die Laplace'sche Methode der Ausgleichung von Beobachtungsfehlern bei zahlreichen Beobachtungen. Von Dr. J. **Dienger**, in Karlsruhe. Wien 1875. Karl Gerold's Sohn. 4⁰. 42 S.

Der Inhalt der Schrift ist die Lösung einer Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche durch Verallgemeinerung aus der von Laplace im 4. Capitel seiner Théorie analytique des probabilités (1812) behandelten hervorgeht, und deren Vergleichung mit der Methode der kleinsten Quadrate. Ueber den Gang der Rechnung, welche in Transformation eines Doppelintegrals besteht, und über deren Data und die gemachten Annahmen lässt sich ohne eine hier zu weit führende Erklärung der zahlreichen Einführungen nicht berichten.

H.

Methode der kleinsten Quadrate mit den Hülfsätzen aus der Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst einem Anhange über die ballistische Linie. Von L. **Natani**. Berlin 1875. Winckelmann u. Söhne. 42 S.

Der Zweck der Bearbeitung scheint infolge der ausschliesslich darin vorkommenden Anwendung der zu sein, der Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Treffens der Geschosse eine theoretische Grundlage zu geben, indem sie die dazu erforderlichen Sätze, welche zwar bekannt aber in verschiedenen Schriften enthalten sind, in der Kürze und im einfachsten Connex zusammenstellt. Es werden demgemäss nach einander behandelt die Entwickelung und Auswertung des Integrals $\int e^{-x^2}\partial x$, die Transformation einer Quadratsumme in eine andere von anderer Gliederzahl, 3 principielle Sätze über Wahrscheinlichkeit, die Deduction des Satzes über die kleinsten Quadrate, die Bestimmung von s Unbekannten aus $n(>s)$ ungenauen Gleichungen nach grösster Wahrscheinlichkeit, die wahrscheinlichen Grenzen der Präcision und des wahrscheinlichen Fehlers, die Verbesserung der Werte und die Zurückführung eines beliebigen Systems von Gleichungen auf ein System ersten Grades. Hierauf folgt eine Zusammenstellung der Formeln nebst einer zweistelligen Tafel der genannten Integralfunction und die Theorie der ballistischen Linie. Letztere lässt sich wol rücksichtlich des Hauptzweckes als wesentlicher Bestandteil der Schrift ansehen. Da die Theorie der kleinsten Quadrate und der Bestimmung von Grössen aus überzähligen Beobachtungen nach gewöhnlicher Darstellung manche dunkle Punkte übrig zu lassen pflegt, so hätte man bei mehr didaktischem Gesichtspunkt, als er hier wol massgebend gewesen ist, erwarten können, dass die Schrift sich Sorgfalt und Genauigkeit in den Grundbegriffen auferlegt, soviel als möglich Aufklärung gegeben und das Zweifelhafte im wahren

Lichte dargestellt hätte. In dieser Beziehung lässt sie jedoch auch das Naheliegende vermissen. Jeder weiss z. B., dass ein Wert $x=a$ einer stetigen Variabeln keine Wahrscheinlichkeit hat, dass vielmehr nur von der Wahrscheinlichkeit eines Wertes zwischen x und $x+\partial x$ die Rede sein kann. Gleichwol wird hier letztere zur zweiten Frage gemacht. Ferner ist in der Hauptanwendung der Theorie die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung der Geschosse vom Ziele verschiedene Function derselben von deren Richtung (seitlich und vertical). Gleichwol gründet sich die Deduction des Satzes von den kleinsten Quadraten auf die Voraussetzung, dass die Function nach allen Richtungen dieselbe sei, ohne dass von einer Beschränkung der Gültigkeit die Rede wäre. Es scheint hiernach und nach der gesammten Behandlungsweise der Gesichtspunkt des Verfassers zu sein: das praktische Verfahren sei einmal unabänderlich, und jede Anregung des Nachdenkens könne nur das Zutrauen zu demselben schwächen. H.

Die Gleichungen des vierten und fünften Grades. Von A. von der Schulenburg, Hauptmann a. D. Altona 1875. A. Prinz. 49 S.

Die Vorrede kündigt die Auflösung der allgemeinen Gleichung 5. Grades und den Nachweis der Lösbarkeit der Gleichungen höherer Grade an. Doch die Gleichungen 5. Grades, deren Behandlung nach manchen dafür bestimmten Anordnungen zu erwarten war, werden mit keinem Worte in Angriff genommen. Der Verleger, welcher die Schrift nach dem Tode des Verfassers herausgiebt, scheint von der Unvollständigkeit des Manuscripts nichts gewusst zu haben. In Betreff der Gleichungen 4. Grades enthält die Schrift einige Transformationen, einige Sätze über die Differenzen der Wurzeln und die bekannten Auflösungsmethoden. H.

Studien im Gebiete numerischer Gleichungen mit Zugrundelegung der analytisch geometrischen Anschauung im Raume nebst einem Anhange über erweiterte Fundamental-Constructionsmittel der Geometrie. Von Lorenz Zmurko, Prof. der Mathematik an d. k. technischen Akademie in Lemberg. Wien 1870. Gerold's Sohn. 4°. 84 S.

Die Schrift handelt von der annähernden Berechnung der Wurzeln beliebiger Gleichungen und Gleichungssysteme. Der Verfasser zeigt, dass die Newton'sche Näherungsmethode auch auf den Fall naheliegender Wurzeln anwendbar sei, indem man diese, auf soviel Stellen, als sie übereinstimmen, als mehrfache Wurzel betrachtet und demgemäss statt des ersten Differentialquotienten den zweiten, dritten

u. s. w. verwendet. Er bildet die Fourier'sche Methode der Trennung der Wurzeln weiter aus, handelt zuerst von den Fundamentaleigenschaften der Gleichungspolynome, dann von der räumlichen Deutung der Gleichungen und ihrer Wurzeln, von der horizontalen Einschliessung der Wurzelpunkte, von der gesetzmässigen Einschliessung in stets engere Grenzen, deren Principien sodann auf Gleichungssysteme für mehrere Unbekannte ausgedehnt werden; es folgt die Begründung des Fourier'schen Verfahrens bei der Trennung der reellen Wurzeln. Der Anhang beschäftigt sich mit der Auswertung der für dieses Verfahren notwendigen Functionsreihen, Construction derselben und Constructionsvorrichtungen. H.

Sviluppo di un determinante ad elementi polinomi. Par M. Albeggiani, Studente nell' Università di Palermo. Giornale di scienze naturali di Palermo. 1874.

Bezeichnen a und b jedes n^2 Elemente, so lässt sich die Determinante des Systems $a+b$ in eine Summe von Producten entwickeln, deren ein Factor eine beliebige Unterdeterminante der a, der andere die ergänzende Unterdeterminante der b ist. Diesen Satz dehnt der Verfasser auf Polynome $a+b+c+\ldots$ aus, und zeigt, dass auch hier die Producte sämmtlicher Combinationen von Unterdeterminannten, welche stets zusammen alle Reihen des Systems und keine gemeinsam enthalten in der Summe die Determinante des Polynoms geben.

H.

Intorno ad alcune serie. Per Angelo Genocchi. Torino 1873. Paravia e C. 34 S.

Der Verfasser untersucht eine Anzahl specieller Reihen, welche von Riemann in seiner, nach seinem Tode herausgegebenen Abhandlung über die trigonometrischen Reihen als Beispiele bemerkenswerter Eigenschaften von Functionen ohne deren Beweis aufgestellt sind, und begründet diese Eigenschaften. Das erste Beispiel ist die unendliche Reihensumme

$$\Sigma \sin(n!\,x\pi)$$

von welcher er durch ein sehr einfaches Verfahren der Zerlegung beweist, dass sie für die Werte

$$x = \frac{2}{e}, \quad e, \quad \tfrac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right), \quad \sin 1, \quad \cos 1$$

convergirt, für $x = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$ hingegen divergirt, daher letzterer

Wert wahrscheinlich aus Versehen statt $\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$ von Riemann genannt sein mag. Die folgenden Gegenstände der Prüfung sind die Reihen, deren allgemeine Glieder

$$c_n \cos(n^2 x) \quad \text{oder} \quad c_n \sin^2(n^2 x), \quad \text{wo} \quad c_\infty = 0;$$

$\frac{(nx)}{n}$, wo (nx) den Ueberschuss von nx über die nächste ganze Zahl bezeichnet, für den Fall aber, wo dieser $= \frac{1}{2}$ ist, $= 0$ zu setzen ist; und einige andere weniger einfache Beispiele. H.

Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen. Von Dr. J. Thomae, a. o. Professor in Halle. Mit 20 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Zweite vermehrte Auflage. Halle a/S. 1873. Louis Nebert. 197 S.

Nach Bestimmung des Verfassers soll dieser Abriss denen, welche eine grössere Vorlesung über elliptische Functionen hören, eine kurze Uebersicht über die fundamentalen Eigenschaften der Thetafunctionen einer Veränderlichen und ihrer wichtigsten Darstellungen an die Hand geben. Die Theorie der Functionen einer complexen Variabeln schickt er als dazu unentbehrlich voraus. Diese Behauptung der Unentbehrlichkeit ist sehr geeignet unrichtige Vorstellungen zu erwecken. Bei einigen Fragen und Problemen liegt es freilich in deren Natur, dass sie jener Theorie bedürfen. Diese aber in den Vordergrund zu stellen ist kein Grund ersichtlich und der Erfolg eines solchen Verfahrens für Verständlichkeit sehr fraglich. Jedenfalls lässt sich, wie sehr wol bekannt, die Theorie der elliptischen Functionen in einem weit grösseren Umfange, als er hier ins Auge gefasst ist, auf dem Boden der reellen Grössen behandeln; und wer selbst die Anfangsgründe aus Sätzen über die Complexen abzuleiten für gut findet, mag auch die Vorzüge dieser Methode im Vergleich mit der früheren betätigen. Dass nun die gegenwärtige Bearbeitung für ihren erklärten Zweck, Uebersicht über die fundamentalen Eigenschaften der Thetafunctionen, Vorzüge aufweise, kann man wol schwerlich behaupten wollen. Die systematische Ordnung des gesammten Gebietes, welche sich bei gewöhnlicher (reeller) Methode von selbst einstellt, mag hier vielleicht im Gedanken des Verfassers auch existiren, für den Leser aber tritt sie nicht hervor: man wird sogar Mühe haben, bekannte Relationen darin aufzufinden bzhw. zu finden, ob sie überhaupt darin stehen. Der erste Teil des Buches, enthaltend die Theorie der complexen Veränderlichen, ist hinreichend allgemein aufgestellt, um seine Wertschätzung auch als unabhängig von der beabsichtigten Anwendung in Betracht

zu ziehen. Das darin behandelte Gebiet ist kein so bald erledigtes, dass nicht neue Bearbeitungen und Begründungsversuche ein Bedürfniss bleiben. Kam es dabei in höherem Masse auf exacte Fassung und auf klare Grundlegung an, so findet man nicht gerade an ersterer, wol aber an letzterer Anlass das Notwendige zu vermissen. Von der vorausgesetzten Basis mathematischer Vorkenntnisse ist nirgends die Rede. Dann sollte wenigstens der Verfasser eine durchweg evidente, durch Evidenz unverrückbare Basis im Sinne haben. Nur dann durfte er eine gleiche Vorbildung bei allen Lesern beanspruchen. Es zeigt sich aber gerade das Gegenteil. Die stillschweigend als selbstverständlich übereinstimmend vorausgesetzte Vorbildung ist eine äusserst laxe, deren Lücken er erst, aufmerksam gemacht durch namhafte Entdecker, im einzelnen ausbessert, während ganz unentschieden bleibt, wieviel andere Lücken uncontrolirt fortbestehen. Gar manche Aeusserungen des Verfassers zeigen, dass er mehr vom Glauben als vom Wissen ausgeht, mehr auf das Interesse am Wunderbaren als auf das Bewusstsein der Urteilsfähigkeit baut, eine Speculation die freilich in der neusten Zeitrichtung einen günstigen Boden findet, mit der aber der Wissenschaft schlecht gedient ist. Am wenigsten kann die Darstellung im Anfang des Buchs befriedigen, wenn man darin eine Beförderung der Klarheit in den Grundbegriffen sucht. Die von Natur leicht fasslichen Gegenstände, um welche es sich hier nur handelt, sind ungeachtet eines gleichmässig correcten Ausdrucks durch unnötig complicirte Auffassung zu schwierigen gestempelt. Auf Seite 7. 8. fragt der Verfasser (wenn man sich an seine Worte hält), ob eine stetige Function einer reellen Variabeln in gleichem Sinne und in gleicher Begrenzung, wie er es vorausgesetzt hat, auch wirklich stetig sei, beweist es, noch dazu unter Beschränkung, durch eine ermüdend lange Argumentation und verneint sogar die Frage hinsichtlich der Allgemeingültigkeit. Im übrigen wird die Aneignung des Vorgetragenen dadurch ziemlich schwer gemacht, dass das Ganze von Anfang bis Ende eine blosse Reihe von Theoremen und Betrachtungen ohne irgend welchen Abschluss oder Ruhepunkt darstellt. Da die Theoreme an viele Bedingungen geknüpft sind, so war es hier mehr als irgendwo wünschenswert, dass man scheidende und ordnende Gesichtspunkte deutlich herausgestellt fand. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXXX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Cantor, M., d. röm. Agrimensoren u. ihre Stellg. in d. Gesch. d. Feldmesskunst. 8. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Fortschritte, die, auf d. Geb. d. Physik. Nr. 2. 1874 bis 1875. 8. Leipzig, Mayer. 2 Mk. 40 Pf.

Hygini astronomica. Ex codicibus a se primum collatis rec. B. Bunte. 8. Leipzig, T. O. Weigel. 4 Mk.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. *Ohrtmann*, F. Müller, A. Wangerin. 5. Bd. J. 1873. 3. Hft. 8. Berlin, G. Reimer. 4 Mk. 60 Pf.

Suter, H., Gesch. d. mathemat. Wissensch. 2. Thl. 2. Hälfte. 8. Zürich, Orell, F. & C. 8 Mk.

Treutlein, P., Gesch. unserer Zahlzeichen u. Entwickelg. d. Ansichten üb. dieselbe. 8. Carlsruhe, Müller & G. 1 Mk. 60 Pf.

Methoden und Principien.

Schott, W., zur Figurenfrage. 2. Abth. 4. Berlin, Dümml r. 1 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Adam, W., 1500 Aufgaben aus d. Buchstabenrechnung u. Algebra m. vollständ. Berechngn. 8. Neu-Ruppin, Petrenz. 4 Mk. 40 Pf.

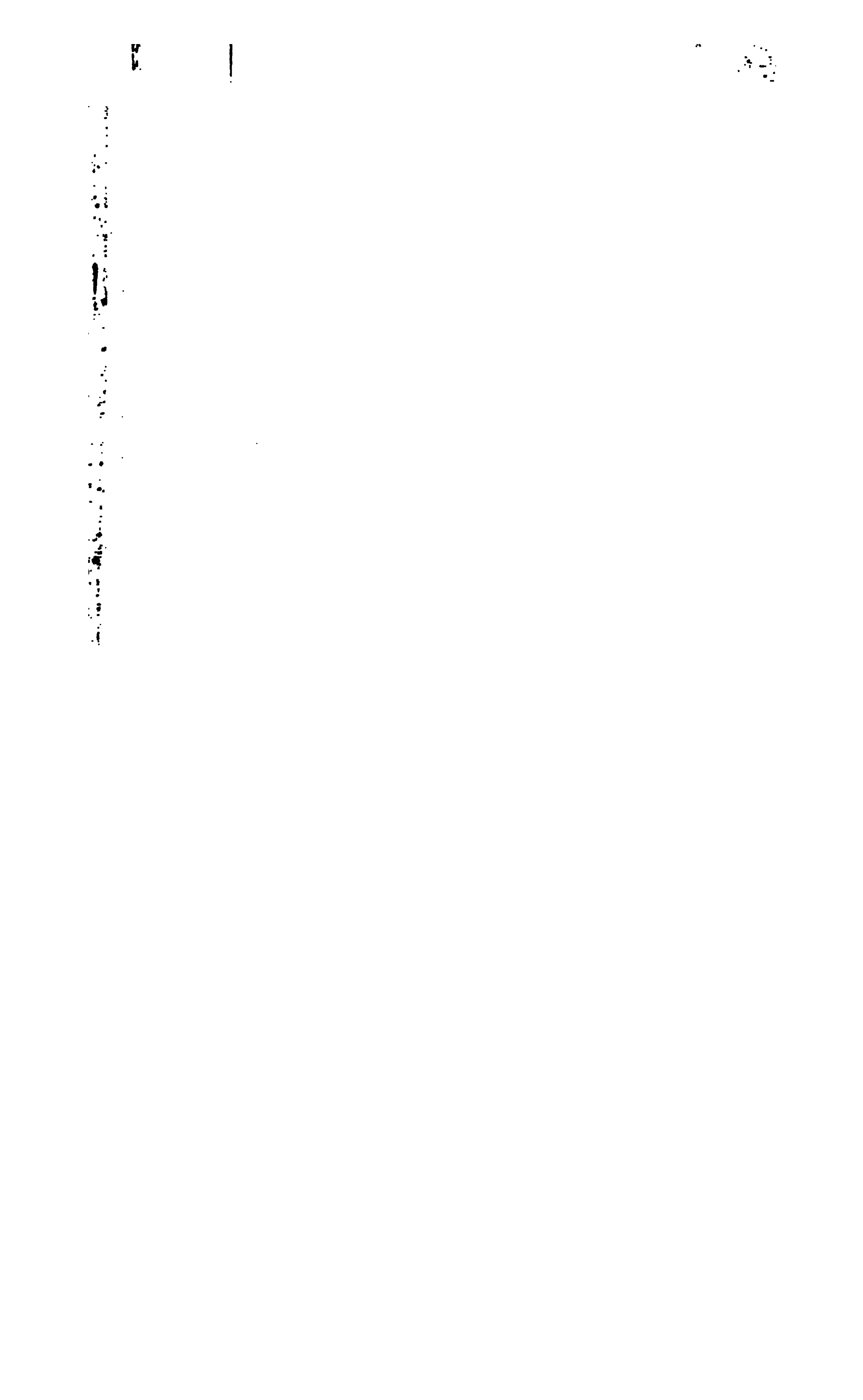
Féaux, B., Rechenbuch u. geometr. Anschauungslehre. 5. Aufl. 8. Paderborn, Schöningh. 1 Mk. 20 Pf.

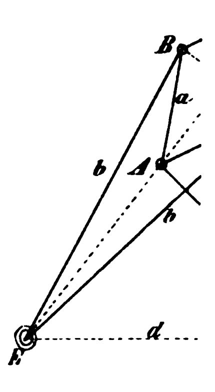
Krafft, Th., Sammlg. arithm. Beispiele u. Aufg. z. Gebr. in Lateinschulen. 1. Bdchn. 1. Abth. 4. Aufl. 8. Nürnberg, Korn. 1 Mk. 80 Pf.

Neumann, C., Formelbuch enth. d. hauptsächl. Formeln, Sätze u. Regeln d. Elementar-Mathematik. 3. Aufl. 16. Dresden, Türk. 1 Mk. 50 Pf.

IX Kosch: Trisection eines Winkels.

Steindruckerei von F. W. Kunike, Greifswald.

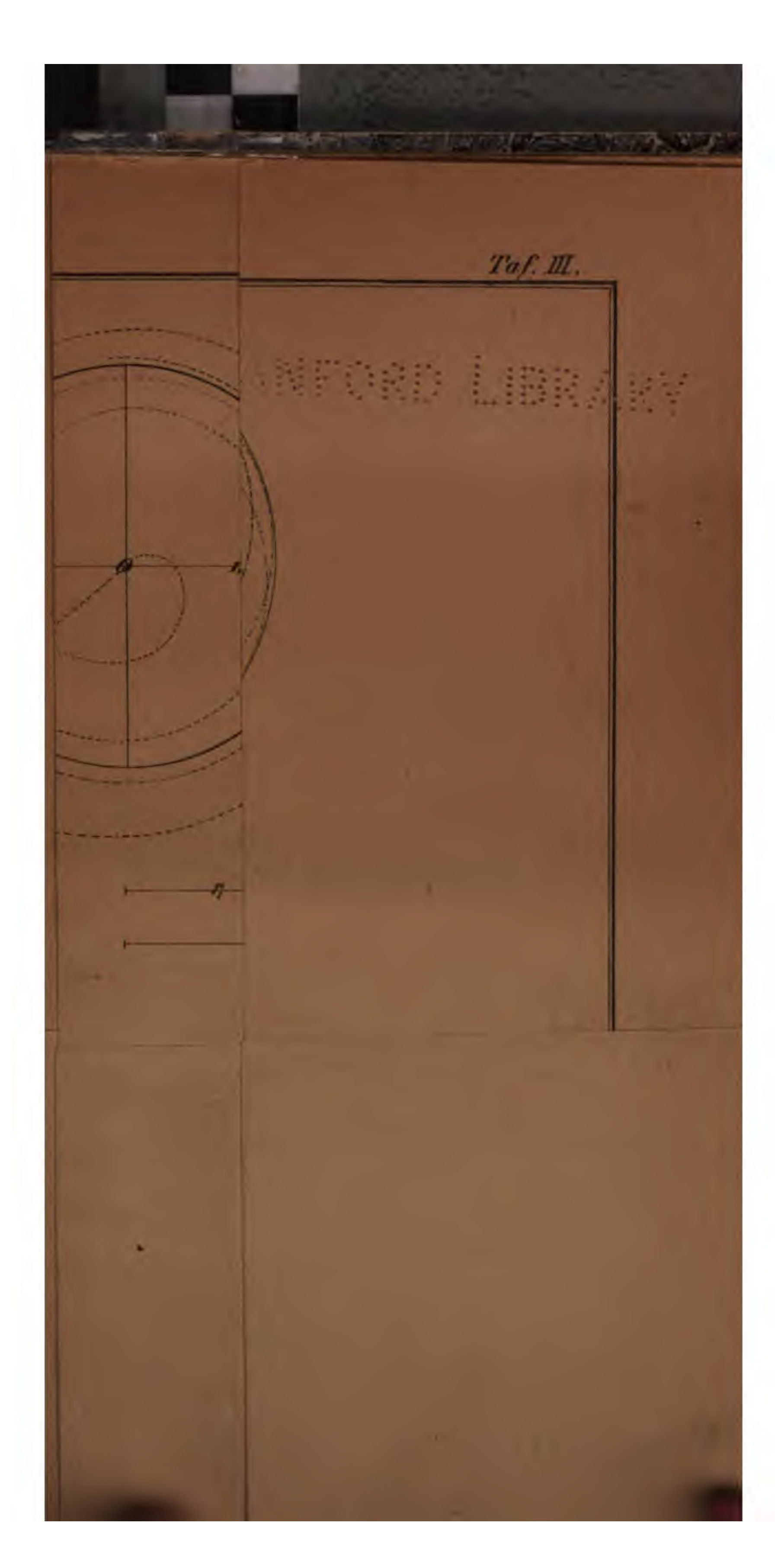




XVIII. A

XII. Pfeil: 2




Taf. III.

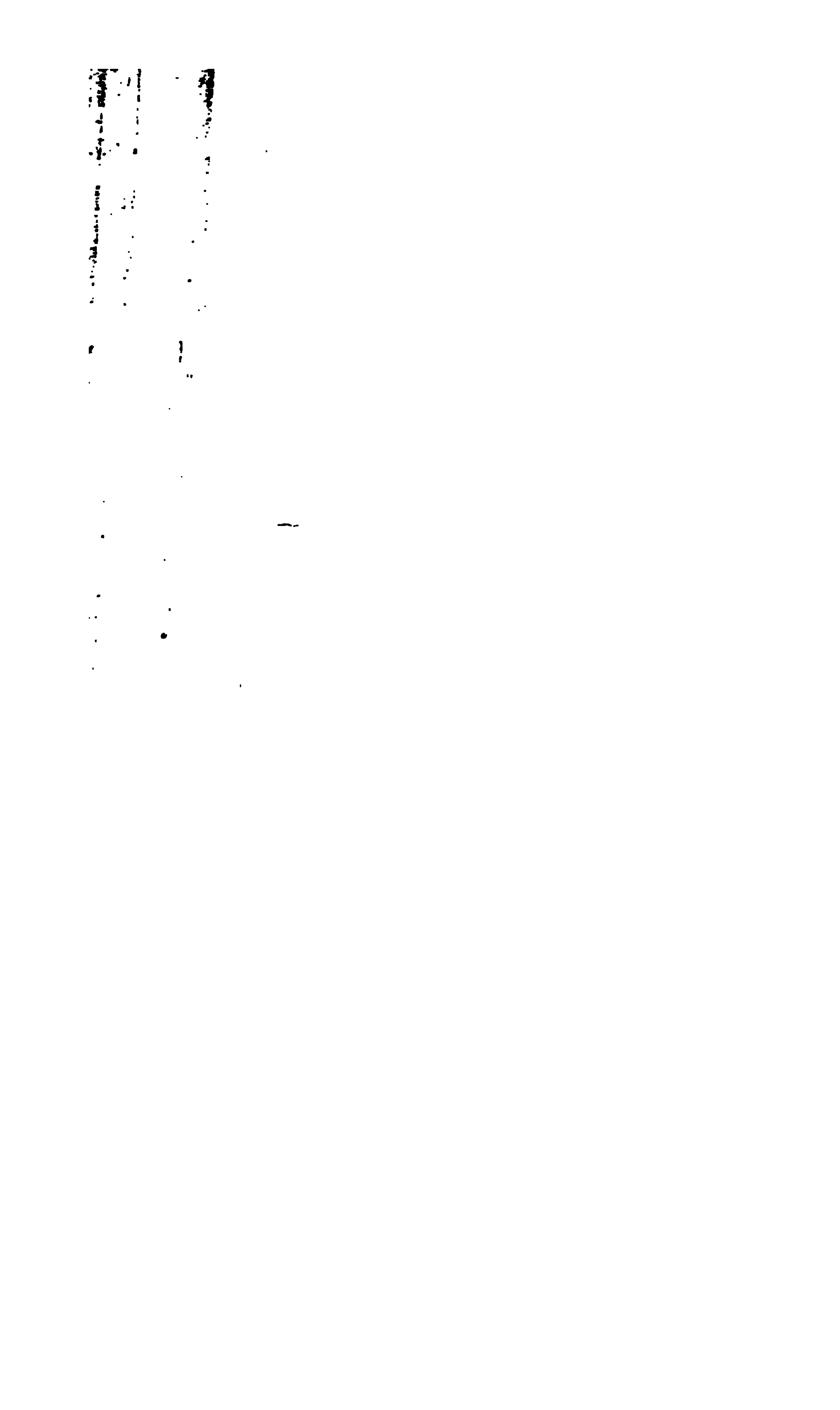




Fig. 1.

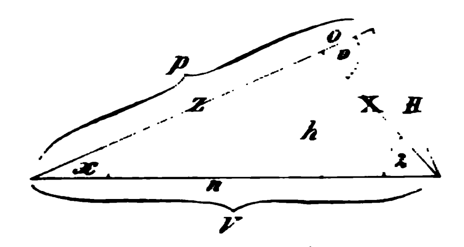


Fig. 2.

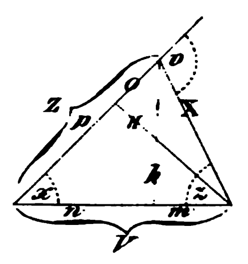
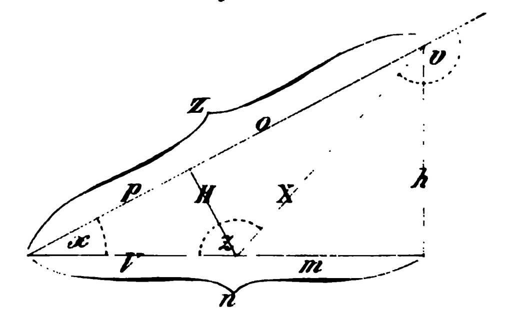


Fig. 3.



XXV. Pfeil: Zur Schultrigonometrie.

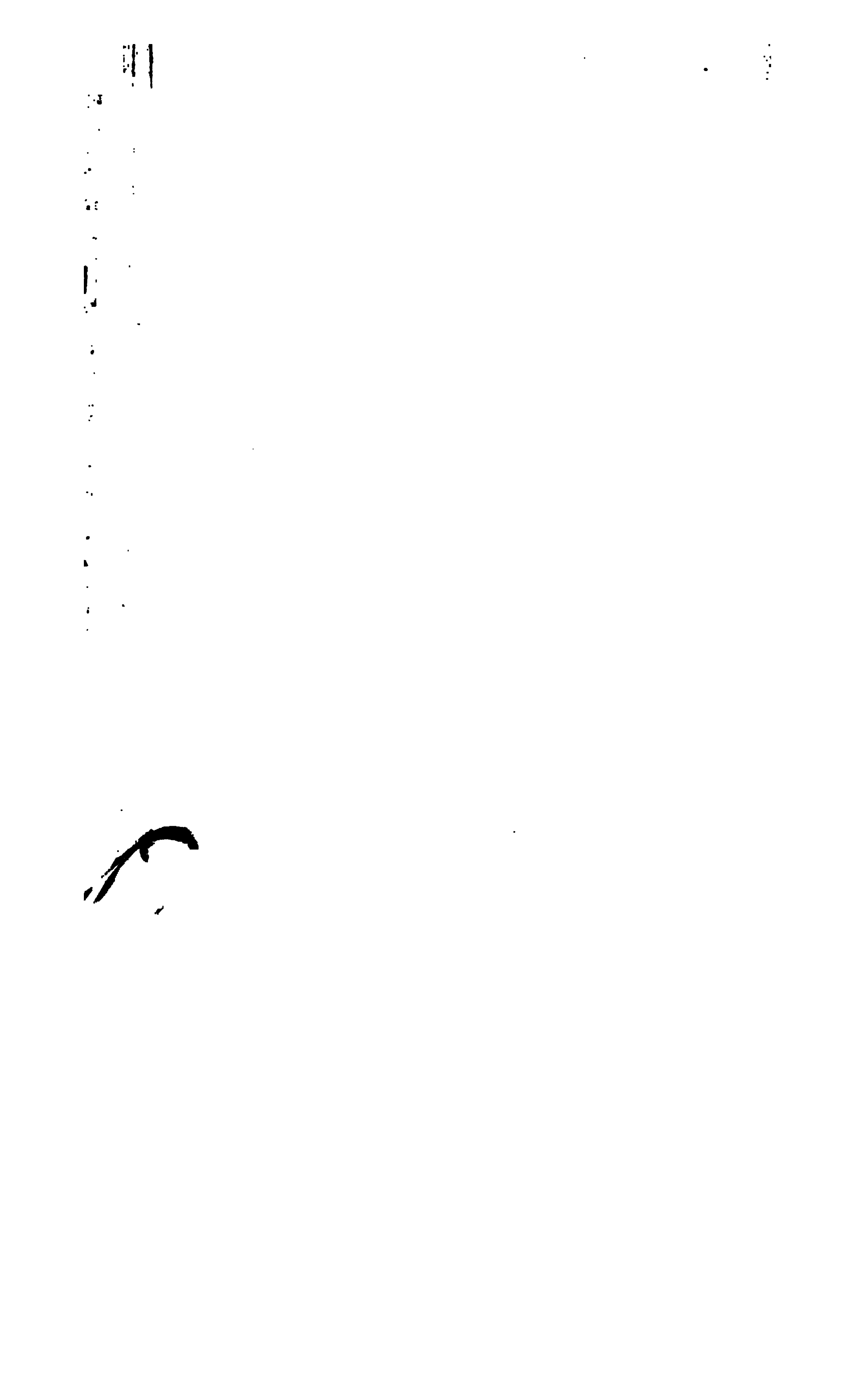


Fig. 1.

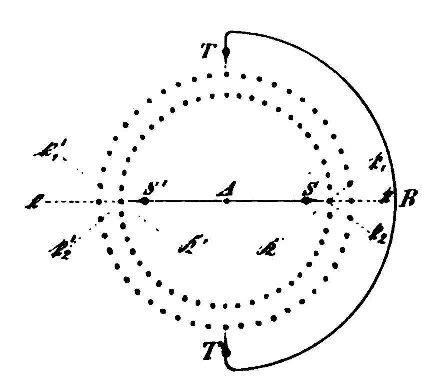
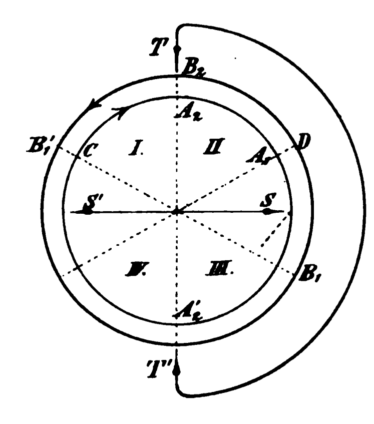
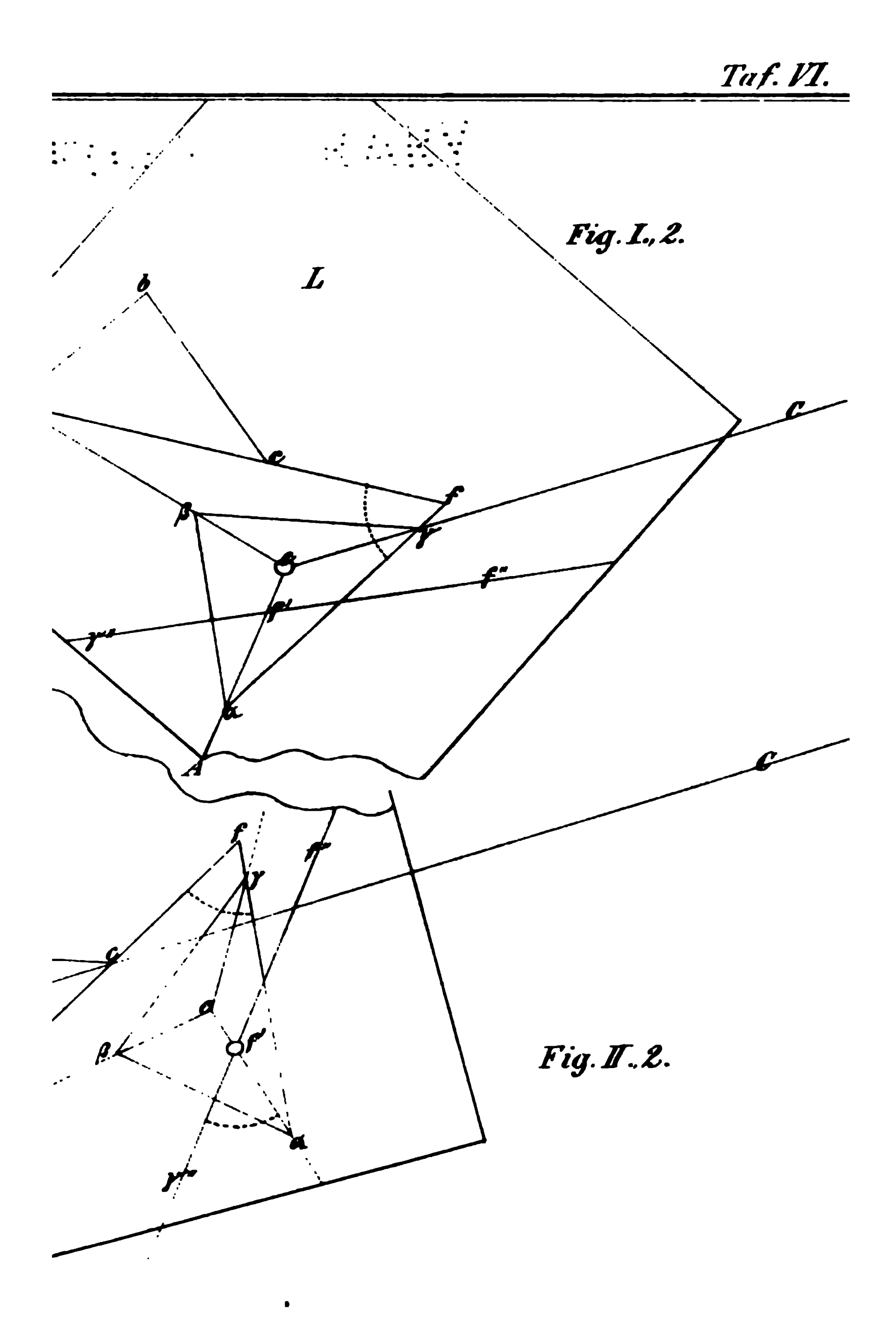


Fig. 2.

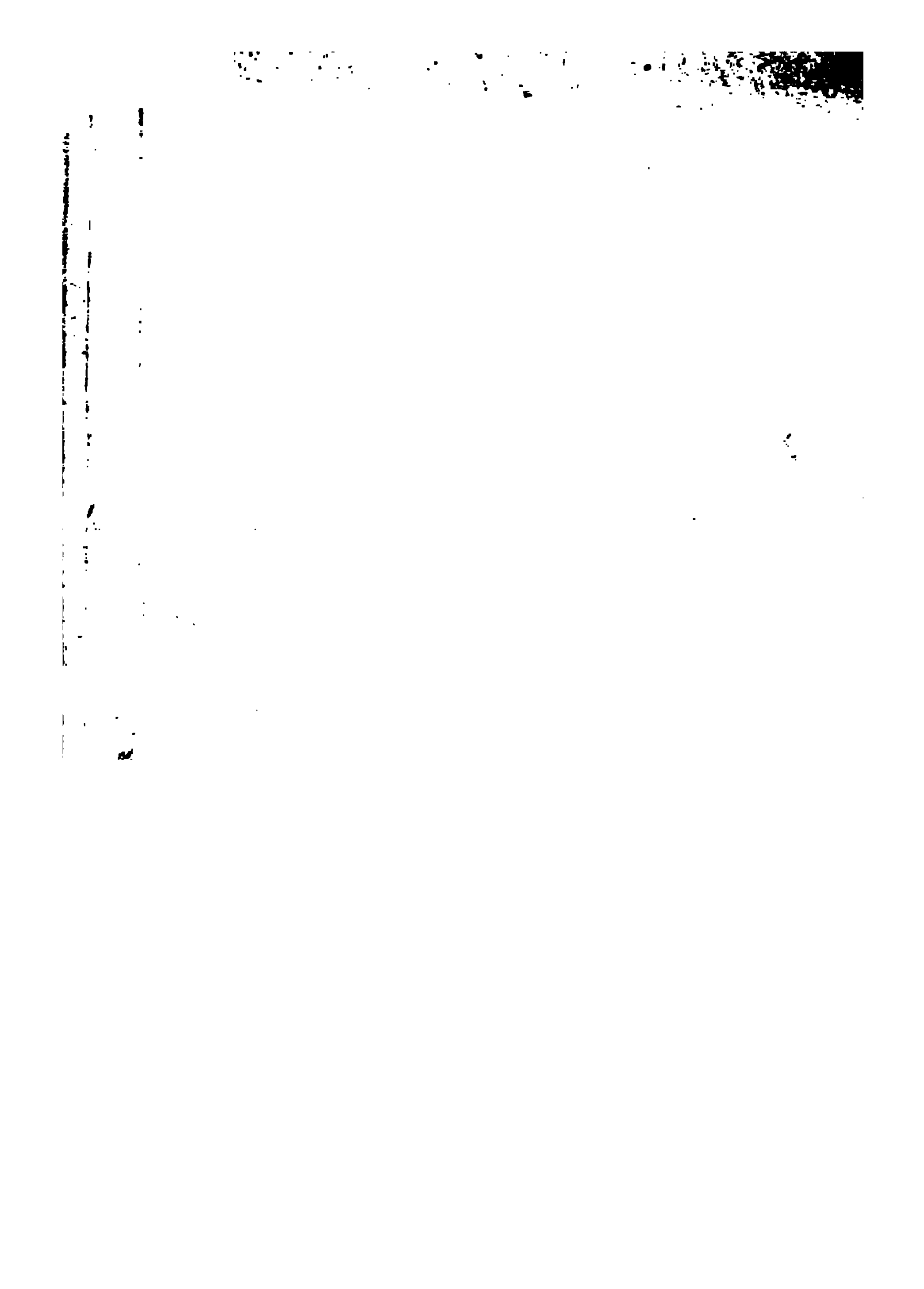


XXIX. Veltmann: Influenzmaschine.



XXXII. Pfeil: Einrichtung des Messtisches.

Steindruckerei von F. W. Ku






810.5
A673
V.58
STORAGE AREA

